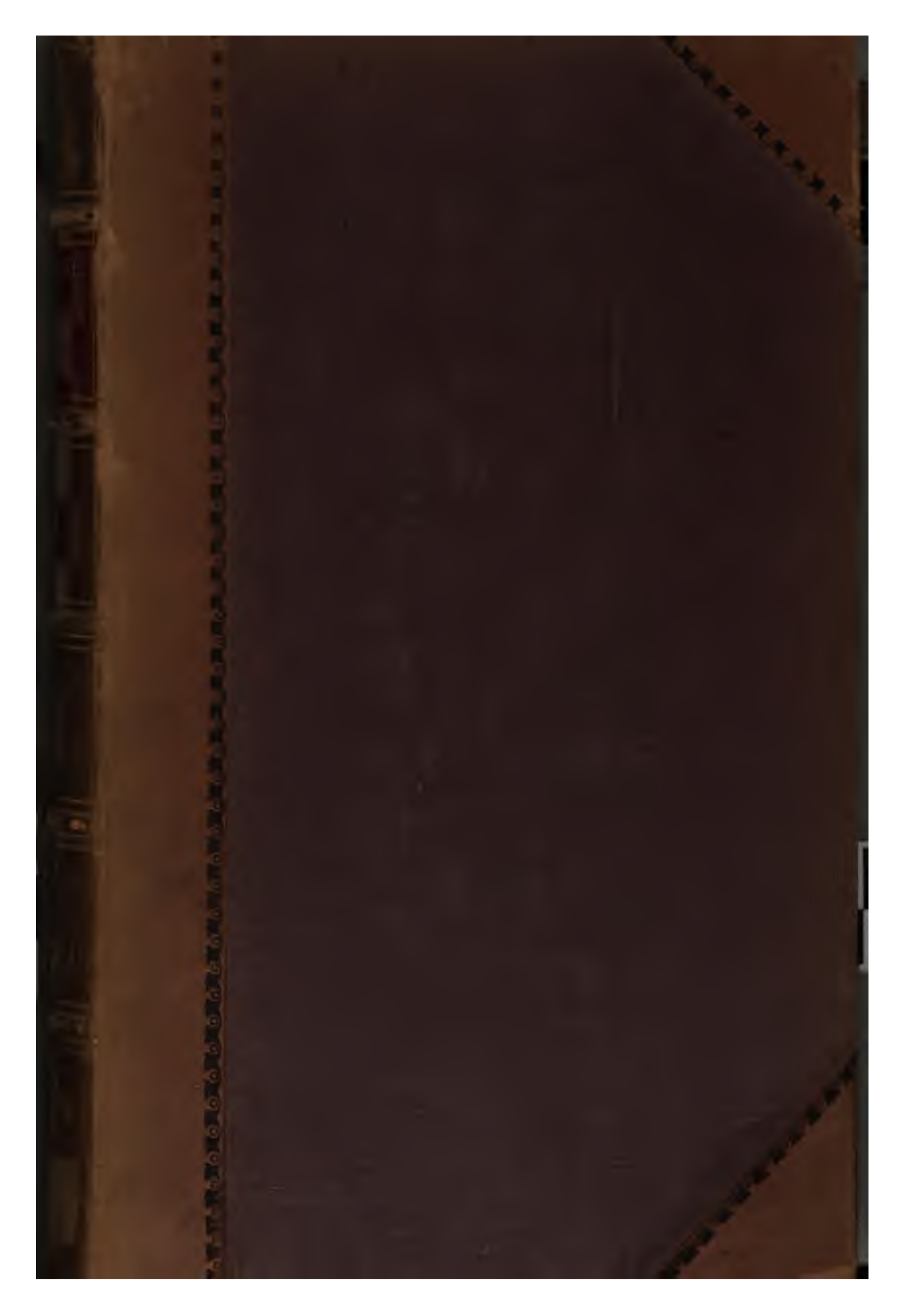
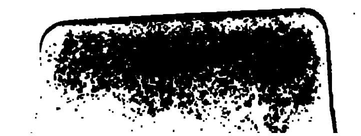














HANDBUCH

DER

OPTIK,

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

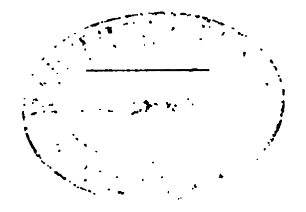
AUF DIE

NEUESTEN FORTSCHRITTE DER WISSENSCHAFT

BEARBEITET

VON

F. W. G. RADICKE.



ERSTER BAND.

MIT DREI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

BERLIN, 1839.

IN DER NICOLAISCHEN BUCHHANDLUNG.

Sr. Excellenz

dem

Herrn Freiherrn

von Stein zum Altenstein,

Königl. Preuſs. wirklichen Geheimen Staats-Minister und Minister der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Ritter des Königl. Preuſs. schwarzen Adler-Ordens und anderer hohen Orden etc. etc. etc.,

in tiefster Verehrung gewidmet

vom Verfasser.

Vorrede.

Mit der Entdeckung der Polarisation des Lichtes durch Malus im Jahre 1810 begann eine neue Periode für die Optik, welche sich in gleichem Grade durch den Reichthum rasch aufeinanderfolgender Entdeckungen, wie durch die hohe Ausbildung der Theorie auszeichnete.

Die neuen Erscheinungen, von denen bei weitem die Mehrzahl durch Brewster entdeckt wurde, gaben einen Prüfstein für die beiden damals bestehenden Theorien, die Emanationstheorie und die Wellentheorie.

Fresnel, der geistreiche Vertreter der letzteren, erklärte, von dem Interferenzprincip ausgehend, welches Young zuerst auf die Optik angewendet hatte, die Polarisationserscheinungen so einfach und so vollständig, dafs die künstlichere Erklärung, welche Malus und Biot nach der bis dahin das Uebergewicht habenden Emanationstheorie gaben, in den Hintergrund treten mufste. Nachdem er darauf die Beugungserscheinungen aus demselben Princip hergeleitet, und den Beweis geliefert hatte, dafs die letztgenannte Theorie zu deren Erklärung unzulänglich sei (*Memoire sur la diffraction de la lumière. Ann. de*

Chim. et de Phys. 11.), bewies er von Neuem seine Meisterschaft durch seine Theorie der Doppelbrechung (*Mem. sur la double refraction. Mem. de l'Acad. de l'Instit.* 1837); und es stand dem vollständigen Triumpfe der Wellenlehre hauptsächlich nur der aus der Analysis selbst gezogene Einwand Poisson's entgegen, dafs ihr die Dispersion widerstreite *).

Von dem Standpunkte aus, auf welchen Fresnel die Theorie führte, schrieb Herschel, zugleich die Resultate seiner eigenen Forschungen und die von Fraunhofer herrührenden Erweiterungen aufnehmend, seine Lehre vom Licht (*on the light* in der *Encyclop. metrop. Lond.* 1828), welche bald von Quetelet ins Französische und von Schmidt ins Deutsche übersetzt wurde.

So viel aber auch Fresnel für die Theorie gethan hatte, so blieb doch noch Vieles für ihre Vervollständigung und fernere Fortbildung zu thun übrig, und es wurde auch in der Folge nicht nur rastlos und mit vielem Erfolg daran gearbeitet, sondern auch der Kreis der Erscheinungen durch manche neue Entdeckung noch erweitert.

In letzter Beziehung waren namentlich thätig: Brewster durch seine Entdeckung der elliptischen Polarisation durch Metallreflexion **) (de-

*) Der Einwurf beruhte darauf, dafs Poisson's Calcul zufolge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem und demselben Mittel von der Schwingungsdauer unabhängig sei.

**) Die ersten hierher gehörigen Erscheinungen entdeckte Brewster zwar schon im Jahre 1815, allein die zahlreichen näheren Untersuchungen erfolgten erst später und wurden 1830 und 1831 veröffentlicht.

ren theoretische Bearbeitung bald darauf durch Neumann [Pogg. Ann. XXVI, p. 89 et seqq.] erfolgte); und Hamilton durch die Entdeckung der konischen Refraction, welche besonders dadurch höchst wichtig geworden ist, dafs sie von der Theorie vorausgesagt wurde.

Zu den vorzüglichsten und reichhaltigsten späteren Leistungen für das Theoretische gehören zwei gründlichere Bearbeitungen der Doppelbrechungstheorie: die eine von Neumann (Pogg. Ann. XXV, p. 418 et seqq.), die andere von Cauchy (*Memoire sur la dispersion de la lumière. Prague* 1836). Beide Gelehrten nahmen im Allgemeinen denselben Gang; nur ging der letztere von allgemeineren Formeln aus und verfuhr mehr entwickelnd. Das ebengenannte Memoire verdient überdies noch deswegen eine ganz besondere Beachtung, weil es zugleich die Theorie der Dispersion enthält, und somit den erwähnten Einwand Poisson's gänzlich hebt.

Nach einer andern Seite hin leistete Neumann Treffliches durch seine musterhafte Abhandlung „Ueber den Einflufs der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes und über die Intensität der gebrochenen Strahlen. Berlin 1837"; und Schwerd durch die Theorie der Fraunhofer'schen Entdeckungen (Beugungserscheinungen. Mannheim 1835), ein Werk, welches sich besonders durch das Systematische der Behandlung auszeichnet.

Von den vielen anderen Arbeiten mag nur noch erwähnt werden: die Airy'sche Erklärung der Farben-Erscheinungen im Bergkrystall (siehe (Pogg. Ann. XXIII, p. 204 et seqq.); und in Be-



so vertheilt, daſs der dritte und vierte diejenigen enthält, welche auf einer Veränderung in den Lichtstrahlen selbst (in der Schwingungsweite) beruhen, nämlich die Interferenz-Erscheinungen; der fünfte dagegen diejenigen, welche auf Richtungsänderung der Strahlen beruhen, nämlich die Katoptrik und Dioptrik. Der sechste Abschnitt handelt von der Absorption, deren Theorie die bis jetzt am wenigsten ausgebildete ist. Cauchy hat zwar auch diese, wie er in seinen Briefen an Ampère schreibt, mit Erfolg der Analyse unterworfen, allein das Nähere darüber ist, so viel der Verf. weiſs, noch nicht veröffentlicht worden. Das sich hierauf Beziehende hat daher nicht die einer strengen systematischen Behandlung entsprechende Stelle erhalten; indem die Grundlagen desselben dem ersten und zweiten Abschnitt hätten anheim fallen müssen.

Die Abschnitte, welche auf den siebenten, der die physiologische Optik in sich begreift, folgen, umfassen die Hauptanwendungen der Optik, nämlich die Anwendung auf die meteorologischen Erscheinungen und die Theorie der optischen Instrumente.

Eine allgemeine Eintheilung in die Lehre des polarisirten und unpolarisirten Lichtes läſst sich nicht ohne unnatürliche Trennung verwandter Erscheinungen durchführen; die Anordnung ist indeſs so geschehen, daſs der erste Band vorzugsweise den Erscheinungen des polarisirten Lichtes gewidmet ist, der zweite dagegen denjenigen, welche, obwohl durch die Polarisation zuweilen modificirt, doch nicht durch sie bedingt werden.



Inhalt des ersten Bandes.

Erster Abschnitt.

Gesetze der Bewegung des in einem und demselben homogenen Mittel bleibenden Lichtes.

Zweiter Abschnitt.

Gesetze der Bewegung des Lichtes beim Uebergang aus einem Mittel in ein anderes.

Dritter Abschnitt.

Die Interferenz-Erscheinungen, welche durch die ungleiche Geschwindigkeit des Lichtes in doppelbrechenden Mitteln erzeugt werden.

Seite

Erster Abschnitt.

·tze der Bewegung des in einem und dem-ben homogenen Mittel bleibenden Lichtes.

mannigfachen Erscheinungen, welche uns das Licht etet, lassen sich fast ohne Ausnahme mit der gröſsten uigkeit analytisch vorconstruiren, wenn man die Vor- tzung macht: daſs die Räume des Weltalls mit einem n, elastischen, unsern Sinnen sonst unwahrnehmbaren 'um, dem Aether, erfüllt seien, welcher durch vibri- Bewegung der Theile leuchtender Körper in eine ıfalls vibrirende Bewegung versetzbar ist, und daſs die zeugten Schwingungen des Aethers dadurch, daſs sie den Sehnerven mittheilen, die Empfindung des Sehens orrufen.

Bei dem hohen Grade der Ausbildung, deren sich die ickelung dieser Hypothese zu erfreuen hat, wird es ch — statt die optischen Erscheinungen, und die Ge- welche sich aus der Erfahrung für sie ergeben, hin- len, und nachher die Uebereinstimmung mit den Re- en der Rechnung, auf welche die oben erwähnte Hy- se führt, zu zeigen — zuerst die Gesetze der Bewe- des hypothetischen Fluidums zu entwickeln (da sie, ehen von der Wahrheit der Hypothese, zugleich die ze der Lichterscheinungen sind) und diesen Entwicke- n das Specifische (der Besonderheit der Materie An- ige) anzufügen.

Sehen wir ab von den Ursachen, die einen Körper Leuchten bringen, und von deren Fähigkeit, in den nd versetzt zu werden, welcher den Impuls zu den

Licht gebenden Schwingungen des Aethers giebt (Lehre von der Phosphorescenz); sehen wir ferner ab von dem Zusammenhange der Aetherschwingungen mit dem Gesehenen (physiologische Optik): so bleibt die rein mechanische Aufgabe zu lösen übrig, welcher Art man sich die Vibrationsbewegungen zu denken habe, und nach welchen Gesetzen sich dieselben verbreiten.

Die Art der Schwingungen und die Gesetze ihrer Verbreitung hängen natürlich von der Beschaffenheit des Aethers ab. Hat derselbe in dem Medium, in welchem er befindlich ist, überall dieselbe Beschaffenheit, so nennen wir das Medium (optisch) homogen, — und solche Mittel sollen fernerhin immer vorausgesetzt werden. Die verschiedenen homogenen Mittel unterscheiden sich alsdann durch die besondere Beschaffenheit, d. h., wenn man sich so ausdrücken darf, durch die besondere Vertheilung des Aethers. — Dafs die Reaction der Aethertheilchen in einem homogenen Mittel immer dieselbe sein müsse, ist klar; theilen sich aber die Schwingungen in einem Medium dem Aether eines andern Mediums mit, so wird die Reaction an der Grenze beider, wegen der Verschiedenheit der Vertheilung, Modificationen hervorrufen. Die Schwingungsart und die Verbreitung der Bewegung in einem Medium hängt daher, aufser von der Beschaffenheit des Aethers in dem letzteren, auch von etwaigen Einwirkungen anderer Mittel ab. Es ergeben sich somit zwei Hauptfragen: die eine nach den Gesetzen der ungestörten Verbreitung des Lichts in einem homogenen Mittel; die zweite, nach den Modificationen, welche unter dem Einflusse anderer Mittel erfolgen (Reflexion und Refraction).

Was die Beschaffenheit des Aethers anbetrifft, so kann man sich denselben als aus kleinen Theilchen (Molekülen) bestehend denken, die durch abstofsende Kräfte von unmittelbarem Contact abgehalten, und (vielleicht auch) durch anziehende Kräfte, die schwächer, aber in gröfseren Entfernungen wirken, in einer gewissen Nähe gehalten werden; dafs im Zustande des Gleichgewichts die Wirkungen die-

ser abstofsenden oder der abstofsenden und anziehenden Kräfte sich einander aufheben. Sind nun die Moleküle so vertheilt, dafs die Wirkungen, die auf ein Theilchen von den umherliegenden Theilen ausgeübt werden, in allen Richtungen dieselben sind, so nennt man das Mittel einfach brechend. Ist die Wirkung in verschiedenen Richtungen (nach einem bestimmten Gesetz) verschieden, so nennt man es doppelbrechend.

Wird nun durch irgend einen Impuls eines der Moleküle aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, und ist die Entfernung aus dieser Lage (die Verschiebung) sehr klein gegen die Entfernung der Moleküle unter sich, so wird durch das Bestreben, in die alte Lage zurückzukehren, eine pendulirende Bewegung hervorgebracht, die durch die von ihm ausgehende Reaction die übrigen Theile gleichfalls in Bewegung setzt. Umgekehrt ist die Verschiebung des unmittelbar in Bewegung gesetzten Theilchens von den Verschiebungen der übrigen Theile abhängig, und diese Abhängigkeit läfst sich durch Gleichungen *) darstellen.

Die Auflösung dieser Gleichungen würde auf die Gesetze führen, nach denen sich die Verschiebungen (Schwingungen) der Richtung, Gröfse und Geschwindigkeit nach richten, und nach denen sich die Bewegungen fortpflanzen.

Was die Schwingungsrichtung betrifft, so nennt man das Licht polarisirt oder unpolarisirt, je nachdem dieselbe constant (d. h. sich immer parallel) bleibt, oder nicht. Die Gröfse der Verschiebungen bedingt die Intensität des Lichtes; die Geschwindigkeit der Vibrationsbewegung bedingt die Zeit, welche das Theilchen braucht, um einmal hin und her zu schwingen, d. h. die Schwingungs- oder Oscillationsdauer, und

*) Diese Gleichungen sind partielle Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung zwischen 4 Veränderlichen (nämlich der Zeit und den Coordinaten des verschobenen Theilchens), in welche als Constanten die Ausdrücke für die Lage und Entfernungen der Theilchen, sowie der Gröfse der anziehenden und abstofsenden Kräfte (Elasticitätskräfte) eingehen.

diese bestimmt die Farbe des Lichts. Die Geschwindigkeit endlich, mit welcher die Bewegung sich fortpflanzt, führt auf die Wellenfläche, d. h. auf die Fläche, in welche die von einem Lichtpunkte ausgehenden Bewegungen gleichzeitig anlangen.

Mag die Vertheilung des Aethers sein, welche sie will, wenn dieselbe nur so ist, dafs die Wirkung der in jeder Geraden liegenden Theile auf jedes Theilchen dieser Geraden zu beiden Seiten dieselbe ist; so giebt es im Allgemeinen drei auf einander senkrechte Richtungen, nach denen die ursprünglichen Verschiebungen gerichtet sein müssen, wenn die dadurch erregten anderen Verschiebungen denselben parallel bleiben sollen. Die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit ist nach diesen drei Richtungen im Allgemeinen verschieden. Folgt daher die ursprüngliche Bewegung nicht einer dieser Richtungen, und sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nach diesen Richtungen nicht ausnahmsweise einander gleich, so mufs sie sich nach denselben zerlegen, und es giebt gleichsam drei von einander verschiedene Wellenflächen, deren zugehörige Bewegungen sich unabhängig von einander verbreiten.

Nennt man nun Lichtstrahl jede Linie, die vom Ursprung der Schwingungsbewegung zu einer der drei Partial-Wellenflächen geht, so sind die Strahlen im Allgemeinen zu dreien coordinirt.

Die Auflösung der oben erwähnten Gleichungen, von welchen die Gesetze der Lichterscheinungen abzuleiten sind, ist aber mit ungemeinen Schwierigkeiten verknüpft, ja vielleicht unmöglich. Man kommt aber dessen ungeachtet zum Ziele, wenn man von folgenden Betrachtungen ausgeht.

Wenn die Bewegung zu irgend einer Zeit bei allen Theilchen, die in einer Ebene liegen, der Gröfse und Richtung nach dieselbe ist, so müssen auch in den folgenden Zeitmomenten die gleichbewegten Theile in Ebenen liegen, die jener parallel sind, und die Verschiebungen hängen blofs von der Zeit und von der Entfernung von jener Ebene ab. Die Wellenflächen werden daher Ebenen. — Das Sy-

stem der bewegten Massen möge System ebener Wellen heifsen. — Denkt man sich nun durch irgend einen Punkt unzählig viele Ebenen nach allen Richtungen gelegt, die sich der Reihe nach unter sehr kleinen Winkeln schneiden, und in jeder Ebene die Bewegungen beziehlich einander gleich; so werden die ebenen Wellenflächen, in welche die Bewegung nach Verlauf einer bestimmten Zeit gelangt, einen Raum einschliefsen, welcher von einer Fläche begrenzt ist, die von allen Wellen-Ebenen eingehüllt ist. Setzt man ferner voraus, dafs die Schwingungen in einer Wellenebene für sich allein zu schwach sind, um den Gesichtssinn zu afficiren; so würden allein die in dieser umhüllenden Fläche ausgeführten Schwingungen wahrnehmbar sein, da in derselben die Schwingungen derjenigen ebenen Wellen, die sich unter verschwindend kleinen Winkeln schneiden, gemeinschaftlich wirken. Auf diese Art läfst sich aber die von einem einzigen schwingenden Punkt ausgehende Bewegung verbreitet denken, und die einhüllende Fläche ist das, was oben Wellenfläche genannt wurde.

Betrachtet man daher zuerst die Verbreitung der Bewegung in ebenen Wellen, so zeigen die sich vereinfachenden Gleichungen, dafs ein gleichzeitiges Entstehen unendlich vieler Wellensysteme möglich ist, deren jedes eine eigene Schwingungsdauer hat, und mithin einer eigenen Farbe entspricht. Es ist daher denkbar, dafs durch die ursprünglichen Bewegungen unendlich viele Strahlen entstehen, deren jeder für sich eine andere Farbe zeigt, und von denen man annimmt, dafs sie weifses Licht erregen, wenn sie sämmtlich dieselbe Richtung nehmen *).

Untersucht man ein einzelnes dieser Systeme (von un-

---

*) Für den Fall, dafs die Wellen eben sind, reduciren sich nämlich die oben erwähnten Differenzial-Gleichungen zwischen 4 Veränderlichen auf Differenzial-Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen; nämlich zwischen der Zeit und der Entfernung von derjenigen Ebene, in welcher sich anfänglich alle Moleküle auf gleiche Weise bewegten. Dieselben liefern unendlich viele particuläre Integrale, deren jedes einer bestimmten Schwingungsdauer, d. h. einer bestimmten Farbe entspricht.

veränderlicher Schwingungsdauer), so zeigt sich: dafs es drei auf einander senkrechte Richtungen giebt, denen die Schwingungen parallel bleiben, wenn sie ursprünglich denselben parallel waren, dafs die Geschwindigkeit in jedem der drei ihnen entsprechenden Systeme ebener Wellen im Allgemeinen verschieden ist, und dafs diese Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den Axen eines Ellipsoids (das man Polarisations-Ellipsoid oder Ellipsoid der Geschwindigkeit ebener Wellen nennen könnte) umgekehrt proportional sind.

Ist die anfängliche Schwingung keiner der drei Richtungen parallel, so müssen sich die resultirenden Bewegungen nach diesen drei Richtungen (welche jedesmal mit den Richtungen der Axen des Polarisations-Ellipsoids zusammenfallen) zerlegen, und es entstehen gleichzeitig drei von einander unabhängige (sich ungleich schnell verbreitende) Bewegungen, von denen einer jeden zwei Wellen-Ebenen (polarisirten Lichts) entsprechen, nämlich diesseits und jenseits der Ebene, von der die Bewegung ausging, die aber der gleichen Geschwindigkeit wegen ein einziges System bilden.

Jedes der drei Paare von Wellen-Ebenen rückt mit dem Wachsen der Zeit nach entgegengesetzten Richtungen parallel mit sich fort, und da die zwischen ihnen von den Molekülen ausgeführten Bewegungen, welche den Bewegungsrichtungen in den betreffenden Wellen-Ebenen parallel bleiben, gleiche Schwingungsdauer haben; so müssen längs der Normale jeder Wellen-Ebene in gleichen Intervallen die Moleküle, die während des Gleichgewichts in der Richtung der Normale lagen, zu einer bestimmten Zeit dieselben Verschiebungen erlitten haben.

Da ferner mit jedem Molekul eine ganze Ebene dieselbe Bewegung theilt, so giebt es eine Reihe einander paralleler, unter sich gleich weit abstehender Ebenen, in denen die Verschiebungen gleich und in demselben Sinne geschehen sind. Die bewegten Massen zwischen je zwei auf einander folgenden dieser Ebenen nennt man (ebene)

Wellen und die constante Entfernung derselben die Wellenlänge des Systems.

Die Schwingungs- (Polarisations-) Richtung ist in je zweien der drei Wellensysteme der bezüglichen Wellen-Ebene nahe parallel, in dem dritten daher nahe senkrecht auf derselben. Das letzte System liefert keine Resultate, die optischen Erscheinungen entsprechen, und wird daher als nicht auf den Gesichtssinn wirkend angenommen, so dafs nur die beiden andern in der Optik zu betrachten bleiben.

Um sich ein Bild von den relativen gleichzeitigen Verschiebungen in den beiden lichterregenden Wellensystemen zu machen, denke man sich (Fig. 1.) unter 1, 1; 2, 2; 3, 3; etc. einige der parallelen äquidistanten Ebenen, in denen die Verschiebungen gleich sind, und zwar mögen es diejenigen sein, in denen zu der betrachteten Zeit die Theilchen durch die Lage ihres Gleichgewichts gehen; ferner möge ae die Normale des Systems, und die Ebene der Figur diejenige Ebene sein, in welcher die Schwingungen vor sich gehen. Alsdann liegen die Theile, welche im Zustande des Gleichgewichts in der Normale ae lagen, in der krummen Linie $a\alpha\beta b\gamma\delta c$.. In dem nächstfolgenden Moment haben die Theilchen ihre Stellung sämmtlich geändert, und wenn man die Richtung der Fortpflanzung sich von e nach a gehend denkt, so treten die zunächst unter a, b, c, d, e in der krummen Linie liegenden Theilchen in die Normale ae, die Theilchen in a, b, c, d, e selbst rücken nach rechts hin, so dafs die Theile der Schlangenlinie ae in die Lage der Schlangenlinie mn gerückt sind. Wären daher die Linien sichtbar, in denen sich die Theilchen befinden, die während des Gleichgewichts in der Richtung einer Normale sich befanden, so würde die sich fortpflanzende Bewegung einer rückwärts sich längs der Normale verschiebenden Schlangenlinie gleichen.

Ist T die Dauer einer Schwingung, und zu einer bestimmten Zeit die Bewegung in e (Fig. 1.) angelangt, so dafs das Theilchen e eben im Begriff steht, aus der Normale

herauszurücken, so kann das ihm correspondirende nächste Theilchen *d* erst in dem Momente seine Lage verlassen, wenn *e* von neuem die entsprechende Bewegung macht, d. h. von neuem nach rechts hin durch die Normale gehen will.

Da dieses nach Verlauf der Zeit *T* geschieht, so braucht die Bewegung, um von *e* nach *d* zu kommen, die Dauer einer Schwingung. Eben deswegen langt die Bewegung nach der Zeit 2 *T* in *c*, nach der Zeit 3 *T* in *b* u. s. w. an. Die Wellenlänge (*de*) hängt somit 1) von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ab (sie steht nämlich mit ihr in geradem Verhältnifs), 2) von der Oscillationsdauer (mit der sie in umgekehrtem Verhältnifs steht).

Ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen (bei derselben Oscillationsdauer, d. h. bei derselben Farbe des Lichtes) verschieden, so werden die Ebenen 1,1; 2,2; etc. ihre Entfernung mit der Richtung von *ae* zugleich ändern, folglich hängt die Wellenlänge bei einer und derselben Farbe von der Richtung der auf der Well-Ebene senkrecht zu denkenden Lichtverbreitung ab. Aendert sich ferner bei constanter Richtung der Normale *ae* die Oscillationsdauer, wie es in den Wellensystemen stattfindet, die verschiedenen Farben angehören, so ändern sich gleichfalls die Wellenlängen *ab*, *bc* etc., und mit ihnen zugleich natürlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Herrscht nur die einer einzigen Farbe angehörende Bewegung, so ist die Wellenbewegung einfach, und das resultirende Licht heifst homogenes (einfachfarbiges) Licht. Treten die Bewegungen mehrerer zusammen, so lagern sich eben so viel solcher Systeme über einander, und das Licht zeigt eine Farbe, die aus den einfachen Farben der einfachen Systeme zusammengesetzt ist. Wirken alle Systeme zusammen, so erscheint das Licht weifs. Treten Kräfte hinzu, welche auf ungleich schnelle Wellenbewegungen ungleich wirken, so dafs die ursprünglich über einander gelagerten Wellensysteme aus einander treten, so erscheint jede der im weifsen Licht enthaltenen Farben ein-

zeln, ein Phänomen, welches man mit dem Namen Farbenzerstreuung oder Dispersion belegt.

Um die Wellenbewegung im homogenen Lichte weiter zu verfolgen, muſs man die Constitution des Aethers näher bestimmen. Nimmt man dieselbe so an, daſs die Wirkungen der anziehenden und abstoſsenden Kräfte (Elasticitätskräfte) gleich sind in je acht Wellen-Ebenen, deren Normalen mit drei bestimmten auf einander senkrechten Richtungen, die man Axen doppelter Brechung oder Elasticitätsaxen nennt, gleiche Winkel bilden, so entsprechen die Resultate den Erscheinungen in den 2 und 2gliedrigen Krystallen *). Man nennt diese Krystalle optisch zweiaxig.

Nimmt man die Vertheilung des Aethers so an, daſs die Elasticitätskräfte nur in den Wellen-Ebenen verschieden wirken, deren Normalen verschieden geneigt sind gegen eine feste Linie, die man Hauptaxe der Doppelbrechung nennt, so stimmen die Resultate mit den Erscheinungen in den 4gliedrigen und 6gliedrigen Krystallen **). Man nennt diese Krystalle optisch einaxig. Sie haben also

---

*) Die zwei und zweigliedrigen Krystalle, die man auch ein und einaxig oder ungleichaxig (auch wohl prismatisch) nennt, sind diejenigen, deren Flächen symmetrisch gegen drei bestimmte auf einander senkrechte Richtungen (Krystallaxen genannt) liegen, so daſs jeder Fläche, deren Normale mit diesen Richtungen irgend welche Winkel bildet, in jedem der andern 7 Räume, welche durch die Ebenen der Axen abgeschnitten werden, eine Fläche entspricht, welche mit den Axen genau dieselben Winkel bildet. Die Flächen sind daher in ihnen zu 8 gruppirt (wenn nicht im besondern Falle mehrere in eine Ebene fallen). Die Krystallaxen sind zugleich die Richtungen der Axen der Doppelbrechung.

**) Die 4gliedrigen Krystalle, auch 2 und 1axige oder Krystalle des Pyramidal-Systems genannt, unterscheiden sich von den 2 und 2gliedrigen darin, daſs zwei von den Krystallaxen in Bezug auf die Lage der Krystallflächen sich gleich verhalten, in der Art, daſs jede der Gruppen von 8 symmetrischen Flächen, wie sie bei den 2 und 2gliedrigen vorkommen, das Dasein einer zweiten ähnlichen Gruppe fordert, die gegen die eine der gleichen Axen so liegt, wie die erste Gruppe gegen die zweite Axe.

Die 6gliedrigen Krystalle unterscheiden sich von ihnen nur dadurch, daſs statt der 2 gleichen Axen drei auf der ungleichen Axe senkrecht ste-

gleichsam unzählig viel gleichwerthige Axen doppelter Brechung, die auf der (ungleichwerthigen) Hauptaxe senkrecht stehen.

Denkt man sich endlich die Aethertheilchen so vertheilt, daſs die Elasticitätskräfte für jede Lage der Wellen-Ebenen gleich wirken, so stimmen die Resultate mit den Erscheinungen in den einfach brechenden Mitteln, nämlich in den unkrystallinischen und denen des regulären Krystallsystems *).

Im letztern Falle wird das Polarisations-Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid, dessen Rotationsaxe mit der Normale der jedesmaligen Wellen-Ebene zusammenfällt. Die Schwingungsrichtung der beiden lichterregenden Wellensysteme fällt genau in die Ebene der Welle, und da die Geschwindigkeit wegen der Gleichheit der Aequatorialaxen in beiden gleich ist, so setzen sie sich zu einem einzigen Systeme zusammen. Die hierdurch bedingte Existenz eines einzigen Wellensystems ist der Grund der im nächsten Abschnitt abgehandelten einfachen Brechung.

Die Gleichung des Ellipsoids der zweiaxigen Krystalle, welche die des Ellipsoids der einaxigen und der einfach brechenden Mittel als spezielle Fälle in sich schlieſst, lehrt unmittelbar, daſs von den zwei und zwei zusammengehörigen Wellen-Ebenen stets die eine, wenn ihre Normale mit einer der Axen der doppelten Brechung coincidirt, das Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit erreicht. Ist näm-

---

hende und unter sich Winkel von 60° bildende Axen treten, die sich gleich verhalten, so daſs jeder Fläche zwei zwölfflächige Gruppen entsprechen.

*) Das reguläre Krystallsystem, auch gleichaxiges oder Tesseralsystem genannt, unterscheidet sich vom 2 und 2gliedrigen dadurch, daſs die Krystallflächen sich gegen alle drei Axen gleich verhalten, so daſs jeder achtflächigen symmetrischen Gruppe im Allgemeinen fünf andere ähnliche Gruppen entsprechen. Sind z. B. α, β, γ die Winkel, welche die Normalen einer Flächengruppe beziehlich mit den Krystallaxen a, b, c bilden, so sind die Winkel, welche die Normalen der fünf andern Gruppen mit denselben Axen bilden, beziehlich

$$\alpha, \gamma, \beta;\ \beta, \alpha, \gamma;\ \beta, \gamma, \alpha;\ \gamma, \alpha, \beta;\ \gamma, \beta, \alpha.$$

lich π die gröfste, μ die kleinste Geschwindigkeit der Wellen-Ebene in einem Krystall, so hat längs der einen Axe (d. h. wenn die Normale der primitiven Wellen-Ebene in diese Axe fällt) das eine Wellensystem die Geschwindigkeit μ, das andere eine mittlere Geschwindigkeit ν, längs der zweiten Axe das eine die Geschwindigkeit π, das andere ν, längs der dritten Axe das eine π, das andere μ zur Geschwindigkeit. Man nennt π, μ, ν die Werthe der Elasticitätsaxen in der eben aufgeführten Folge.

Ferner nennt man die durch je zwei Elasticitätsaxen gehenden Ebenen Hauptschnitte. In Bezug auf dieselben findet sich, dafs, wenn die Normale einer ebenen Welle in einen derselben fällt, entweder (nämlich in dem einen Wellensystem) die Schwingungsrichtung dem Hauptschnitte parallel ist, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich nicht mit der Lage der Normale in der genannten Ebene ändert — oder (nämlich in dem andern Wellensystem) die Schwingungsrichtung senkrecht auf dem Hauptschnitte steht, und die Geschwindigkeit dem umgekehrten Werthe des in der Richtung der Normale liegenden Radius Vector einer Ellipse entspricht, deren Axen mit den Elasticitätsaxen des Hauptschnittes dem Werthe und der Richtung nach zusammenfallen.

In einaxigen Medien ist jede durch die Hauptaxe gehende Ebene ein Hauptschnitt, so dafs alle auf derselben senkrechte Richtungen sich wie (gleichwerthige) Elasticitätsaxen verhalten. Daher liegen die Normalen aller denkbaren Wellen-Ebenen in einem Hauptschnitte, und da alle durch die Hauptaxe gehenden Hauptschnitte sich durch nichts unterscheiden, so hat die eine von je zwei coordinirten Wellen-Ebenen überall, in welcher Richtung sie auch liegen mag, dieselbe Geschwindigkeit, und ihre Schwingungsrichtung liegt in dem betreffenden Hauptschnitte.

Man nennt das dieser Wellen-Ebene entsprechende System gewöhnliches Wellensystem; das andere System, in welchem die Schwingungen senkrecht gegen den Hauptschnitt geschehen, und dessen Geschwindigkeit veränderlich ist, ungewöhnliches Wellensystem.

Die Gleichung des Ellipsoids läſst sich, wenn man auf einige sehr unbedeutende Differenzen nicht achtet, in zwei Factoren zerlegen, deren einer die Geschwindigkeit des dritten Wellensystems, welches oben ausgeschieden wurde, der andere die Geschwindigkeit der beiden andern (lichterregenden) Wellensysteme liefert.

Die beiden letzten Geschwindigkeiten lassen sich auch vorstellen als die auf einander senkrechten Axen einer Curve, die man erhält, wenn man eine Fläche, die Fresnel Elasticitätsfläche nannte, von einer durch den Mittelpunkt derselben der respectiven Wellen-Ebene parallel gelegte Ebene schneiden läſst.

Die Gleichung der Elasticitätsfläche ist:

$$\varrho^2 = m^2\mu^2 + n^2\nu^2 + p^2\pi^2,$$

wo ϱ der Radius Vector der Fläche vom Mittelpunkt aus, und m, n, p die Cosinus der Winkel zwischen demselben und den 3 Axen der doppelten Brechung sind. Die Schwingungsrichtung der Wellen-Ebene steht senkrecht auf derjenigen Axe des Schnitts, welcher ihre Geschwindigkeit repräsentirt.

In zwei bestimmten Lagen der Ebene der Welle werden diese Schnitte Kreise, und zwar liegen die Normalen derselben in der Ebene der Axen π und μ, und so, daſs diese Axen die Winkel zwischen beiden halbiren. Die Richtungen dieser Normalen, in welchen beide Wellensysteme wegen der Gleichheit der Axen des Schnittes gleiche Geschwindigkeit (ν) bekommen, also nur ein Wellensystem geben, heiſsen optische Axen.

Ist $2n$ derjenige Winkel zwischen den optischen Axen, welcher von der Elasticitätsaxe π halbirt wird, so ist

$$tang^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}.$$

Nach der Gröſse des Winkels n theilt man die zweiaxigen Krystalle in positive und negative. Man nennt sie nämlich positiv, wenn $n > 45^0$, negativ, wenn $n < 45^0$ ist.

In den einaxigen Medien fallen diese optischen Axen in eine einzige zusammen, und zwar entweder in die Rich-

tung der Axe μ (alsdann heifst der Krystall positiv), oder in die Richtung der Axe π (alsdann heifst der Krystall negativ); in jedem Fall ist es aber die oben als Hauptaxe des Krystalls bezeichnete Richtung.

Die einhüllende Fläche aller Wellen-Ebenen bildet, wie schon bemerkt, die Wellenfläche, die wegen der Existenz zweier combinirter Wellensysteme aus zwei in einander geschlungenen Flächenzweigen besteht, welche in Verein einen völlig geschlossenen Raum abgrenzen.

Ihre Gleichung ist:

$$\frac{\mu^2 x^2}{r^2-\mu^2}+\frac{\nu^2 y^2}{r^2-\nu^2}+\frac{\pi^2 z^2}{r^2-\pi^2}=0,$$

wo $r^2 = x^2+y^2+z^2$ ist.

In den einaxigen Krystallen besteht diese Wellenfläche aus einer Kugelfläche und einem dieselbe in 2 Punkten berührenden Rotations-Ellipsoid. In den einfach brechenden Mitteln fallen diese beiden Flächen in eine Kugelfläche zusammen.

Von den beiden Strahlen, welche zusammengehörigen (d. h. gleiche Richtung der Normalen habenden) Well-Ebenen entsprechen, nennt man den einen den gewöhnlichen, den andern den ungewöhnlichen Strahl. Sie fallen natürlich nur dann mit den Normalen der Well-Ebenen zusammen, wenn die zugehörige Tangential-Ebene der Wellenfläche auf dem Radius Vector (Strahl) senkrecht steht, also 1) durchgängig in den einfach brechenden Mitteln, 2) in den einaxigen Mitteln bei den der Kugelfläche entsprechenden (den gewöhnlichen) Strahlen, 3) bei den Strahlen, die in die Richtung der Elasticitätsaxen fallen.

Die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung in den Richtungen der beiden zusammengehörenden Strahlen lassen sich darstellen als die Axen der Schnittfigur, welche entsteht, wenn man ein Ellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\nu^2}+\frac{z^2}{\pi^2}=1$$

ist, von einer durch den Mittelpunkt gelegten und auf dem resp. Strahl senkrechten Ebene schneiden läfst.

Fällt die Schnitt-Ebene, die einem Strahl correspondirt, mit einem der beiden Kreisschnitte dieses Ellipsoids zusammen, so haben beide Strahlen gleiche Geschwindigkeit. Die Normalen dieser Kreisschnitte, die in der Ebene der optischen Axen liegen, heifsen scheinbare optische Axen, deren Winkel gleichfalls von den Axen π und μ halbirt wird. Ist dieser Winkel $2n'$, so ist

$$tang^2 n' = \frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}}.$$

Die Ebene, welche durch den Strahl und die Schwingungsrichtung in demselben geht, nennt man Polarisations-Ebene des Strahls. Diejenige Ebene dagegen, welche durch die Normale eines Systems ebener Wellen und die Schwingungsrichtung geht, heifst Polarisations-Ebene der Wellen-Ebene desselben. Die Lage der letzteren läfst sich nach folgender Regel bestimmen: Wenn man durch die Normale der zum Wellensysteme gehörigen Well-Ebene und die optischen Axen Ebenen legt, so sind die beiden Ebenen, welche den spitzen und den stumpfen Winkel zwischen diesen Ebenen halbiren, die Polarisations-Ebenen, und zwar ist diejenige Halbirungs-Ebene, welche durch den spitzen Winkel der optischen Axen hindurchgeht, die Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Strahls; die zwischen den Schenkeln des stumpfen Winkels der optischen Axen hindurchgehende, die des ungewöhnlichen Strahls.

Ist der Krystall einaxig, so fällt natürlich die erste Ebene in den Hauptschnitt der Normale des gewöhnlichen Strahls, die zweite steht senkrecht auf dem Hauptschnitt der Normale des ungewöhnlichen Strahls.

Ist o die Geschwindigkeit der gewöhnlichen Well-Ebene, e die der ungewöhnlichen, sind ferner u und u' die Winkel der Normale derselben mit denjenigen optischen Halb-Axen, welche ihren spitzen Winkel einschliefsen, so ist

$$o^2 = \frac{\pi^2+\mu^2}{2} \pm \frac{\pi^2-\mu^2}{2} \cos(u-u')$$

$$e^2 = \frac{\pi^2+\mu^2}{2} \pm \frac{\pi^2-\mu^2}{2} \cos(u+u'),$$

wo das (+) oder (—) Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Krystall positiv oder negativ ist.

Ist δ der Winkel der Normale des Strahls mit der optischen Axe in einaxigen Krystallen, so ist, wenn dieselben positiv sind,

$$o^2 = \pi^2,\quad e^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \pi^2)\cos^2\delta,$$

wenn dieselben negativ sind,

$$o^2 = \mu^2,\quad e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2\delta.$$

Aus den Formeln, welche die Abhängigkeit der Geschwindigkeiten in der Richtung des Strahls von den Geschwindigkeiten längs der Normale der Wellen-Ebene ausdrücken, geht hervor, dafs zu einer ebenen Welle, welche mit einem der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche zusammenfällt, eine unendliche Zahl von Strahlen gehört, die eine Kegelfläche bilden. Diese Strahlen schneiden aus der Wellenfläche einen Kreis heraus, dessen Ebene senkrecht auf der Ebene der optischen Axen steht, dessen Mittelpunkt in dieser letzten Ebene liegt, und dessen Peripherie durch die eine optische Axe geht.

Wenn auf der andern Seite der Strahl mit der Normale eines der Kreisschnitte des Ellipsoids, welches die Geschwindigkeit der Strahlen bestimmt, coincidirt, so giebt es eine unendliche Zahl zugehöriger Wellen-Ebenen, deren Normalen eine elliptische Kegelfläche bilden, deren Axe in der Ebene der optischen Axen liegt.

Der Kreisschnitt der Kegelfläche steht senkrecht auf der Ebene der optischen Axen, und von den beiden Normalen, die in der letztgenannten Ebene liegen, ist die eine die scheinbare optische Axe, die zweite steht senkrecht auf der Kreis-Ebene.

Diese beiden Erscheinungen sind der Grund der sogenannten konischen Refraction.

Um sich die Beziehungen der beiderlei optischen Axen

und der konischen Strahlung zu der Form der Wellenfläche deutlich zu machen, bemerke man noch Folgendes:

Die Coordinaten-Ebenen werden, wenn man dieselben mit denen der Axen der doppelten Brechung zusammenfallen läfst, von der Wellenfläche in einem Kreise und einer Ellipse geschnitten, so dafs der Kreis im Allgemeinen dem einen Strahl, die Ellipse dem andern Strahl entspricht. Es seien (Fig. 2.) ox, oy, oz die drei Halbaxen, die Ebenen xz, xy, yz also die Hauptschnitte, ferner sei $o\mu = o\mu' = \mu$, $o\nu = o\nu'' = o\nu''' = \nu$, $o\pi' = o\pi'' = \pi$. Alsdann stellt $\mu\mu'$ den Kreisdurchschnitt, $\nu\pi'$ den elliptischen Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene yz vor; $\pi'\pi''$ den Kreisdurchschnitt, $\mu'\nu''$ den elliptischen Durchschnitt mit der Ebene xy; endlich $\nu''\nu$ den Kreisdurchschnitt, $\pi''\mu$ den elliptischen Durchschnitt mit der Ebene xz. Jede von o ausgehende Linie, z. B. ow, ist die Richtung eines Strahlenpaares, und schneidet im Allgemeinen die Wellenfläche in zwei Punkten u und w. ou stellt alsdann die Geschwindigkeit des einen, ow die des andern Strahls vor. Die Strahlen, welche den Kreisdurchschnitten $\pi'\pi''$, $\mu\mu'$, $\nu\nu''$ angehören, haben gleiche Geschwindigkeit, die beziehlich π, μ, ν ist; die Strahlen, welche den elliptischen Durchschnitten angehören, haben eine Geschwindigkeit, die sich durch denjenigen Radius Vector der Ellipse darstellen läfst, welcher in der Richtung des resp. Strahls liegt. Die Ebene xz, in welcher allein die Zweige der Wellenfläche sich schneiden, ist die Ebene der optischen Axen, und zwar ist der nach dem Durchschnittspunkt ν''' gehende Strahl $o\nu'''$ die eine der scheinbaren optischen Axen, folglich $\nu'''o\nu$ der oben mit n' bezeichnete Winkel.

Die Wellen-Ebenen sind die Tangential-Ebenen an den Zweigen der Wellenfläche, ihre Geschwindigkeiten die senkrechten Abstände vom Centrum o (vorausgesetzt, dafs die Wellenfläche der Ankunftsort der Bewegungen nach der Zeiteinheit ist, die Zeit vom Anfang der Bewegung an gerechnet).

Sind die auf dem Strahl ow senkrechten Berührungs-

Ebe-

Ebenen, welche an die beiden Zweige $\pi'\pi''$ und $\mu'\nu''$ der Wellenfläche gelegt sind: *wi* und *hk*, so sind *ow* und *oh* die Strahlen der zu *ow* und *ou* gehörigen Well-Ebenen, also der eine ein gewöhnlicher, der andere der dazu gehörige ungewöhnliche Strahl. Sind ferner *un*, *wi* Tangential-Ebenen an den Punkten *u* und *w*, und *og* senkrecht auf *un*, so sind *og* und *ow* die Normalen der zwei Wellen-Ebenen, welche zu den Strahlen *ou* und *ow*, die gleiche Richtung haben, gehören.

Sollen daher ein gewöhnliches und ein ungewöhnliches System ebener Wellen, d. h. solcher, die eine gemeinschaftliche Normale haben, dieselbe Geschwindigkeit besitzen, so müssen die zugehörigen Tangential-Ebenen beide Zweige berühren.

Dies ist für Punkte der Coordinaten-Ebenen nur in der Ebene *xz* möglich. Ist *ab* die gemeinschaftliche Tangente der Linien $\nu\nu''$ und $\mu\pi''$ (deren Berührungspunkte *s* und *t* seien), so geht durch *ab* eine gemeinschaftliche Berührungs-Ebene, und zwar ist dieselbe, wie sich aus der Gleichung der Wellenfläche ergiebt, parallel $o\pi'$, so dafs *os* die Normale derselben, mithin eine der wahren optischen Axen und der Winkel *sov* der oben mit *n* bezeichnete ist. Mag nun $s\nu'''t$ der Durchschnitt einer durch ν''' gehenden Furche oder der Durchschnitt einer trichterförmigen Vertiefung der Wellenfläche sein, so werden sich über diese Furche oder Vertiefung unzählig viel gemeinsame Tangential-Ebenen legen lassen, und es wird sonach eine unzählige Menge wahrer optischen Axen geben. Allein alle diese Tangential-Ebenen fallen der Wellenform zufolge in eine einzige (in die durch *ab* gehende auf *xz* senkrechte) Ebene zusammen, so dafs diese die Wellenfläche nicht in zwei, sondern in unzählig vielen Punkten berührt. Diese Berührungspunkte liegen in einem Kreise, dessen Durchmesser *st* ist. Jedem Berührungspunkt entspricht ein Strahl; die Normalen der Well-Ebenen aller dieser Strahlen (die unendlich vielen optischen Axen) fallen aber in eine einzige, *os*, zusammen. Daher der zu einer einzigen Well-Ebene gehörige S t r a h l e n k e g e l.

Der Einsprung bei v''' rührt von einer trichterförmigen Vertiefung (nicht von einer Furche) her; daher gehen durch v''' unzählig viele verschiedene Tangential-Ebenen, welche den Trichter an seinem Scheitel einhüllen, und denen der einzige Strahl ov''' zugehört. Die Normalen der Tangential- oder Well-Ebenen bilden einen Konus, der durch ov''' geht, da ov''' zugleich eine Normale des Kreisdurchschnitts vv'' ist. Wenn (Fig. $2a$) cd diejenige Tangente ist, welche die Ellipse $\mu\pi''$ in v''' berührt; und oi senkrecht auf cd steht, so ist oi die der Seite ov''' entgegengesetzte äufserste Seite des (elliptischen) Konus der Normalen. Der Durchschnitt des Kegels iv''' ist ein Kreis. Die übrigen Seiten der Kegelfläche liegen also aufserhalb der Ebene xz, und die Normale ov''' gehört zur geschwindesten, oi zur langsamsten der Wellen-Ebenen, welche den Strahl ov''' gemein haben.

Um zu bestimmen, welche Strahlen die gewöhnlichen, und welche die ungewöhnlichen sind, bemerke man, dafs die Polarisations-Ebenen der den Kreisdurchschnitten entsprechenden Strahlen die respectiven Hauptschnitte, und dafs die den elliptischen Durchschnitten entsprechenden Strahlen senkrecht darauf polarisirt sind.

Nun sei der Krystall positiv, also Fig. 2. $sov > 45°$, und $so\pi''$ die Hälfte des spitzen Winkels, den die optischen Axen mit einander bilden. Die Polarisations-Ebene der Wellen-Ebenen, deren Normalen nach den Punkten des Kreises $\pi'\pi''$ gehen, ist alsdann der Hauptschnitt xy, und geht daher durch den spitzen Winkel der optischen Axen; die Wellensysteme sind also gewöhnliche, während die nach der Ellipse $\mu'v''$ gehenden darauf senkrecht polarisirt, also ungewöhnliche Wellensysteme sind. In dem Hauptschnitt yz dagegen, da derselbe durch den stumpfen Winkel der optischen Axen geht, sind die dem Kreise $(\mu\mu')$ angehörenden Strahlen ungewöhnliche, die der Ellipse angehörenden gewöhnliche Strahlen.

Was den dritten Hauptschnitt xz betrifft, welcher in Figur 3. besonders dargestellt ist, wo os und os_1 die bei-

den optischen Axen vorstellen, welche den spitzen Winkel sos_1 bilden, so treten Unterschiede ein, je nachdem die Normale der Well-Ebenen in dem spitzen oder dem stumpfen Winkel der optischen Axen liegt. Liegt sie in dem stumpfen, wie z. B. or, so fällt die Ebene, welche durch or und os, mit der Ebene, welche durch or und os_1 geht, zusammen, und der Winkel beider Ebenen (srs_1), dessen durch den spitzen Winkel sos_1 gehende Halbirungs-Ebene die Lage der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Systems bestimmen sollte, wird gleich Null, so dafs der Hauptschnitt selbst diese Polarisations-Ebene ist. Liegt aber die Normale in dem spitzen Winkel der optischen Axen, wie ot, so wird der genannte Winkel gleich $sts_1 = 180^0$, und die auf xx durch ot senkrecht gehende Ebene ist die Polarisations-Ebene des gewöhnlichen, mithin der Hauptschnitt die des ungewöhnlichen Systems. Nun liegen aber die Normalen der Tangenten (und somit der Well-Ebenen), welche zum Kreise $vv''v_1$ gehören, für die Punkte zwischen v und s, und zwischen v_1 und s_1 in dem stumpfen Winkel, für die Punkte zwischen s und s_1 in dem spitzen Winkel der optischen Axen; ferner liegen die Normalen der an die Ellipse $\mu v'''\mu_1$ gezogenen Tangenten für die Punkte zwischen μ und t, und zwischen μ_1 und t_1 in dem stumpfen Winkel, für die Punkte zwischen t und t_1 in dem spitzen Winkel der optischen Axen. Es sind daher die nach den Punkten zwischen v und s, t und t_1, s_1 und v_1 gehenden Strahlen gewöhnliche, die nach den Punkten zwischen μ und t, s und s_1, t_1 und μ_1 gehenden, ungewöhnliche Strahlen, vorausgesetzt, dafs die angegebene Construction der Polarisations-Ebene streng richtig ist.

Man sieht demnach, dafs die gewöhnlichen Strahlen in den Hauptschnitten durchgängig eine gröfsere Geschwindigkeit haben, als die ungewöhnlichen.

Dafs sich Alles umkehren müsse, wenn der Krystall negativ ist, d. h. wenn vos die Hälfte des spitzen Winkels der optischen Axen ist, übersieht man leicht.

Dafs auch aufser den Hauptschnitten die gewöhnlichen

Strahlen in den positiven Krystallen eine gröfsere, in den negativen eine geringere Geschwindigkeit haben, als die ungewöhnlichen, läfst sich leicht folgendermafsen beweisen.

Es seien in der Figur (4.) *abcd* der Durchschnitt der Elasticitätsfläche eines positiven Krystalls mit der Ebene der optischen Axen, *ac* und *bd* die Durchschnittslinien ihrer Kreisschnitte, $n_1 n_3$ und $n n_2$ die darauf senkrechten optischen Axen, deren spitzer Winkel $n o n_1$ von der kleinsten Elasticitätsaxe $\mu\mu'$, und deren stumpfer Winkel $n_1 o n_2$ von der gröfsten Elasticitätsaxe $\pi\pi'$ halbirt wird. Die Kreisschnitte theilen die Elasticitätsfläche in vier (spindelförmige) Zweiecke, von denen zwei, nämlich *doc* und *aob*, bei *o* spitzwinklig sind, und nur Radii Vektoren enthalten, deren Länge zwischen π und ν liegt, während die zwei andern *aod* und *boc* bei *o* stumpfwinklig sind, und nur Radii Vektoren enthalten, deren Länge zwischen μ und ν liegt.

Denkt man sich nun durch *o* irgend eine Well-Ebene gelegt, so sind die Axen ihres Durchschnittes mit der Elasticitätsfläche den Geschwindigkeiten des gewöhnlichen und ungewöhnlichen ebenen Wellensystems gleich; die durch die Normale derselben und die gröfste Axe des Schnittes gehende Ebene ist die Polarisations-Ebene desjenigen Systems, welches die kleinere Geschwindigkeit hat, und die durch die Normale und die kleinste Axe gehende Ebene die des geschwinderen Systems.

Nun sei *rs* der Repräsentant der Durchschnittslinie derjenigen Well-Ebenen, welche die Elasticitätsfläche zwischen *dc* und *ab* schneiden, mit der Ebene der optischen Axen. Die Projection ihrer Normale fällt in den spitzen Winkel $n o n_1$, die gröfste Axe des Schnittes liegt in der Nähe von *cd* im spitzwinkligen Zweieck, und ihre Länge ist zwischen π und ν enthalten. Die kleinste Axe, deren Werth zwischen ν und μ liegt, befindet sich im stumpfwinkligen Zweieck (wenn sie nicht etwa in die Elasticitätsaxe ν selber fällt); die durch die letztere und die Normale gehende Ebene geht also zwischen n und n_1 hindurch, ist daher die Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Wellensystems,

und entspricht einer Geschwindigkeit, welche $> \nu$ und $< \pi$ ist, während die ungewöhnliche Well-Ebene eine zwischen μ und ν liegende (nämlich die durch die kleinste Axe des Schnitts bestimmte) Geschwindigkeit hat

Es sei ferner *tu* der Repräsentant der Durchschnittslinie einer Well-Ebene, welche die Elasticitätsfläche zwischen *ad* und *cb* schneidet. Die Projection ihrer Normale fällt also zwischen $n \pi n_3$ oder $n_1 \pi' n_2$; die gröfste Axe des Schnittes fällt in die spitzwinkligen Zweiecke, und ihr Werth also zwischen ν und π; die kleinste Axe des Schnittes fällt in die stumpfen Zweiecke, und ihr Werth zwischen ν und μ. Liegt die Normale der Well-Ebene, welche durch *om* vorgestellt sei, z. B. unterhalb der Ebene der Figur, so liegt die gröfste Axe des Schnittes oberhalb derselben, und zwar links von der durch *om* und durch die in *o* vertikal stehende mittlere Elasticitätsaxe ν gelegte Ebene, welche die Figur links von *on* (etwa in *e*) schneidet. Die durch jene gröfste Axe und *om* gehende Ebene, die Polarisations-Ebene des langsameren Wellensystems, durchschneidet daher den stumpfen Winkel der optischen Axen, gehört dem ungewöhnlichen Wellensystem an, und hat zur Geschwindigkeit einen zwischen μ und ν liegenden Werth, während die Geschwindigkeit des anderen, gewöhnlichen Systems den durch die gröfste Axe bestimmten, zwischen ν und π liegenden Werth hat.

Die Geschwindigkeit sämmtlicher gewöhnlichen Wellensysteme ist also zwischen den Grenzen π und ν, die der ungewöhnlichen zwischen den Grenzen μ und ν eingeschlossen.

Das Umgekehrte würde man gefunden haben, wenn man einen negativen Krystall zum Grunde gelegt hätte.

Wird $\nu = \pi$, also das Mittel positiv einaxig, so rückt in Fig. 2. ν'', also auch ν''' nach π'', und es bildet sich die Figur 5. Der eine Zweig der Wellenfläche rückt in den andern hinein, so dafs die Continuität beider Zweige aufhört, und der innere den äufsern nur in zwei Punkten (in π'' und in dem entsprechenden Punkte der andern Halb-

axe der x) berührt. Mit dem Einsprung bei ν''' hört nothwendig die Bildung der Kegelflächen der Strahlen und der Normalen auf, oder vielmehr die Seitenlinien beider Kegel fallen in die Linie $o\pi''$ (in die einzige optische Axe). Der äufsere Zweig $\pi\pi'\pi''$ wird eine Kugel, und gehört den gewöhnlichen Strahlen an, welche daher die constante Geschwindigkeit $o\pi''=\pi$ haben; der innere Zweig $\mu\mu'\pi''$ ist ein Umdrehungs-Ellipsoid, dessen halbe Rotationsaxe $o\pi''$ ist, und von welchem $o\mu$ und $o\mu'$ die Hälften zweier Aequatorialaxen sind. Er gehört den ungewöhnlichen (und langsameren) Strahlen an. — Der vollständige Durchschnitt der Wellenfläche mit xz ist in Fig. 6. dargestellt.

Wird $\nu=\mu$, also das Mittel negativ einaxig, so rückt in Figur 2. ν und mithin auch ν''' nach μ, und es bildet sich die Figur 7., in der $o\mu$ die optische Axe ist. Der innere Zweig, welcher zum gewöhnlichen (langsameren) Strahl, dessen constante Geschwindigkeit $o\mu=\mu$ ist, gehört, wird eine Kugel, der äufsere Zweig $\mu\pi'\pi''$ ein Umdrehungs-Ellipsoid mit der Rotationsaxe $o\mu$. — Der vollständige Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene xz ist in Fig. 8. dargestellt.

Was die schwingende Bewegung des Aethers innerhalb der Wellenfläche betrifft, so ist dieselbe für die gewöhnlichen Strahlen eines negativ einaxigen Mittels in der Ebene xz in Fig. 9., für die zugehörigen ungewöhnlichen Strahlen in Fig. 10. dargestellt. Die Schlangenlinien bezeichnen den Ort der Aethertheilchen, welche während des Gleichgewichts in den Geraden xx, ac, zz, bd lagen, zu der Zeit, in welcher das im Centrum liegende Theilchen durch seine Gleichgewichtslage geht. In Figur 9. sind die durch die Schlangenlinien angedeuteten Verschiebungen in der Ebene der Figur zu denken, in Figur 10 dagegen in darauf senkrechten durch ac, zz, bd gehenden Ebenen. Nur die in der Richtung xx liegenden Theilchen (in beiden Figuren) setzen wegen der darin gleichwerdenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihre Schwingungsbewegungen zusammen, und die Ebene der zugehörigen Schlangenlinie ist die Ebene, in wel-

cher die Verschiebungen des im Centrum zu denkenden Lichtpunkts erfolgen.

Das Verhältnifs der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiderlei Strahlen unter sich und in Bezug auf ihre Lage in dem betreffenden Medium, sowohl wie die davon abhängige Richtung der Schwingung in denselben, deren Grundgesetze für homogenes Licht in dem Vorigen auszüglich dargestellt sind, bedingt in den betrachteten Mitteln sämmtliche Polarisations-Erscheinungen, und ist lediglich von dem Verhältnifs der Werthe von μ, ν und π abhängig. Dies Verhältnifs ändert sich aber mit der Farbe des Lichts, und zwar verschieden für verschiedene Mittel. Es folgt jedoch aus den allgemeinen Gesetzen der Elasticität, dafs diese Verschiedenheiten in den Aenderungen von einander abhängig sind, dergestalt, dafs man die Werthe von π, μ, ν für die verschiedenen Farbenstrahlen in jedem beliebigen Mittel näherungsweise bestimmen kann, sobald man sie für mehr als einen Farbenstrahl kennt, und sobald diese Werthe für dieselben Farbenstrahlen in anderen Mitteln bekannt sind. Der Grad der Näherung hängt von der Zahl der Farbenstrahlen ab, für welche die Werthe von π, ν, μ in dem fraglichen Mittel durch Messungen gegeben sind. Sind die Werthe für 4 Strahlen gegeben, so läfst sich schon eine Genauigkeit erreichen, welche der Genauigkeit der schärfsten bis jetzt ausgeführten Messungen gleich steht.

Da das Verhältnifs von π, μ und ν sich mit der Farbe des Lichts ändert, so kann das Zerstreuungsverhältnifs, d. h. die absoluten Aenderungen von π, μ, ν, in diesen Constanten so verschieden ausfallen, dafs scheinbare Anomalien hervortreten, indem jene Constanten ihre Stellung in Absicht auf ihre relative Gröfse verändern. So entspricht z. B. im Apophyllit die (einfache) optische Axe für blaues Licht dem gröfseren Werthe π, für rothes Licht dem kleineren Werthe μ, so dafs dieser Krystall für die blauen Strahlen positiv,

für die rothen negativ einaxig, und mithin für einen der zwischen ihnen liegenden Strahlen, in Bezug auf welchen $\pi = \mu$ wird, einfach brechend ist.

Sind in einem zweiaxigen Krystalle a, b, c die Elasticitätsconstanten, welche für einen bestimmten Farbenstrahl den Gröfsen μ, ν, π entsprechen *), so dafs also $c > b$ und $b > a$ ist, so ist es denkbar, dafs für einen andern Strahl $b < a$ wird, so dafs die Ebene der optischen Axen, welche für jenen Strahl in der Ebene ac liegt, für diesen in die Ebene ab zu liegen kommt. Die Ebene der optischen Axen, die einigen Strahlen gemeinschaftlich ist, würde somit auf der der übrigen Strahlen senkrecht stehen, und es gäbe einen Zwischenstrahl (für den $b = a$ ist), in Bezug auf welchen der Krystall einaxig ist.

Das Elasticitätsverhältnifs des Aethers, welches sich in dem Verhältnifs $\mu : \nu : \pi$ ausspricht, hängt offenbar mit dem Cohäsionsverhältnifs zusammen, welches sich in der Krystallform ausspricht. Die Cohäsionsverschiedenheiten verhalten sich zu den Krystall- oder Cohäsionsaxen, wie die Elasticitätsverschiedenheiten des Aethers zu den Elasticitätsaxen. Die Cohäsionskräfte, d. h. die anziehenden und abstofsenden Kräfte der Krystalltheilchen, welche bei dem Akt der Krystallisation deren formgebende relative Stellung durch ihr sich ins Gleichgewicht-Setzen bestimmen, müssen ihre Wirkung ändern, wenn die Theilchen von noch anderen anziehenden und abstofsenden Kräften, z. B. von einem äufseren Druck oder von der Wärme, afficirt werden. Diese vermehren oder vermindern nämlich die Intensität der Cohäsionskräfte durch Annäherung der Theilchen an einander, oder durch Entfernung von einander, und zwar in verschiedenen Richtungen verschieden, wenn die Cohäsionskräfte in denselben verschieden sind — selbst wenn der Druck von allen Seiten gleich, oder die Temperaturveränderung durch das ganze Mittel hindurch dieselbe ist. Es werden

---

*) Ich nenne hier die Elasticitätsconstanten: a, b, c, weil den Buchstaben μ, ν, π schon ein relatives Gröfsenverhältnifs untergelegt worden ist.

sich daher alsdann mit der Formveränderung zugleich die Wirkungen der Elasticitätskräfte, und somit auch das Verhältnifs $\mu : \nu : \pi$ ändern. Den analytischen Untersuchungen, sowie den Erfahrungen zufolge ändern sich indefs hierbei in den bisher betrachteten krystallinischen Medien weder die Richtungen der Cohäsions-, noch die der Elasticitätsaxen. Man wird daher durch Temperaturveränderung in dazu geeigneten Krystallen nur die oben angeführten Erscheinungen, namentlich die Transposition der Ebene der optischen Axen, aber selbst oft für einen und denselben Farbenstrahl hervorbringen können.

Diejenigen Krystalle, welche nicht zu den bisher betrachteten gehören, kann man in optischer Beziehung unsymmetrisch zweiaxige nennen. Sie scheinen sämmtlich mit den symmetrisch zweiaxigen das gemein zu haben, dafs sie gleichfalls drei auf einander senkrechte Elasticitätsaxen und mithin zwei optische Axen haben, die aber im Allgemeinen mit der Natur der Farbe, mit der Temperatur und, was auf dasselbe hinauskommt, mit allseitig gleichem Druck sich ändern. In krystallographischer Beziehung zerfallen sie in zwei Klassen, nämlich in zwei und eingliedrige Krystalle (auch Krystalle des hemiprismatischen, rhombischen oder klinometrischen Systems genannt) und in ein und eingliedrige (auch Krystalle des tetartoprismatischen, rhomboidischen oder triklinometrischen Systems genannt). In diesen scheint kein anderes Symmetriegesetz als das des Flächenparallelismus zu herrschen; in jenen läfst sich allemal eine Ebene denken, in Bezug auf welche alle Krystallflächen symmetrisch vertheilt sind, so dafs ein Krystall, dessen Flächen vollkommen und gleichmäfsig ausgebildet sind, wenn man ihn durch seine Mitte jener Ebene parallel durchschneidet und die Hälften in dieser Schnittfläche um 180° gegen einander verdreht, genau wieder die alte Form erhält. In

diesen letzteren Krystallen scheint durchgängig die eine Elasticitätsaxe für alle Farbenstrahlen und bei jeder Temperatur senkrecht auf jener Ebene der Symmetrie zu stehen, während die andern, obgleich in dieser Ebene stets liegend, ihre Stellung in derselben mit der Farbe und Temperatur ändern. Die unveränderliche Axe ist bei einigen die mittlere, bei andern die gröfste oder kleinste Elasticitätsaxe, während die Temperatur natürlich auch hier Umkehrungen veranlassen kann.

Beim Gyps, Diopsid etc. liegt die Ebene der optischen Axen bei der gewöhnlichen Temperatur in der Ebene der Symmetrie und ist daher unveränderlich; die optischen Axen bilden aber dann nicht mit einer festen, sondern mit einer veränderlichen Geraden gleiche Winkel.

Beim Borax *), Adular, der Weinsäure, dem essigsauren Natron etc. steht die Ebene der optischen Axen senkrecht auf der Ebene der Symmetrie. Die optischen Axen bilden daher in allen Farben gleiche Winkel mit einer festen (auf der Ebene der Symmetrie senkrechten) Richtung, während die Ebenen der optischen Axen selbst für die verschiedenen Farbenstrahlen gegen einander geneigt sind.

Das letztere Verhalten zeigt auch, wie Mitscherlich entdeckte, der Gyps bei erhöhter Temperatur. Diese Entdeckung war zugleich die der Transposition der Ebenen der optischen Axen mit dem Wärmewechsel.

Dieselbe Erscheinung zeigt sich, wie nachher Brewster fand, beim Glauberit, welcher bei der gewöhnlichen Temperatur für violettes Licht einaxig, für die übrigen Farben zweiaxig ist. Bei Verringerung der Temperatur wird der Winkel der optischen Axen für alle Farben grö-

*) Die Veränderlichkeit der Lage der optischen Axen in Bezug auf die verschiedenen Farben wurde von Nörrenberg und Herschel gleichzeitig am Borax entdeckt, und bald darauf folgte die Entdeckung am Gyps von Nörrenberg. — Wie die Lage der optischen Axen erkannt und in ihrer Veränderung verfolgt werden kann, wird bei der Discussion der Interferenz-Erscheinungen mitgetheilt werden.

fser, und die einfache violette Axe theilt sich. Bei Erhöhung der Temperatur theilt sich die letzte Axe in zwei in der darauf senkrechten Ebene; die Axen der übrigen Farben nähern sich zugleich, fallen nach und nach in eine einzige zusammen, trennen sich aber wiederum sogleich nach dem Zusammenfallen in einer Ebene, die senkrecht steht auf derjenigen, in der sie vorher lagen. Noch weit vor der Siedhitze des Wassers ist der Krystall für alle Farben zweiaxig, und zwar liegen die Axen sämmtlich in der neuen Ebene.

Die Transposition für sich ist, nach dem oben Gesagten, auch in symmetrisch zweiaxigen Mitteln möglich. Bei der Transposition in unsymmetrisch zweiaxigen Mitteln, wie im Gyps, verräth sich aber die Variabilität der Elasticitätsaxen π und μ in der Art, wie die optischen Axen ihre Lage ändern. Soll nämlich durch allmälige Temperaturänderung die Ebene der optischen Axen einer bestimmten Farbe sich in die perpendikuläre umsetzen, so müssen sich die optischen Axen allmälig nähern, bis dieselben für einen bestimmten Moment zusammenfallen (im Gyps zwischen 70° und 80° C.), wo also der Krystall für die resp. Farbe einaxig wird, um darauf in der senkrechten Ebene sich wiederum zu trennen. Ist der Krystall unsymmetrisch zweiaxig, so erfolgt die Bewegung der optischen Axen nach der Richtung hin, wo beide zusammenfallen mit ungleicher Geschwindigkeit, ein Umstand, welcher sich beim Gyps vorzüglich deutlich ausspricht.

Der Adular zeigt die Eigenheit, dafs der Winkel $2\varkappa$, d. h. die Neigung der optischen Axen gegen einander, sich von Farbe zu Farbe wenig ändert.

In den ein und eingliedrigen Krystallen, wo durch die Krystallform keine Richtung vor der andern wesentlich ausgezeichnet ist (wie es bei den eben betrachteten noch die Normale auf der Ebene der Symmetrie war), werden alle drei Elasticitätsaxen für verschiedene Farben, sowie höchst wahrscheinlich für dieselbe Farbe bei verschiedenen Temperaturen veränderlich, so dafs sie die Erscheinungen des

Gypses und des Adulars, in Bezug auf die Variabilität der der optischen Axen, vereinigt zeigen.

Denkt man sich die Ebene der Figur 11. horizontal, und als die Ebene der optischen Axen on, on_1; ferner $o\pi$ als die den Winkel non_1 halbirende gröfste Elasticitätsaxe, so wandert im Gyps mit zunehmender Temperatur die Linie $o\pi$ merklich etwa nach $o\pi'$ in der Horizontalebene fort, während gleichzeitig on nach on', on_1 nach on'_1 (in derselben Ebene) rückt, jedoch so, dafs $n'o\pi' = n'_1 o\pi'$ bleibt. Ebenso ist es für die Axen von Farbe zu Farbe.

Ist in Figur 12. $\mu\pi\mu$ die Ebene der optischen Axen on und on_1, und $\mu\mu$, $o\pi$ die Richtung der darin liegenden Elasticitätsaxen für eine bestimmte Farbe bei einer bestimmten Temperatur im Borax oder Adular, so bleibt $\mu\mu$ in unveränderlicher Lage für jede Farbe, während die Ebene $\mu n\pi n_1\mu$ für eine andere Farbe etwa in die Lage $\mu n'\pi' n'_1\mu$ rückt, so dafs die Ebene $\pi o\pi'$ vertikal auf der Ebene der Figur steht, $o\pi'$ die neue Lage von $o\pi$, und on', on_1, die neuen Lagen von on und on_1 sind. Beim Adular ist der Winkel $n'o\pi' = n'_1 o\pi'$ nahe dem Winkel $no\pi$ gleich, während er im Borax merklich von demselben verschieden ist.

In den ein und eingliedrigen Krystallen sind beiderlei Bewegungen zugleich möglich; in Figur 12. braucht also $\pi o\pi'$ nicht mehr vertikal auf $\mu o\pi$ zu stehen, indem sich auch $\mu\mu$ z. B. nach $\mu'\mu'$ verrücken kann, und gleichfalls nicht mehr in der Ebene $\mu o\pi$ zu liegen braucht. Die Winkel $\mu o\mu'$, $\pi o\pi'$ bleiben indefs sowohl bei diesen vollkommen unsymmetrischen, wie bei jenen unvollkommen symmetrischen Krystallen nur gering.

Wenn zwei oder mehrere Strahlen, welche verschiedenen Wellenflächen angehören, einerlei Richtung haben, oder wenn ihre Richtungen sich unter so kleinen Winkeln schneiden, dafs sie als zusammenfallend betrachtet werden können, so müssen die in dieser gemeinschaftlichen Rich-

tung liegenden Moleküle allen Bewegungen gehorchen, die ihnen jeder Strahl einzeln einprägen würde. Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Schwingungsdauer (also die Farbe) in allen dieselbe, so müssen sich daher die Bewegungen zu einer einzigen regelmäſsigen (isochronen) Bewegung zusammensetzen.

Verfolgen wir zuvörderst die Bewegung der Moleküle in der Richtung eines Strahls, wenn nur ein einzelnes Wellensystem erregt ist.

Aus der Gleichung, welche die Bewegung eines Aethertheilchens bestimmt, lassen sich folgende zwei Relationen ableiten:

$$1)\ \xi = \xi_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$2)\ v = \xi_2 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo ξ die Entfernung des Theilchens aus der Gleichgewichtslage in einem einfachen Wellensystem zur Zeit t, T die Oscillationsdauer, und v die Geschwindigkeit des Theilchens zur Zeit t ist, während ξ_0 und ξ_2 einander proportionale Constanten sind, und die Zeit von einem Moment an gerechnet ist, in welchem die Geschwindigkeit des in Rede stehenden Theilchens Null war.

Die gröſste Entfernung aus der Gleichgewichtslage, welche gleich ξ_0 ist, heiſst Schwingungsweite oder Oscillations-Amplitude; die gröſste Geschwindigkeit, welche gleich ξ_2 ist, heiſst Vibrations-Intensität, während v die (veränderliche) Oscillationsgeschwindigkeit heiſst. Der Bogen $2\pi \frac{t}{T}$ heiſst Phase der Schwingung. Intensität des Lichts nennt man die lebendige Kraft, d. h. das Produkt aus der Masse *) in das Quadrat der

*) Unter Masse ist hier die Summe der Massen derjenigen Aethertheilchen zu verstehen, welche zwischen zwei auf einander folgenden Well-Ebenen (dieselben von unendlicher oder gleicher Ausdehnung gedacht) enthalten sind.

Geschwindigkeit. Da man die Dichtigkeit in demselben homogenen Mittel als überall gleich annehmen mufs, so kann man die Masse = 1 setzen, wenn man nur die Intensitäten in verschiedenen Orten desselben Mittels vergleicht, und es ist alsdann ξ_2^2 der Ausdruck für die Lichtintensität.

Denkt man sich in Figur 13. den Radius $ob = \xi_0$, und den Bogen $mb = 2\pi\frac{t}{T}$, so ist $op = \xi_0 \cos 2\pi\frac{t}{T}$, also gleich der Ausweichung (Verschiebung) eines Moleküls zur Zeit t. Ist daher o der Ort, in welchem ein Aethertheilchen zur Zeit des Gleichgewichts liegt, so befindet sich dasselbe nach der Zeit t im Punkte p. Denkt man sich nun den Punkt m in der Peripherie in der Richtung von b nach c, m', a etc. mit constanter Geschwindigkeit*) herumbewegt, so dafs m in der Zeit T einen Umlauf vollendet, so stellt die Bewegung des Fufspunktes p des Perpendikels mp die Bewegung des Aethertheilchens vor. Einen Umlauf, dem Werthe T entsprechend, nennt man eine Undulation. p geht durch die Gleichgewichtslage, wenn m in c oder d anlangt, also wenn $t = \frac{1}{4}T$ oder $= \frac{3}{4}T$ ist, d. h. nach einer ungeraden Anzahl von Viertel-Undulationen, von $t = o$ an gerechnet. Die Ausweichung ist der Schwingungsweite gleich, so oft m durch a oder b geht, d. h. nach jeder ganzen Anzahl halber Undulationen.

Nimmt man dagegen $ob = \xi_2$, so ist $mp = \xi_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}$, also gleich der Geschwindigkeit des Aethertheilchens, und es stellt daher mp diese mit der Zeit wechselnde Geschwindigkeit vor, wenn man sich den Punkt m wie vorher bewegt denkt.

Wirken nun die Bewegungen von zwei nahe zusammenfallenden Strahlen, in denen die Vibrations-Intensitäten gleich und die Schwingungsrichtungen parallel sind, gleich-

---

*) Constant mufs die Geschwindigkeit sein, da der Bogen bm, nämlich $2\pi\frac{t}{T}$ der Zeit t proportional ist.

zeitig auf ein Aethertheilchen, so lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1) Entsprechen die Bewegungen, einzeln genommen, derselben Phase $\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$ oder beträgt der Unterschied eine ganze Anzahl Undulationen (d. h. ist die eine Phase $2\pi\frac{t}{T}$, die andere $2\pi\frac{t+nT}{T}$, unter n eine ganze Zahl verstanden), so entspricht beiden Bewegungen derselbe Punkt m *); beide treiben daher das Theilchen mit einer gleichen Geschwindigkeit mp nach derselben Richtung (in der Figur nach a) hin. Es bewegt sich dasselbe folglich mit doppelter Geschwindigkeit, die Schwingungsweite verdoppelt sich daher gleichfalls, und die Lichtintensität ξ_0^2 steigt auf das Vierfache.

2) Beträgt der Phasenunterschied eine ungerade Anzahl halber Undulationen, d. h. ist die eine Phase $2\pi\frac{t}{T}$, die andere $2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{2n+1}{2}\right)$, so entspricht der einen Bewegung der Punkt m, der andern der Punkt m''. Beide wirken also mit gleicher Geschwindigkeit (mp und $m''p'$), aber in entgegengesetzter Richtung; das Aethertheilchen bleibt daher in Ruhe, und zwar in der Gleichgewichtslage, da die Ausweichungen op und op' einander gleich und entgegengesetzt sind. Dies findet statt, wo sich auch der Punkt m befinden mag, und somit hält die Ruhe an, so lange das Zusammenwirken der Bewegungen dauert. Die Wirkung solcher Aufhebung der Bewegung mufs Dunkelheit sein.

3) Ist der Phasenunterschied ein beliebiger anderer, so dafs zu einer bestimmten Zeit t z. B. die eine Phase bm, die andere $bm+mm_0$ ist, so wirken beide Bewegungen mit im Allgemeinen ungleichen Geschwindigkeiten mp und

*) Da $\sin 2\pi\frac{t}{T}=\sin 2\pi\frac{t+nT}{T}$ und $\cos 2\pi\frac{t}{T}=\cos 2\pi\frac{t+nT}{T}$ ist.

m_0p_1, aber im vorliegenden Fall nach derselben Richtung; die resultirende Geschwindigkeit ist daher zu dieser Zeit größer als bei der Wirkung jeder einzelnen.

Die Ausweichungen (op und op_1) sind dagegen entgegengesetzt; es wird daher das Aethertheilchen zu dieser Zeit zwischen p und p_1 liegen. Rückt m und somit auch m_0 weiter fort, so ändert sich auch mit den Geschwindigkeiten und Ausweichungen die resultirende Geschwindigkeit und die resultirende Ausweichung. Während der Bewegung der Punkte m und m_0 würden dieselben durch eine Lage hindurch gehen, in welcher $moc = com_0$, also $op = op_1$ ist, und wo der Durchgang durch die Gleichgewichtslage o eintritt, welchem die Geschwindigkeit $mp + m_0p_1 = 2mp$ entspricht. Rückt m nach m' und m_0 nach m'', so, daß $m'oa = m''oa$ wird, so heben sich die Geschwindigkeiten $m'p'$ und $m''p'$ auf; es tritt ein momentaner Ruhezustand ein, und die Ausweichung hat ihr Maximum $2op'$ erreicht.

Die resultirende Bewegung des Aethertheilchens, die Vibrations-Intensitäten der einzelnen Schwingungen mögen gleich oder ungleich sein, wenn nur die Polarisationsrichtung dieselbe ist, wird stets wiederum eine Schwingungsbewegung, die sich von den componirenden Bewegungen nur durch die Vibrationsintensität und durch die Zeit des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage unterscheidet, übrigens aber mit ihnen gleiche Schwingungsdauer hat und daher eine gleiche Farbe giebt.

Die Vibrationsintensität und der jedesmalige Ort des Aethertheilchens läſst sich durch folgende Construction bestimmen:

Es sei Figur 14. $ob = om$ die Vibrations-Intensität der einen, $oc = om_1$ die der zweiten Componente, und mp, m_1p_1 die respectiven Geschwindigkeiten zur Zeit t, den Phasen bm und cm_1 entsprechend. Vollendet man mom_1 zu einem Parallelogram omm_2m_1, so ist der durch m_2 mit om_2 als Radius beschriebene Kreis der Phasenkreis der Resultante, $od = om_2$ die Vibrations-Intensität, m_2d die Phase und m_2p_2 die Geschwindigkeit derselben zur Zeit t, und

op,

op, op_1, op_2 sind respective den drei Verschiebungen proportional.

Wie sich dies auf das Zusammenwirken mehrerer Strahlen ausdehnen lasse, und wie sich umgekehrt jede solche Schwingungsbewegung als aus der Wirkung zweier oder mehrerer Strahlen entstanden denken, und wie im letztern Falle sich eine Zerlegung in mehrere Schwingungsbewegungen geometrisch construiren lasse, ist leicht zu übersehen.

Die durch ein solches Zusammenwirken erzeugte Aufhebung, Schwächung und Verstärkung der Bewegung, und somit des Lichteffekts heifst Interferenz des Lichts.

Die Gesammtbewegung der Moleküle, die in der Richtung des Strahls liegen, welche durch Interferenz hervorgebracht wird, läfst sich durch folgende Construction anschaulich machen:

Es sei Fig. 15. die Schlangenlinie *acde* der Ort der Moleküle, welche während des Gleichgewichts in der Richtung des Strahls *ab* lagen, zur Zeit *t*, in Folge der Bewegung des einen Wellensystems. Ein zweites Wellensystem bringe zu derselben Zeit genau dieselbe Bewegung hervor (wenn dasselbe isolirt wirkte). Alsdann ist der resultirende Ort die Schlangenlinie *aklm*, in welcher die auf *ab* senkrechten Ordinaten (die Verschiebungen) doppelt so grofs als in den Componenten sind. Denkt man sich das zweite Wellensystem später erregt, als das erste, so dafs z. B. die Bewegung des ersten schon in *a* angelangt ist, während die des zweiten in *s* beginnt, so sagt man, da *as* gleich der Wellenlänge ist, das erste System sei dem zweiten um eine Wellenlänge voraus.

Gehört die Schlangenlinie *acde* Figur 16. dem ersten System (zur Zeit *t*) an, und *afgh* dem zweiten, so bleiben die Moleküle in der Richtung des Strahls in Ruhe, da die Ordinaten (die Verschiebungen) zu beiden Seiten des Strahls gleich und entgegengesetzt sind.

Denkt man sich das zweite System später erregt als das erste, so dafs etwa die Bewegung, die vom ersten herrührt, schon in *a* ist, während die des zweiten erst in *r*

oder s ist, so sagt man, das erste sei dem zweiten um ein halbe Wellenlänge (ra) oder um drei halbe Wellenlänge (sa) voraus.

Ist endlich Figur 17. $acde$ der Ort der Moleküle in Folge des ersten Systems, $bfgh$ ihr Ort in Folge des zweiten, so ist $aiklm$ ihr Ort in Folge der gleichzeitigen Wirkung beider, indem die Ordinaten der letzten Curve die algebraische Summe der Ordinaten der beiden ersten Curven sind. Denkt man sich das erste System später als das zweite erregt, so dafs die Bewegung des ersten erst in r oder s oder p ist, während die des zweiten schon in b ist, so sagt man, das zweite sei dem ersten um $\frac{n}{m}$ Wellenlänge voraus, wenn br oder bs oder bp gleich $\frac{n}{m}pr$ ist.

Figur 15. stellt ein Beispiel der gröfsten Lichtverstärkung vor, wo die componirenden Systeme um eine ganze Zahl Wellenlängen verschieden sind, und in Folge dessen die Schwingungsweite der Summe derer der Componenten gleich ist. Figur 16. stellt ein Beispiel der Lichtvernichtung vor, wo die componirenden Systeme bei gleicher Vibrations-Intensität um eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen im Gange verschieden sind. Figur 17. stellt eine Lichtverstärkung durch eine Gangverschiedenheit von einer gebrochenen Zahl Wellenlängen vor. Figur 18. ist eine Lichtschwächung durch eine ähnliche Gangverschiedenheit, wo $acde$ dem ersten, $afgh$ dem zweiten, $iklm$ dem resultirenden System angehört.

Sind die zusammenwirkenden Wellensysteme nach verschiedenen Ebenen polarisirt, so lassen sie sich durch zwei auf einander senkrecht polarisirte Systeme ersetzen. Sind beide Systeme in derselben Phase, so wird ein System resultiren, welches nach der constant bleibenden Diagonalrichtung der primitiven Schwingungsrichtungen polarisirt ist, indem sich die Bewegungen nach dem Kräfte-Parallelogramm zusammensetzen. Sind dagegen die Phasen verschieden, so wird jene Diagonalrichtung mit der Zeit stetig ihre Lag

ändern, und das Molekul mufs eine Curve beschreiben, welche sich im Allgemeinen als eine Ellipse erweist, deren eine Axe mit der Polarisationsrichtung der einen Componente (vorausgesetzt, dafs dieselbe senkrecht gegen die andere Componente polarisirt ist) einen solchen Winkel φ bildet, dafs $tg\,2\varphi = \frac{2NN'\cos\gamma}{N^2 - N'^2}$ ist, wo γ der Phasenunterschied, und N und N' die respectiven Schwingungsweiten der Componenten vorstellen.

Man nennt einen solchen Strahl, in welchem die Aethertheilchen elliptische Bahnen beschreiben, elliptisch polarisirt, und belegt die bisher immer betrachtete Polarisationsart mit dem Namen geradlinige oder lineare Polarisation.

Die elliptische Bahn wird geradlinig, indem die kleine Axe der Ellipse verschwindet, wenn der Phasenunterschied irgend einer Zahl halber Undulationen oder der Gangunterschied einer ganzen Zahl halber Wellenlängen gleich ist, wobei die neue Polarisationsrichtung mit einer der primitven einen solchen Winkel φ bildet, dafs $tang\,2\varphi = \frac{2NN'}{N^2 - N'^2}$ ist.

Die Bahn wird ein Kreis, und der Strahl kreisförmig oder circular polarisirt genannt, wenn die Vibrations-Intensität beider Componenten gleich ist, und der Phasenunterschied eine ungerade Zahl Viertel-Undulationen beträgt.

Analytische Entwickelung der Gesetze der Wellenbewegung.

A. *Allgemeine Gesetze der Bewegung des Aethers.*

Es sei μ die Masse eines der Aetherteilchen, m die Masse eines anderen, im Zustande des Gleichgewichts um r von demselben entfernten, aber in der Wirkungssphäre desselben liegenden Theilchens, d. h. es sei r so klein, dafs wenn $F(r)$ die mit wachsendem r rasch abnehmende Anziehung oder Abstofsung zweier um r entfernten Masseneinheiten vorstellt, $F(r)$ noch einen merklichen Werth hat. Wirkt dann die anziehende oder abstofsende Kraft den Massen proportional, so ist die gegenseitige Anziehung oder Abstofsung (Elasticitätskraft) der Theilchen μ und m ausgedrückt durch $\mu m F(r)$, wo $F(r)$ positiv oder negativ zu denken ist, je nachdem die Kräfte anziehend oder abstofsend wirken. Sind ferner x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten von μ; $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die Coordinaten von m, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen; α, β, γ die Winkel der Linie μm mit den Axen der x, y, z, so sind die auf diese Axen projicirten Elasticitätskräfte:

$$\mu m F(r) \cos\alpha,\ \mu m F(r) \cos\beta,\ \mu m F(r) \cos\gamma.$$

Für die übrigen um μ herumliegenden Theilchen erhält man die entsprechenden Werthe, wenn man in diesen Ausdrükken für m, r, α, β, γ die diesen Theilchen zukommenden Werthe setzt. Die Summe der resultirenden Projectionsausdrücke giebt die Gesammtwirkung auf μ in der Richtung der Axen, und da diese im vorausgesetzten Gleichgewichtszustande verschwinden mufs, so hat man

$$1)\ \mu S[m \cos\alpha F(r)] = 0,\ \mu S[m \cos\beta F(r)] = 0,$$
$$\mu S[m \cos\gamma F(r)] = 0,$$

wo sich die Summenzeichen auf die verschiedenen Systeme von m, r, α, β, γ beziehen, und wo man auch den constanten Faktor μ fortlassen kann.

Wird nun das Gleichgewicht so gestört, dafs r sich nur wenig verändert, so gehe x, y, z nach der Zeit t über in $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, und r in $r\,(1+\varepsilon)$, wo ε sehr klein gegen r ist; ferner mögen die Coordinaten von m übergehen in $x+\xi+\Delta(x+\xi)$, $y+\eta+\Delta(y+\eta)$, $z+\zeta+\Delta(z+\zeta)$ und in so fern $\Delta x=r\cos\alpha$, $\Delta y=r\cos\beta$ und $\Delta z=r\cos\gamma$ war, werden die Projectionen von $r(1+\varepsilon)$:

$$\Delta x+\Delta\xi=r\cos\alpha+\Delta\xi,\quad \Delta y+\Delta\eta=r\cos\beta+\Delta\eta,$$
$$\Delta z+\Delta\zeta=r\cos\gamma+\Delta\zeta,$$

folglich

$$r^2(1+\varepsilon)^2=(r\cos\alpha+\Delta\xi)^2+(r\cos\beta+\Delta\eta)^2+(r\cos\gamma+\Delta\zeta)^2$$

mithin
$$(1+\varepsilon)^2=1+\frac{2}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi+\cos\beta\,\Delta\eta+\cos\gamma\,\Delta\zeta)$$
$$+\frac{1}{r^2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2),$$

und wenn man, da ε, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ sehr kleine Gröfsen sind, die zweiten Potenzen derselben vernachlässigt:

$$\varepsilon=\frac{1}{r}(\cos\alpha\,\Delta\xi+\cos\beta\,\Delta\eta+\cos\gamma\,\Delta\zeta),$$

während die Winkel, welche $r(1+\varepsilon)$ mit den drei Axen macht,

$$\frac{\Delta x+\Delta\xi}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}}{1+\varepsilon},\quad \frac{\Delta y+\Delta\eta}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}}{1+\varepsilon},$$
$$\frac{\Delta z+\Delta\zeta}{r(1+\varepsilon)}=\frac{\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}}{1+\varepsilon}$$

werden. Die Projectionen der auf μ wirkenden (bewegenden) Kräfte werden daher alsdann:

$$\mu\,S\left[m\left(\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right],$$
$$\mu\,S\left[m\left(\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right],$$
$$\mu\,S\left[m\left(\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right].$$

Dieselben Kräfte müssen aber, da $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ die be-

schleunigenden Kräfte sind, gleich $\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ sein, und daher hat man zur Bestimmung von ξ, η, ζ, d. h. der Verschiebungen von μ, die Gleichungen:

$$2)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= S\left[m\left(\cos\alpha+\frac{\Delta\xi}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right]\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= S\left[m\left(\cos\beta+\frac{\Delta\eta}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right]\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= S\left[m\left(\cos\gamma+\frac{\Delta\zeta}{r}\right)\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon}\right]\end{aligned}\right.$$

welche die Gesetze der Wellenbewegung für jede mögliche Constitution des Aethers, also auch als specielle Fälle die Gesetze der Wellenbewegung in einfach und doppel-brechenden Mitteln in sich schliefsen.

Entwickelt man $F[r(1+\varepsilon)]$ nach Potenzen von ε, und berücksichtigt nur die ersten Potenzen, so erhält man

$$F[r(1+\varepsilon)] = F(r)+r\varepsilon F'(r);\ \text{also}$$

$$\frac{F[r(1+\varepsilon)]}{1+\varepsilon} = F(r)+\varepsilon[rF'(r)-F(r)],$$ oder wenn man den Coefficienten von ε mit $f(r)$ bezeichnet, $= F(r)+\varepsilon f(r)$.

Die Gleichungen (2) gehen alsdann wegen der Bedingungen in (1) über in:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= S\left[m\frac{F(r)}{r}\Delta\xi\right]+S[mf(r)\cos\alpha.\varepsilon]\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= S\left[m\frac{F(r)}{r}\Delta\eta\right]+S[mf(r)\cos\beta.\varepsilon]\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= S\left[m\frac{F(r)}{r}\Delta\zeta\right]+S[mf(r)\cos\gamma.\varepsilon]\end{aligned}$$

oder wenn man für ε den eben gefundenen Werth substituirt:

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= S\left[m\frac{F(r)+\cos^2\alpha f(r)}{r}\Delta\xi\right]\\ &+S\left[m\frac{\cos\alpha\cos\beta f(r)}{r}\Delta\eta\right]+S\left[m\frac{\cos\alpha\cos\gamma f(r)}{r}\Delta\zeta\right]\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= S\left[m\frac{\cos\beta\cos\alpha f(r)}{r}\Delta\xi\right]\\ &+S\left[m\frac{F(r)+\cos^2\beta f(r)}{r}\Delta\eta\right]+S\left[m\frac{\cos\beta\cos\gamma f(r)}{r}\Delta\zeta\right]\end{aligned}\right.$$

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = S\left[m\frac{\cos\gamma\cos\alpha f(r)}{r}\Delta\xi\right]\\&+S\left[m\frac{\cos\gamma\cos\beta f(r)}{r}\Delta\eta\right]+S\left[m\frac{F(r)+\cos^2\gamma f(r)}{r}\Delta\zeta\right].\end{aligned}\right.$$

Man denke sich die diesen Gleichungen genügenden Werthe von ξ, η, ζ in Exponentialreihen entwickelt, deren Coefficienten lineäre Funktionen von x, y, z sind, so dafs sie die Form

$$\xi = S\left(\mathfrak{a}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}\right),\quad \eta = S\left(\mathfrak{b}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}\right),$$
$$\zeta = S\left(\mathfrak{c}e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}}\right)$$

erhalten, wo u, v, w willkührliche aber reele Constanten, und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reele oder imaginäre Funktionen von x, y, z, t bedeuten, und die Summenzeichen sich auf verschiedene Systeme von u, v, w beziehen.

Setzt man alsdann $\mathfrak{a} = d - g\sqrt{-1}$, $\mathfrak{b} = e - h\sqrt{-1}$ $\mathfrak{c} = f - i\sqrt{-1}$: so sind, da

$$e^{(ux+vy+wz)\sqrt{-1}} = \cos(ux+vy+wz)+\sin(ux+vy+wz)\sqrt{-1}$$

ist, die allgemeinen Integrale der Gleichungen (I.):

$$\xi = S[d\cos(ux+vy+wz)+g\sin(ux+vy+wz)]$$
$$\eta = S[e\cos(ux+vy+wz)+h\sin(ux+vy+wz)]$$
$$\zeta = S[f\cos(ux+vy+wz)+i\sin(ux+vy+wz)],$$

wo die imaginären Glieder fortgelassen sind, da ξ, η, ζ der Natur nach reel bleiben müssen.

Um die 4 Veränderlichen x, y, z, t dieser Gleichungen auf 2 zurückzuführen, nehme man einen neuen Veränderlichen, ϱ, so dafs $ux+vy+wz = \varkappa\varrho$ wird, und wähle $\varkappa$ so, dafs $u^2+v^2+w^2 = \varkappa^2$ wird; alsdann erhalten die letzten Gleichungen die Form:

$$3)\quad\left\{\begin{aligned}\xi &= S[d\cos\varkappa\varrho+g\sin\varkappa\varrho]\\ \eta &= S[e\cos\varkappa\varrho+h\sin\varkappa\varrho]\\ \zeta &= S[f\cos\varkappa\varrho+i\sin\varkappa\varrho],\end{aligned}\right.$$

wenn man sich d, e, f, g, h, i als blofse Funktionen von t denkt. Bezeichnet man die Quotienten $\frac{u}{\varkappa}$, $\frac{v}{\varkappa}$, $\frac{w}{\varkappa}$ beziehlich mit a, b, c, so ist $a^2+b^2+c^2 = 1$, und a, b, c lassen sich daher als die Cosinus der Winkel betrachten,

welche eine Gerade mit den Axen bildet. Diese Gerade steht normal auf einer Ebene, deren Gleichung $ax+by+cz=0$ ist, und welche Wellen-Ebene heifsen möge.

Da $\varrho = ax+by+cz$ ist, so ist ϱ die Entfernung von dieser Ebene, und x ist die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten u, v, w sind, und welcher in der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Normale jener Wellen-Ebene liegt, von diesem Anfangspunkt.

Betrachten wir nun zuerst den einfachsten Fall, wo den Gleichungen (I.) durch ein einziges Glied der Summen in (3.) genügt wird, d. h. wo einem bestimmten Werth von ϱ nur ein einziger Werth von $\varkappa$ entspricht.

Man hat alsdann als partikuläre zusammengehörige Integrale:

$$4)\quad \begin{cases} \xi = d\cos\varkappa\varrho + g\sin\varkappa\varrho \\ \eta = e\cos\varkappa\varrho + h\sin\varkappa\varrho \\ \zeta = f\cos\varkappa\varrho + i\sin\varkappa\varrho. \end{cases}$$

Die hieraus sich ergebenden Werthe von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ in (I.) gesetzt, führen dann zu der Bestimmung der Funktionen d, e, f, g, h, i.

Es sei der Winkel, welchen der Radius Vektor μm (oder r) mit der durch a, b, c bestimmten Normale der Well-Ebene bildet, gleich δ, also $\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$.

Wächst nun x, y, z um Δx, Δy, Δz, so wächst ϱ um $\Delta\varrho = a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z = r\cos\delta$, da $\Delta x = r\cos\alpha$, $\Delta y = r\cos\beta$, $\Delta z = r\cos\gamma$ ist.

Folglich wachsen $\cos\varkappa\varrho$ und $\sin\varkappa\varrho$ um

$$\Delta\cos\varkappa\varrho = \cos(\varkappa\varrho + \varkappa\Delta\varrho) - \cos\varkappa\varrho$$
$$= -[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\cos\varkappa\varrho - \sin(\varkappa r\cos\delta)\sin\varkappa\varrho,$$
$$\Delta\sin\varkappa\varrho = \sin(\varkappa\varrho + \varkappa\Delta\varrho) - \sin\varkappa\varrho$$
$$= -[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\sin\varkappa\varrho + \sin(\varkappa r\cos\delta)\cos\varkappa\varrho,$$

und es wird:

$$\Delta\xi = -(d\cos\varkappa\varrho + g\sin\varkappa\varrho)[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]$$
$$+ (g\cos\varkappa\varrho - d\sin\varkappa\varrho)\sin(\varkappa r\cos\delta) =$$
$$= -[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\xi + \frac{\sin(\varkappa r\cos\delta)}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial\varrho}, \text{ oder:}$$

$$\Delta\xi = -2\sin^2\left(\frac{\varkappa r\cos\delta}{2}\right)\xi + \frac{\sin(\varkappa r\cos\delta)}{\varkappa}\frac{\partial\xi}{\partial\varrho};$$ und eben so

$$\Delta\eta = -2\sin^2\left(\frac{\varkappa r\cos\delta}{2}\right)\eta + \frac{\sin(\varkappa r\cos\delta)}{\varkappa}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho},$$

$$\Delta\zeta = -2\sin^2\left(\frac{\varkappa r\cos\delta}{2}\right)\zeta + \frac{\sin(\varkappa r\cos\delta)}{\varkappa}\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}.$$

Die Substitution dieser Werthe in (I.) liefert alsdann

$$\text{II.}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -(L\xi+R\eta+Q\zeta)+\left(L'\dfrac{\partial\xi}{\partial\varrho}+R'\dfrac{\partial\eta}{\partial\varrho}+Q'\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -(R\xi+M\eta+P\zeta)+\left(R'\dfrac{\partial\xi}{\partial\varrho}+M'\dfrac{\partial\eta}{\partial\varrho}+P'\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -(Q\xi+P\eta+N\zeta)+\left(Q'\dfrac{\partial\xi}{\partial\varrho}+P'\dfrac{\partial\eta}{\partial\varrho}+N'\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right),\end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$5)\quad\begin{cases} L = \mathfrak{A}+S[\mathfrak{C}\cos^2\alpha],\quad M = \mathfrak{A}+S[\mathfrak{C}\cos^2\beta],\\ N = \mathfrak{A}+S[\mathfrak{C}\cos^2\gamma],\\ P = S[\mathfrak{C}\cos\beta\cos\gamma];\quad Q = S[\mathfrak{C}\cos\gamma\cos\alpha],\\ R = S[\mathfrak{C}\cos\alpha\cos\beta],\\ L' = \mathfrak{A}_1+S[\mathfrak{C}_1\cos^2\alpha],\quad M' = \mathfrak{A}_1+S[\mathfrak{C}_1\cos^2\beta],\\ N' = \mathfrak{A}_1+S[\mathfrak{C}_1\cos^2\gamma],\\ P' = S[\mathfrak{C}_1\cos\beta\cos\gamma],\quad Q' = S[\mathfrak{C}_1\cos\gamma\cos\alpha],\\ R' = S[\mathfrak{C}_1\cos\alpha\cos\beta],\\ \mathfrak{A} = S\left[\dfrac{2mF(r)}{r}\sin^2\left(\dfrac{\varkappa r\cos\delta}{2}\right)\right],\\ \mathfrak{A}_1 = S\left[\dfrac{mf(r)}{\varkappa r}\sin(\varkappa r\cos\delta)\right],\\ \mathfrak{C} = \dfrac{2mf(r)}{r}\sin^2\dfrac{\varkappa r\cos\delta}{2},\\ \mathfrak{C}_1 = \dfrac{mf(r)}{\varkappa r}\sin(\varkappa r\cos\delta).\end{cases}$$

Denkt man sich das Gleichgewicht des Aethers im Zustande der Ruhe dadurch hervorgebracht, dafs die Wirkungen der Elasticitätskräfte auf jeden einzelnen Punkt zu beiden Seiten desselben einzeln genommen in jeder durch denselben gehenden (geradlinigen) Richtung gleich und entgegengesetzt sind, so müssen L', M', N', P', Q', R', verschwinden. Es läfst sich nämlich jede der Summen, wel-

che durch L, M.,.. L', M'.... repräsentirt sind, in zwei Gruppen zerlegen, von denen die eine die Glieder enthält, in welchen ϱ positiv ist, die andere die Glieder mit negativem ϱ. ϱ ist aber positiv für die auf der einen Seite der Well-Ebene (in deren Normale) liegenden Theilchen, negativ für die auf der anderen Seite liegenden, und daher ändern die Cosinus von α, β, γ mit ϱ zugleich ihr Zeichen, mithin auch $\cos\delta$ und somit die eine Gruppe der Glieder in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{C}_1$. Da ferner die in L', M'.... mit $\mathfrak{C}_1$ multiplicirten Quadrate und Produkte der Cosinus von α, β, γ ihr Zeichen nicht ändern, so werden die Summanden in L' M'.... paarweise gleich und von entgegengesetzten Zeichen, und heben sich daher auf. Man hat also unter dieser Bedingung:

$$\text{III.}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-(L\xi+R\eta+Q\zeta)\\[2mm]\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-(R\xi+M\eta+P\zeta)\\[2mm]\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=-(Q\xi+P\eta+N\zeta).\end{cases}$$

Polarisationsrichtungen.

Man sieht aus den letzten Gleichungen, dafs im Allgemeinen (d. h. für jede Lage des Coordinatensystems) nie zwei der drei Gröfsen $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ verschwinden können, ohne dafs $\xi=\eta=\zeta=o$ wird und mithin auch die dritte verschwindet. Oder mit anderen Worten: Es können allgemein nie die beschleunigenden Kräfte nach zwei der Coordinatenaxen verschwinden, ohne dafs die Bewegung ganz aufhört. Es läfst sich indefs eine bestimmte Lage der Coordinatenaxen finden, für welche dies möglich ist. Eine Folge davon würde sein, dafs, wenn die Verschiebungen einer dieser Axen parallel sind, dieselben fortan derselben parallel bleiben.

Die Richtungen solcher Axen heifsen **Polarisationsrichtungen**. Da aber L, M, N, P, Q, R von a, b, c,

also von der Lage der Well-Ebene abhängen, so werden jene Richtungen bei verschiedener Lage der Wellen-Ebene im Allgemeinen andere sein.

Es seien A, B, C, die Cosinus der Winkel, welche eine solche Polarisationsrichtung mit den Axen bildet, also ihre Gleichung: $\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$, und s die Verschiebung längs derselben, mithin

$$6)\quad s = A\xi + B\eta + C\zeta \text{ und}$$

$$7)\quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{A\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{B\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{C\partial^2\zeta}{\partial t^2}.$$

Substituirt man hierin die Werthe für $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$ aus (III.), so erhält man

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -s^2 s,$$

sobald es für $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ mögliche Werthe giebt, welche

$$\frac{LA+RB+QC}{A} = \frac{RA+MB+PC}{B} = \frac{QA+PB+NC}{C} = s^2$$

machen, so dafs s^2 reel wird.

Die letzten Gleichungen lassen sich schreiben:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} (L-s^2)A + RB + QC = 0 \\ RA + (M-s^2)B + PC = 0 \\ QA + PB + (N-s^2)C = 0 \end{cases}$$

und geben nach der Elimination von A, B, C (da $A^2 + B^2 + C^2 = 1$)

$$\text{V, a.}\quad (L-s^2)(M-s^2)(N-s^2) - P^2(L-s^2) - Q^2(M-s^2) - R^2(N-s^2) + 2PQR = 0,$$

eine Gleichung, welche nach s^2 vom 3ten Grade ist, und daher 3 verschiedene Werthe für diese Gröfse giebt.

Die Gleichungen (V.) sind aber die Gleichungen, welche die Hauptaxen des Ellipsoids

$$\text{VI.}\quad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qxz + 2Rxy = 1$$

der Gröfse und Lage nach bestimmen, wenn A, B, C die

Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Hauptaxen mit den Coordinatenaxen bilden, und $\frac{1}{s^2}$ das Quadrat der Halbaxen vorstellt *).

Da diese Halbaxen allemal reel sind, so sind die drei aus (V, *a.*) sich ergebenden Werthe von s^2 (welche mit s'^2, s''^2, s'''^2 bezeichnet sein mögen), so wie $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ reel, und es giebt in der That drei und zwar auf einander senkrechte Polarisationsrichtungen, die mit den Richtungen der Hauptaxen des Ellipsoids (VI.) zusammenfallen. Dies Ellipsoid möge Polarisations-Ellipsoid heifsen.

Gröfse der Verschiebungen nach den Polarisationsrichtungen.

Die Gröfse der Verschiebung s ergiebt sich durch Integration der Gleichung (IV.)

$$\text{IV, } a. \quad s = s_0 \cos st + s_1 \frac{\sin st}{s} = s_0 \cos st + s_1 \int_0^t \cos st \,\partial t,$$

wo unter s_0 und s_1 die Werthe von s und $\frac{\partial s}{\partial t}$ für $t = 0$, d. h. die Anfangsverschiebung und die Anfangsgeschwindigkeit längs der Polarisationsrichtung zu verstehen sind.

s_0 und s_1 lassen sich leicht aus den Anfangswerthen von ξ, η, ζ, $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, d. h. aus den Anfangsverschiebungen und Anfangsgeschwindigkeiten nach den Richtungen der Coordinatenaxen bestimmen. Es seien die letzteren Gröfsen der Reihe nach

$$\xi_0, \eta_0, \xi_0, \zeta_1, \eta_1, \zeta_1, \text{ also}$$

$$8) \begin{cases} \xi_0 = d_0 \cos \varkappa\varrho + g_0 \sin \varkappa\varrho & \xi_1 = d_1 \cos \varkappa\varrho + g_1 \sin \varkappa\varrho, \\ \eta_0 = e_0 \cos \varkappa\varrho + h_0 \sin \varkappa\varrho & \eta_1 = e_1 \cos \varkappa\varrho + h_1 \sin \varkappa\varrho, \\ \zeta_0 = f_0 \cos \varkappa\varrho + i_0 \sin \varkappa\varrho & \zeta_1 = f_1 \cos \varkappa\varrho + i_1 \sin \varkappa\varrho, \end{cases}$$

*) Jene Bedingungsgleichungen finden sich in der Form (V.) entwikkelt in Cauchy's *Exercices de mathematiques Vol. III.* in der Abhandlung: *Sur les centres, les plans principaux et les axes principaux des surfaces du second degré.*

wo d_0, e_0, f_0, g_0, h_0, i_0, die Anfangswerthe von d, e, f, g, h, i, und d_1, e_1, f_1, g_1, h_1, i_1 die Anfangswerthe von $\frac{\partial d}{\partial t}$, $\frac{\partial e}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial i}{\partial t}$ vorstellen.

Alsdann ist

$$s_0 = A\xi_0 + B\eta_0 + C\zeta_0 = (d_0 A + e_0 B + f_0 C)\cos\varkappa\varrho + (g_0 A + h_0 B + i_0 C)\sin\varkappa\varrho$$

und

$$s_1 = A\xi_1 + B\eta_1 + C\zeta_1 = (d_1 A + e_1 B + f_1 C)\cos\varkappa\varrho + (g_1 A + h_1 B + i_1 C)\sin\varkappa\varrho,$$

folglich wird aus (IV, a.)

$$s = (d_0 A + e_0 B + f_0 C)\frac{\cos(\varkappa\varrho + st) + \cos(\varkappa\varrho - st)}{2} + (g_0 A + h_0 B + i_0 C)\frac{\sin(\varkappa\varrho + st) + \sin(\varkappa\varrho - st)}{2}$$
$$+ \int_0^t \left[(d_1 A + e_1 B + f_1 C)\frac{\cos(\varkappa\varrho + st) + \cos(\varkappa\varrho - st)}{2} + (g_1 A + h_1 B + i_1 C)\frac{\sin(\varkappa\varrho + st) + \sin(\varkappa\varrho - st)}{2}\right]\partial t,$$

oder wenn man $\frac{s}{\varkappa} = \omega$ setzt, und die Werthe von ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1 aus (8) beziehlich mit $\varphi(\varrho)$, $\chi(\varrho)$, $\psi(\varrho)$, $\Phi(\varrho)$, $X(\varrho)$, $\Psi(\varrho)$ bezeichnet,

$$s = A\frac{\varphi(\varrho + \omega t) + \varphi(\varrho - \omega t)}{2} + B\frac{\chi(\varrho + \omega t) + \chi(\varrho - \omega t)}{2} + C\frac{\psi(\varrho + \omega t) + \psi(\varrho - \omega t)}{2}$$
$$+ \int_0^t \left[A\frac{\Phi(\varrho + \omega t) + \Phi(\varrho - \omega t)}{2} + B\frac{X(\varrho + \omega t) + X(\varrho - \omega t)}{2} + C\frac{\Psi(\varrho + \omega t) + \Psi(\varrho - \omega t)}{2}\right]\partial t.$$

Setzt man ferner $s_0 = A\varphi(\varrho) + B\chi(\varrho) + C\psi(\varrho) = \pi_0(\varrho)$
und $s_1 = A\Phi(\varrho) + BX(\varrho) + C\Psi(\varrho) = \pi_1(\varrho)$,
so hat man: (IV, b.)

$$s = \frac{\pi_0(\varrho + \omega t) + \pi_0(\varrho - \omega t)}{2} + \int_0^t \frac{\pi_1(\varrho + \omega t) + \pi_1(\varrho - \omega t)}{2}\partial t.$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen, Oscillationsdauer, Wellenlänge.

Da die Verschiebungen s, ξ, η, ζ, und die Differenzialquotienten dieser Gröfsen nur von ϱ und t abhängen, so werden die Verschiebungen sowohl wie die Geschwindigkeiten der Aetherteilchen zu jeder gegebenen Zeit t dieselben sein für alle Moleküle, welche um ϱ von der Well-Ebene $ax+by+cz=0$ entfernt sind. Wenn ferner für $t=0$ die Verschiebungen und Geschwindigkeiten einer Axe des Ellipsoids parallel sind, so werden sie es auch für jeden folgenden Zeitpunkt bleiben. Sind nämlich s', s'', s''' die Werthe von s in Bezug auf die drei Axen des Ellipsoids, deren Werthe $\frac{1}{s'^2}$, $\frac{1}{s''^2}$, $\frac{1}{s'''^2}$ seien, und ist $s_0'=s_0''=s_1'=s_1''=0$, so giebt die Gleichung (IV, *a*.) $s'=0$ und $s''=0$, und somit sind auch $\frac{\partial s'}{\partial t}$ und $\frac{\partial s''}{\partial t}=0$ für jeden Werth von t.

Als übrigbleibende Verschiebung (s''') ergiebt sich, wenn man 1) $\pi_1(\varrho)=+\omega\pi_0'(\varrho)$ nimmt, aus: (IV, *b*.)

$$9)\quad s'''=+\pi_0(\varrho+\omega t).$$

Da sich $\pi_0(\varrho+\omega t)$ nur mit den Cosinus des Bogens $\varkappa(\varrho+\omega t)$ ändert, so erlangt s''' sowohl als $\frac{\partial s'''}{\partial t}$ denselben Werth, so oft jener Bogen um 2π wächst (unter π die Peripherie des Kreises verstanden, dessen Durchmesser 1 ist), also wenn $\Delta(\varrho+\omega t)=\frac{2\pi}{\varkappa}$ ist. Dies findet Statt

1) wenn $\Delta\varrho=-\omega\Delta t$, d. h. $\frac{\Delta(-\varrho)}{\Delta t}=\omega$ genommen wird. Nach der Zeiteinheit wiederholt sich daher die Bewegung in der Entfernung $-\varrho$, und die positive Constante ω ist folglich die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der ebenen Wellen in der Richtung der negativen ϱ, d. h. rückwärts vom schwingenden Theilchen μ längs der Normale der Well-Ebene.

Für jeden constanten Werth von ϱ, d. h. für sämmtliche Theilchen einer bestimmten um ϱ von der ursprüng-

lichen Well-Ebene $ax+by+cz=0$ entfernten Ebene, wird aus $\Delta(\varrho+\omega t)=\frac{2\pi}{\varkappa}$, $\Delta t=\frac{2\pi}{\varkappa\omega}$, folglich nehmen jene Theilchen nach der Zeit $\frac{2\pi}{\varkappa\omega}$ wiederum die Stellung und die Geschwindigkeit an, die sie zur Zeit t hatten. Setzt man $\frac{2\pi}{\varkappa\omega}=T$, so ist daher T die Oscillationsdauer. Für jeden constanten Werth von t wird ferner aus $\Delta(\varrho+\omega t)=\frac{2\pi}{\varkappa}$, $\Delta\varrho=\frac{2\pi}{\varkappa}=l$, also haben alle Theilchen der mit der Ebene $ax+by+cz+0$ parallelen Ebenen, die um $\varrho, \varrho+l, \varrho+2l, \varrho+3l$ etc. von jener Ebene entfernt sind, zu derselben Zeit t dieselben Verschiebungen erlitten und eine gleiche Geschwindigkeit erlangt; folglich ist l die Wellenlänge.

Die Oscillationsdauer T und die Wellenlänge l ist also bestimmt durch

$$\text{VII.} \qquad T=\frac{2\pi}{\varkappa\omega}=\frac{2\pi}{s} \quad \text{und} \quad l=\frac{2\pi}{\varkappa}.$$

Die durch Ebenen gleich oscillirender Theile abgetheilten, also um l von einander entfernten Schichten heifsen ebene Wellen, und die Geschwindigkeit ihrer Fortpflanzung ω ist gegeben durch $\omega=\frac{s}{\varkappa}=\frac{l}{T}$; diese letztere ist also direkt der Wellenlänge, und umgekehrt der Oscillationsdauer proportional.

Nimmt man dagegen 2) $\pi_1(\varrho)=-\omega\pi_0'(\varrho)$, so wird nach (IV, b.) die Verschiebung

$$10) \qquad s'''=\pi_0(\varrho-\omega t),$$

und man findet auf dieselbe Art, dafs die Verschiebungen und Geschwindigkeiten ungeändert bleiben:

1) allgemein, wenn $\Delta\varrho=\omega\Delta t$; mithin ist auch ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen-Ebene nach der Richtung der positiven ϱ, d. h. nach der andern Seite der Ebene $ax+by+cz=0$ hin;

2) wenn $\Delta t=T$;

3) wenn $\Delta\varrho=l$ ist.

Oscillationsdauer und Wellenlänge sind also nach beiden Richtungen hin dieselben, und beide Wellensysteme, die sich nach entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen, bilden ein einziges System.

Ist endlich die anfängliche Schwingungsrichtung beliebig, so kann man die resultirenden Bewegungen als erzeugt denken durch Zusammensetzung von 6 Bewegungen, die den durch (9 und 10) vorgestellten gleichen, und die paarweise einander gleich, aber nach entgegengesetzten Richtungen gewendet, den drei Axen des Ellipsoids parallel sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten hängen vermöge der Gleichung $\omega = \frac{s}{\varkappa}$ von s, also von dem Verhältnifs der Axen des Ellipsoids ab, und mögen durch ω', ω'', ω''' bezeichnet werden.

Es bilden sich also im Allgemeinen drei polarisirte Wellensysteme, in denen die Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, und die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten ω', ω'', ω''' fortpflanzen.

Verschiebungen in der Richtung der Coordinatenaxen.

Zufolge der Gleichung (6.) ist, wenn man die Cosinus A, B, C durch A', B', C' oder A'', B'', C'' oder A''', B''', C''' bezeichnet, je nachdem sie sich auf die zu s' oder s'' oder s''' gehörende Ellipsoidsaxe beziehen,

$$11)\quad \begin{cases} s' = A'\xi + B'\eta + C'\zeta \\ s'' = A''\xi + B''\eta + C''\zeta \\ s''' = A'''\xi + B'''\eta + C'''\zeta, \end{cases}$$

während man zugleich hat: $A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$, $A''^2 + B''^2 + C''^2 = 1$, $A'''^2 + B'''^2 + C'''^2 = 1$, und insofern die Axen des Ellipsoids auf einander senkrecht stehen: $A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0$, $A'A''' + B'B''' + C'C''' = 0$, $A''A''' + B''B''' + C''C''' = 0$; ferner, wenn man umgekehrt die Coordinatenaxen auf die Ellipsoidsaxen bezieht, $A'^2 + A''^2 + A'''^2 = 1$, $B'^2 + B''^2 + B'''^2 = 1$, $C'^2 + C''^2 + C'''^2 = 1$, $A'B' + A''B'' + A'''$

$+A''B''' = 0$, $A'C' + A''C'' + A'''C''' = 0$, $B'C' + B''C''$ $+B'''C''' = 0$.

Rücksichtlich der letzteren Gleichungen führen die Relationen (11.), indem man sie nach und nach beziehlich mit A', A'', A'''; B', B'', B'''; C', C'', C''' multiplicirt und addirt, auf:

$$A)\quad \begin{cases} \xi = A's' + A''s'' + A'''s''', \\ \eta = B's' + B''s'' + B'''s''', \\ \zeta = C's' + C''s'' + C'''s'''. \end{cases}$$

Die Verschiebungen ξ, η, ζ sind also bekannt, sobald man die Lage der Axen des Ellipsoids (welche sich mit der Lage der Wellen-Ebene ändert) und die Verschiebungen s', s'', s''' aus dem Vorigen bestimmt hat.

Wellenbewegung des weifsen Lichts.

Das weifse Licht entsteht (der Undulationshypothese zufolge) durch das gleichzeitige Stattfinden aller in (3) enthaltenen Bewegungen. Die Total-Verschiebungen in der Richtung der Axen sind daher:

$$\zeta = S[A's' + A''s'' + A'''s'''],$$
$$\eta = S[B's' + B''s'' + B'''s'''],$$
$$\zeta = S[C's' + C''s'' + C'''s'''].$$

ξ_0 ist alsdann gleich $S[d_0 \cos \varkappa\varrho + g_0 \sin \varkappa\varrho]$, oder da die Glieder dieser Summe als so wenig von einander verschieden vorausgesetzt werden können, dafs sich die Summen als dreifache Integrale nach u, v, w und zwar zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ betrachten lassen — wenn man $d_0 = D_0 \partial u \partial v \partial w$, $g_0 = G_0 \partial u \partial v \partial w$ setzt:

$$\xi_0 = \iiint [D_0 \cos(ux+vy+wz) + G_0 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$

Ebenso hat man, wenn E_0, F_0, H_0, I_0, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, I_1 die ähnliche Bedeutung haben, (12)

$$\eta_0 = \iiint [E_0 \cos(ux+vy+wz) + H_0 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$
$$\zeta_0 = \iiint [F_0 \cos(ux+vy+wz) + I_0 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$
$$\xi_1 = \iiint [D_1 \cos(ux+vy+wz) + G_1 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$
$$\eta_1 = \iiint [E_1 \cos(ux+vy+wz) + H_1 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$
$$\zeta_1 = \iiint [F_1 \cos(ux+vy+wz) + I_1 \sin(ux+vy+wz)] \partial u \partial v \partial w.$$

Setzt man ferner $\pi_0(\varrho) = \Pi_0(\varrho)\partial u\partial v\partial w$, $\pi_1(\varrho) = \Pi_1(\varrho)\partial u\partial v\partial w$ und $s = U\partial u\partial v\partial w$, so ist

$$13) \left\{\begin{aligned} \Pi_0(\varrho) &= (D_0A+E_0B+F_0C)\cos\varkappa\varrho \\ &\quad +(G_0A+H_0B+I_0C)\sin\varkappa \\ \Pi_1(\varrho) &= (D_1A+E_1B+F_1C)\cos\varkappa\varrho \\ &\quad +(G_1A+H_1B+I_1C)\sin\varkappa \end{aligned}\right.$$

$$14)\qquad U = \frac{\Pi_0(\varrho+wt)+\Pi_0(\varrho-wt)}{2} + \int_0^t \frac{\Pi_1(\varrho+wt)+\Pi_1(\varrho-wt)}{2}$$

und

$$B) \left\{\begin{aligned} \xi &= \int\int\int(A'U'+A''U''+A'''U''')\partial u\partial v\partial w, \\ \eta &= \int\int\int(B'U'+B''U''+B'''U''')\partial u\partial v\partial w, \\ \zeta &= \int\int\int(C'U'+C''U''+C'''U''')\partial u\partial v\partial w. \end{aligned}\right.$$

Dies sind die gesuchten Integrale der Gleichung (I.), i welcher die Werthe U', U'', U''' aus (14.), nachdem ma darin die Substitutionen mittelst (13.) vollzogen hat, z setzen sind, während D_0, E_0, F_0 etc. sich aus (12.) a folgende Art bestimmen lassen:

Bezeichnet man ξ_0, η_0, ζ_0 mit $\varphi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ und ξ_1, η_1, ζ_1 mit $\Phi(x, y, z)$, $X(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$, so ist

$$15) \left\{\begin{aligned} D_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\varphi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \\ E_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\chi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \\ F_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\cos(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\psi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \\ G_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\varphi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \\ H_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\chi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \\ I_0 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\int\int\sin(u\lambda+v\mu+w\nu)\,\psi(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial \end{aligned}\right.$$

sämmtliche Integrale zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-$ genommen. Die Werthe von D_1, E_1, F_1 etc. untersch den sich von D_0, F_0 etc. nur dadurch, dafs Φ, X, Ψ st φ, χ, ψ genommen werden mufs.

Die Richtigkeit der Gleichungen (15.) erkennt man, wenn man beachtet, dafs jede Funktion $f(x, y, z)$ einem 6fachen Integrale gleichgesetzt werden kann, nämlich

$$f(xyz) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int^6 e^{u(x-\lambda)\sqrt{-1}} e^{v(y-\mu)\sqrt{-1}} e^{w(z-\nu)\sqrt{-1}} \times$$
$$f(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial\nu\partial u\partial v\partial w,$$

wo die Grenzen von $+\infty$ bis $-\infty$ zu nehmen sind, welche Gleichung, wenn man statt der Exponentialgröfsen die Cosinus und Sinus einführt, sich (da das mit *sinus* behaftete Glied herausfällt) schreiben läfst: 16)

$$f(xyz) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int^6 \cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)] \times$$
$$f(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial\nu\partial u\partial v\partial w$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int^6 \cos(ux+vy+wz)\cos(u\lambda+v\mu+w\nu) \times$$
$$f(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial\nu\partial u\partial v\partial w$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int^6 \sin(ux+vy+wz)\sin(u\lambda+v\mu+w\nu) \times$$
$$f(\lambda\mu\nu)\partial\lambda\partial\mu\partial\nu\partial u\partial v\partial w.$$

Substituirt man aber die Werthe von D_0, $E_0 \ldots . D_1$, $E_1 \ldots .$ aus (15.) in (12.), so erhalten die Gleichungen (12.) vollkommen die Form (16.), und es wird also wirklich $\xi_0 = \varphi(xyz)$, $\eta_0 = \chi(xyz)$, $\zeta_0 = \psi(xyz)$, $\xi_1 = \Phi(xyz)$, $\eta_1 = X(xyz)$, $\zeta_1 = \Psi(xyz)$, wenn man den Gröfsen D_0, $E_0 \ldots .$ D_1, $E_1 \ldots .$ die Werthe aus (15.) beilegt.

Substituirt man die Werthe von D_0, E_0 etc. in (13.), so werden dieselben

$$\Pi_0(\varrho) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int [A\varphi(\lambda\mu\nu)+B\chi(\lambda\mu\nu)+C\psi(\lambda\mu\nu)] \times$$
$$\cos[\varkappa\varrho - u\lambda - v\mu - w\nu]\partial\nu\partial\mu\partial\lambda$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int [A\varphi(\lambda\mu\nu)+B\chi(\lambda\mu\nu)+C\psi(\lambda\mu\nu)] \times$$
$$\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\partial\nu\partial\mu\partial\lambda$$

und

$$\Pi_1(\varrho) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\int\int [A\Phi(\lambda\mu\nu)+BX(\lambda\mu\nu)+C\Psi(\lambda\mu\nu)] \times$$
$$\cos[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\partial\nu\partial\mu\partial\lambda.$$

Diese Werthe von $\Pi_0(\varrho)$ und $\Pi_1(\varrho)$ in (14.) gesetzt, geben U', U'', U''', je nachdem man ω', ω'' oder ω''' für ω substituirt, und bestimmen somit vollkommen die Werthe der Verschiebungen ξ, η, ζ in (*B.*), welche Gleichung die allgemeine Lösung der gestellten Aufgabe enthält.

B. *Besondere Gesetze der Bewegung des Aethers.*

1) Aetherbewegung in einfach brechenden Mitteln.

Die Gesetze, welche die Fortpflanzung der Wellenbewegung und die Schwingungs- (Polarisations-) Richtungen befolgen, sind es, welche die Erscheinungen des Lichts in einem Mittel von den Erscheinungen in andern Mitteln unterscheiden; und da beide durch das Ellipsoid

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qxz + 2Rxy = 1$$

bestimmt werden, so hängen die speciellen Gesetze der Lichterscheinungen von dem Verhalten der Coefficienten L, M, N, P, Q, R ab. Diese Gröfsen hängen einerseits von den Constanten m, r, $f(r)$, α, β, γ ab, und bedingen dadurch:

1) die Constitution des Aethers im Allgemeinen, d. h. die generellen Unterschiede zwischen den einfach brechenden und den verschiedenen Arten der doppelt brechenden Mitteln;

2) die Constitution des Aethers im Besondern durch den Einflufs auf die Werthe von $\varkappa$, d. h. die specifischen Unterschiede der Erscheinungen in Mitteln derselben Art.

Andrerseits hängen jene Gröfsen von den Veränderlichen a, b, c, d. h. von der Lage der Well-Ebene ab, und bedingen somit die Verschiedenheit der Erscheinungen in einem und demselben Mittel.

Die Abhängigkeit der Coefficienten unter sich läfst sich am bequemsten auffinden, wenn man ihre Werthe (5.) etwas umformt. Man setze nämlich

$$S\left(\frac{mf(r)}{r}\left[\frac{(\varkappa\cos\delta)^2}{2} + \frac{\cos(\varkappa r\cos\delta)}{r^2}\right]\right) = \mathfrak{B},$$

wo $\varkappa\cos\delta = ux + vy + wz$ ist, um

$$C)\begin{cases} S[\mathfrak{C}\cos^2\alpha]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u^2},\; S[\mathfrak{C}\cos^2\beta]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v^2},\; S[\mathfrak{C}\cos^2\gamma]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial w^2} \\ \text{und somit:} \\ L=\mathfrak{A}+\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u^2},\quad M=\mathfrak{A}+\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v^2},\quad N=\mathfrak{A}+\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial w^2}, \\ P=S[\mathfrak{C}\cos\beta\cos\gamma]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v\partial w},\quad Q=S[\mathfrak{C}\cos\alpha\cos\gamma]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\partial w}, \\ R=S[\cos\alpha\cos\beta]=\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\partial v}, \\ \text{zu erhalten, während} \\ \mathfrak{A}=S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\right]\ \text{war.} \end{cases}$$

Die Erscheinungen in einfach brechenden Mitteln entsprechen nun der Annahme, dafs die Wirkung der Elasticitätskräfte auf jeden Punkt in jeder Richtung dieselbe sei. Eine Aenderung von a, b, c, d. h. die Lage der Well-Ebene darf daher keinen Einflufs haben 1) auf die Form des Ellipsoids, damit die von der Länge der Axen desselben abhängige Fortpflanzungs-Geschwindigkeit unverändert bleibe, 2) auf die Lage des Ellipsoids gegen die Normale der Well-Ebene, damit die von der Lage der Axen desselben abhängige Schwingungsrichtung in Bezug auf die Well-Ebene dieselbe bleibe.

Das Ellipsoid wird daher ein Umdrehungs-Ellipsoid sein müssen, dessen Rotationsaxe mit der Normale der Well-Ebene zusammenfällt.

Die Geschwindigkeiten der zwei Wellensysteme, die in der Richtung der Aequatorialaxen schwingen, werden dadurch gleich, und jene setzen sich zu einem einzigen Wellensystem zusammen. Das dritte System, welches nach der Richtung der Revolutionsaxe polarisirt ist, also senkrecht gegen die Well-Ebene schwingt, wird als unwahrnehmbar für den Gesichtssinn der Hypothese nach angenommen, so dafs jedesmal nur ein wirksames Wellensystem sich bildet.

Die Bedingungen der einfachen Brechung lassen sich analytisch auf folgende Art feststellen.

Man vergleiche die Ellipsoide für zwei beliebige
gen der Well-Ebene, und beziehe dieselben auf zwei
schiedene rechtwinklige Coordinatensysteme, die ihren
fangspunkt gemeinschaftlich haben, und so liegen, dafs
Normale der einen Well-Ebene dieselbe Lage gegen
Axen des ersten Systems hat, welche die andere W
Ebene gegen die des zweiten Systems hat. Da x in l
den Wellensystemen als dasselbe betrachtet werden m
so wird alsdann u, v, w in beiden Systemen dasselbe s
während dem einen Systeme die Werthe α, β, γ, δ, L,
N, P, Q, R, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zugehören mögen, dem andern Syst
als entsprechende Werthe: α_1, β_1, γ_1, δ_1, L_1, M_1, .
P_1, Q_1, R_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$.

Sollen nun der Voraussetzung gemäfs beide Ellipso
dieselbe Form haben, und gleiche Lage gegen die Norm
so mufs $L = L_1$, $M = M_1$, $N = N_1$, $P = P_1$, $Q =$
$R = R_1$ sein, d. h.

$$17)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} + \dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u^2} = 0, \\ \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} + \dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial v^2} = 0, \\ \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A} + \dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial w^2} = 0, \end{cases}$$

$$18)\quad \frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial v\,\partial w} = 0, \quad \frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u\,\partial w} = 0, \quad \frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u\,\partial v} =$$

für jeden Werth von u, v, w.

Die letzten drei Gleichungen können nur bestel
wenn $\dfrac{\partial(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u}$ und $\dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u^2}$ weder v noch
$\dfrac{\partial(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial v}$ und $\dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial v^2}$ weder u noch w,
$\dfrac{\partial(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial w}$ und $\dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial w^2}$ weder u noch v enthal

Den Gleichungen (17.) zufolge mufs aber $\dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial u^2}$
$\dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B})}{\partial w^2} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1$ sein; folglich 1

sein diese letzten zweiten Differenziale, so wie $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1$ von u, v, w unabhängig sein. Für $\varkappa=0$, d. h. für $u=v=w=0$ verschwindet aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, also ist $\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1=0$: deswegen wird aus (17.) $\frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial u^2}=\frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial v^2}=\frac{\partial^2(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial w^2}=0$, also müssen wegen (18.) $\frac{\partial(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial u}$, $\frac{\partial(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial v}$ und $\frac{\partial(\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B})}{\partial w}$ constant sein; ja diese Differenzialquotienten müssen verschwinden, da vermöge (*C.*) $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial u}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial v}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial w}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}_1}{\partial u}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}_1}{\partial v}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}_1}{\partial w}$ für $u=v=w=0$ verschwinden. Es ist mithin $\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}$ constant, und zwar gleich Null, weil $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ für $u=v=w=0$ verschwinden.

Die Bedingungen des durchgängig gleichen Verhaltens der Elasticitätskräfte und mithin der einfachen Brechung sind daher, dafs $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1$ für jedes u, v, w, und für jedes Axensystem ist.

Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\cos(\varkappa r\cos\delta_1)]\right]=S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\right]$$

und

$$S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\delta_1+\frac{\cos(\varkappa r\cos\delta_1)}{r^2}\right)\right]$$
$$=S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\delta+\frac{\cos(\varkappa r\cos\delta)}{r^2}\right)\right],$$

und es dürfen sich daher die Werthe dieser Summen nicht ändern, wenn δ in δ_1 übergeht.

Da δ und δ_1 als die Winkel zwischen den Normalen und den Verbindungslinien der Moleküle von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig sind, so ändert sich, wenn man wiederum ein einziges Coordinatensystem zum Grunde legt, nur das u, v, w der einen Wellen-Normale (als Coordinaten eines Punktes derselben) etwa in u_1, v_1, w_1 um, während $u^2+v^2+w^2=u_1^2+v_1^2+w_1^2=\varkappa^2$ bleibt. Es werden alsdann jene Gleichungen so geschrieben werden müssen:

$$19)\begin{cases} S\left[\frac{mF(r)}{r}(1-\cos[r(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)])\right] \\ = S\left[\frac{mF(r)}{r}(1-\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)])\right] \\ S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\frac{1}{2}(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)^2 \right.\right. \\ \qquad \left.\left.+\frac{1}{r^2}\cos[r(u_1\cos\alpha+v_1\cos\beta+w_1\cos\gamma)]\right)\right] \\ = S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\frac{1}{2}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2 \right.\right. \\ \qquad \left.\left.+\frac{1}{r^2}\cos[r(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)]\right)\right] \end{cases}$$

Da sie unabhängig von u, v, w, u_1, v_1, w_1 gelten müssen, wenn nur $u^2+v^2+w^2 = u_1^2+v_1^2+w_1^2 = \varkappa^2$ ist, so müssen sie auch noch für $w_1 = v_1 = 0$ bestehen, weil nur alsdann $u_1^2 = u^2+v^2+w^2 = \varkappa^2$ ist; d. h. es mufs noch sein:

$$20)\ S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\cos(\varkappa r\cos\delta)]\right] = S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\frac{\cos(\varkappa r\cos\alpha)}{r^2}]\right]$$

$$21)\ S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\delta+\frac{\cos(\varkappa r\cos\delta)}{r^2}\right)\right]$$
$$= S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}\varkappa^2\cos^2\alpha+\frac{\cos(\varkappa r\cos\alpha)}{r^2}\right)\right],$$

und zwar unabhängig von u, v, w, so dafs in beiden Gleichungen die Coefficienten der Glieder, welche mit gleichen Potenzen von u, v, w multiplicirt sind, auf beiden Seiten einander gleich sein müssen.

Wegen $\cos(\varkappa r\cos\delta) = 1-\frac{r^2}{2!}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2$ $+\frac{r^4}{4!}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^4-\ldots$ *) und $\cos(\varkappa r\cos\alpha) =$ $1-\frac{r^2}{2!}\varkappa^2\cos^2\alpha+\frac{r^4}{4!}\varkappa^4\cos^4\alpha\ldots = 1-\frac{r^2}{2!}(u^2+v^2+w^2)\cos^2\alpha$ $+\frac{r}{4!}(u^2+v^2+w^2)^2\cos^4\alpha\ldots$ erhält man, als die einander

*) Unter $m!$ ist hier, wie in der Folge, das Produkt der ersten m Zahlen zu verstehen.

gleichen Glieder der $2n^{ten}$ Dimension:

$$S[mF(r)r^{2n-1}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}]$$
$$= x^{2n}S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{2n}\alpha] \text{ (für } n>0\text{) und}$$
$$S[mf(r)r^{2n-3}(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}]$$
$$= x^{2n}S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n}\alpha] \text{ (für } n>1\text{).}$$

Da ferner

$$(x\cos\delta)^{2n} = (u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}$$
$$= \sum\left[\frac{2n}{\mathfrak{a}!\mathfrak{b}!\mathfrak{c}!}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma\, u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}w^{\mathfrak{c}}\right],$$

(wo das Summenzeichen auf Systeme von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu beziehen ist, so dafs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{c}$ alle ganze positive Zahlenwerthe annehmen müssen, welche die Bedingung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = 2n$ erfüllen) und

$$x^{2n} = (u^2+v^2+w^2)^n = \sum\left(\frac{n!}{\frac{\mathfrak{a}}{2}!\frac{\mathfrak{b}}{2}!\frac{\mathfrak{c}}{2}!}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}w^{\mathfrak{c}}\right)$$
$$= \sum\left[\frac{2.4.6\ldots.2n}{(2.4\ldots.\mathfrak{a})(2.4\ldots.\mathfrak{b})(2.4\ldots.\mathfrak{c})}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}w^{\mathfrak{c}}\right]$$
$$= \sum\left[\frac{1.3.5\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{b}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{c}-1)}{1.3.5\ldots.(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{\mathfrak{a}!\mathfrak{b}!\mathfrak{c}!}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}w^{\mathfrak{c}}\right]^{*)},$$

(wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ alle gerade ganze Zahlen bedeuten), so entsprechen den Gliedern auf der linken Seite jener Gleichungen, welche ungerade Zahlenwerthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ enthalten, keine Glieder auf der rechten Seite; und es müssen daher dieselben verschwinden, d. h. es mufs sein:

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0, \\ S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0 \end{cases}$$

für ungerade Zahlenwerthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; während

$$\text{VIII.}\quad S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma]$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{b}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{c}-1)}{1.3.5\ldots..(2n-1)}S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{2n}\alpha],$$
$$S[mfr)r^{2n-3}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma]$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{b}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{c}-1)}{1.3.5\ldots..(2n-1)}S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{2n}\alpha]$$

für gerade Zahlenwerthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sein mufs.

---

*) Insofern nämlich $2.4.6\ldots.2m = \frac{(2m)!}{1.3.5\ldots(2m-1)}$ ist.

Die 4 letzten Gleichungen sprechen also das Gesetz aus, nach welchem der Aether vertheilt sein mufs, wenn das Mittel ein einfach brechendes sein soll.

Da r so klein ist, dafs man sich sehr wenig von der Wahrheit entfernt, wenn man die höheren Potenzen vernachlässigt, so kann man sich in vielen Fällen damit begnügen, statt jener Gleichungen folgende anzuwenden, welche nur die mit der ersten Potenz von r multiplicirten Glieder enthalten.

VII, a. $S[mrF(r)\cos\beta\cos\gamma] = S[mrF(r)\cos\gamma\cos\alpha]$
$= S[mrF(r)\cos\alpha\cos\beta] = 0.$

VIII, a. $S[mrF(r)\cos^2\alpha] = S[mrF(r)\cos^2\beta]$
$= S[mrF(r)\cos^2\gamma].$

VII, b. $S[mrf(r)\cos\beta\cos^3\gamma] = S[mrf(r)\cos\gamma\cos^3\alpha]$
$= S[mrf(r)\cos^3\alpha\cos\beta] = S[mrf(r)\cos^3\beta\cos\gamma]$
$= S[mrf(r)\cos^3\gamma\cos\alpha] = S[mrf(r)\cos^3\beta\cos\alpha] = 0.$

VIII, b. $S[mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma] = S[mrf(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha]$
$= S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta] = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\alpha]$
$= \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\beta] = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\gamma].$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten lassen sich hieraus auf folgende Art ableiten:

Aus (20., 21.) ergiebt sich

$$\mathfrak{A} = S\left[\frac{mF(r)}{r}[1-\cos(xr\cos\alpha)]\right],$$

$$\mathfrak{B} = S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}x^2\cos^2\alpha + \frac{\cos(xr\cos\alpha)}{r^2}\right)\right].$$

Bezeichnet man nun $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$ mit g, so dafs also $\frac{\partial g}{\partial u} = u$, $\frac{\partial g}{\partial v} = v$, $\frac{\partial g}{\partial w} = w$ wird, und $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial g}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g^2}$ beziehlich mit $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, so erhält man $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial u} = u\mathfrak{B}'$,

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial v} = v\mathfrak{B}', \quad \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial w} = w\mathfrak{B}', \quad \frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u^2} = \mathfrak{B}'+u^2\mathfrak{B}'',$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v^2} = \mathfrak{B}'+v^2\mathfrak{B}'', \quad \frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial w^2} = \mathfrak{B}'+w^2\mathfrak{B}'', \quad \frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v\,\partial w} = vw\mathfrak{B}'',$$

$$\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\,\partial w} = uw\mathfrak{B}'', \quad \frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\,\partial v} = uv\mathfrak{B}'', \text{ also}$$

$$L = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + u^2\mathfrak{B}'', \quad M = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + v^2\mathfrak{B}'',$$
$$N = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + w^2\mathfrak{B}'', \quad P = vw\mathfrak{B}'', \quad Q = uw\mathfrak{B}'', \quad R = uv\mathfrak{B}'',$$

so dafs die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$\mathfrak{B}''(ux + vy + wz)^2 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}')(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Da die Lage der Coordinatenaxen beliebig ist, so ist es erlaubt, die Normale der Well-Ebene zur Axe der z zu nehmen, wodurch $u = v = 0$ und $w^2 = \varkappa^2$ wird, und die Gleichung des Ellipsoids sich reducirt auf:

$$\mathfrak{B}''\varkappa^2 z^2 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}')(x^2 + y^2 + z^2) + 1.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Revolutions-Ellipsoids, und das Quadrat seiner halben Aequatorialaxe, $\frac{1}{s'^2} = \frac{1}{s''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}$, das Quadrat seiner halben Revolutionsaxe, die mit der Axe der z, also mit der Normale, zusammenfällt $\frac{1}{s'''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''\varkappa^2}$. Die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der beiden (sich zu einem Wellensystem vereinigenden) Lichtwellen ist alsdann gegeben durch $\omega'^2 = \omega''^2 = \frac{s'^2}{\varkappa^2} = \frac{s''}{\varkappa^2} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{\varkappa^2}$, die des dritten Wellensystems (welches kein Licht erregt) durch $\omega'''^2 = \frac{s'''^2}{\varkappa^2} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{\varkappa^2} + \mathfrak{B}''$, während man findet:

$$\mathfrak{B}' = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\varkappa} = S\left[\frac{mf(r)\cos^2\alpha}{r}\left(1 - \frac{\sin(\varkappa r\cos\alpha)}{\varkappa r\cos\alpha}\right)\right],$$

$$\mathfrak{B}'' = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial\varkappa} = \frac{1}{\varkappa^2}S\left[\frac{mf(r)\cos^2\alpha}{r}\left(\frac{\sin(\varkappa r\cos\alpha)}{\varkappa r\cos\alpha} - \cos(\varkappa r\cos\alpha)\right)\right],$$

oder wenn man blofs die ersten Potenzen von r berücksichtigt:

$$\mathfrak{A} = \varkappa^2 S\left[\frac{mrF(r)}{2!}\cos\alpha\right], \quad \mathfrak{B}' = \varkappa^2 S\left[\frac{mrf(r)\cos^4\alpha}{3!}\right],$$

$$\varkappa^2\mathfrak{B}'' = 2\varkappa^2 S\left[\frac{mrf(r)\cos^4\alpha}{3!}\right].$$

Bezeichnet man daher $S\left[\frac{mrF(r)\cos^2\alpha}{2!}\right]$ durch σ^2, und $S\left[\frac{mrf(r)\cos^4\alpha}{3!}\right]$ durch μ^2, so erhält man:

$$L = x^2(\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu^2 a^2), \quad M = x^2(\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu^2 b^2),$$
$$N = x^2(\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu^2 c^2), \quad P = 2x^2 bc\mu^2, \quad Q = 2x^2 ac\mu^2$$
$$R = 2x^2 ab\mu^2$$

und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Licht-Wellensystems $\omega^2 = \sigma^2 + \mu^2$,
für die des dritten Systems:
$$\omega^2 = \sigma^2 + 3\mu^2.$$

2) Aetherbewegung in doppelbrechenden einaxigen Mitteln.

Die Erscheinungen in den einaxigen Krystallen, zu denen der Kalkspath, der Turmalin, der Quarz (namentlich dessen Varietäten, der Bergkrystall und Amethyst), der Zirkon etc. gehören, entsprechen der Annahme, daſs die Elasticitätskräfte sich gleich verhalten für alle Well-Ebenen, deren Normalen gleiche Winkel bilden mit einer festen Linie im Krystall. Diese Richtung ist die Hauptkrystallaxe und heiſst in der Optik: Hauptaxe der Doppelbrechung, oder optische Axe. Es muſs daher das Ellipsoid dieselbe Form und dieselbe Lage gegen die Normale der Well-Ebene annehmen, so oft der Winkel zwischen der letzteren und der optischen Axe derselbe ist. Nimmt man daher die optische Axe zur Axe der z, so muſs wiederum $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ sein, unabhängig von u, v, w, welche Richtung die Axen der x und der y auch haben mögen, und die Gleichungen (19.) müssen erfüllt sein für $w = w_1$ und für jedes u, v, u_1, v_1, wenn nur $u^2 + v^2 = u_1^2 + v_1^2$ ist. Sie müssen also noch richtig sein für $v_1 = 0$, wo dann $u_1 = \pm\sqrt{u^2 + v^2} = \pm\sqrt{x^2 - w^2}$ genommen werden muſs, und lassen sich demnach schreiben:

$$22)\left\{\begin{aligned}&\mathrm{S}\left[\frac{mF(r)}{r}[1 - \cos(r[u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma])]\right]\\&= \mathrm{S}\left[\frac{mF(r)}{r}[1 - \cos(r[\pm(x^2 - w)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma])]\right],\\&\mathrm{S}\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)^2\right.\right.\\&\qquad\left.\left. + \frac{\cos[r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)]}{r^2}\right)\right]\end{aligned}\right.$$

$$22) \quad = S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}(\pm[x^2-w^2]^{\frac{1}{2}})\cos\alpha+w\cos\gamma)^2.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\cos[r(\pm(x^2-w^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)]}{r^2}\right)\right].$$

Da diese Gleichungen unabhängig von u, v, w richtig sein müssen, so müssen auch die mit gleichen Potenzen von u, v, w afficirten Glieder auf beiden Seiten einander gleich sein.

Für die Glieder der $2n$ten Dimension hat man, wenn man die Cosinus sich in Reihen entwickelt denkt:

$$S[mr^{2n-1}F(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}]$$
$$= S[mr^{2n-1}F(r)(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^{2n}],$$
$$S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^{2n}$$
$$= S[mr^{2n-3}f(r)(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha+w\cos\gamma)^{2n}],$$

und mithin, wenn man die Summenglieder nach Potenzen von w entwickelt:

$$23)\begin{cases} S[mr^{2n-1}F(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] = \\ \qquad \pm(u^2+v^2)^{n-\frac{c}{2}}S[mr^{2n-1}F(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma], \\ S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] = \\ \qquad \pm(u^2+v^2)^{n-\frac{c}{2}}S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma], \end{cases}$$

für ungerade Zahlenwerthe von c,

$$24)\begin{cases} S[mr^{2n-1}F(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] \\ \qquad = (u^2+v^2)^{n-\frac{c}{2}}S[mr^{2n-1}F(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma], \\ S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] \\ \qquad = (u^2+v^2)^{n-\frac{c}{2}}S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma], \end{cases}$$

für gerade Zahlenwerthe von c.

Die linke Seite der Gleichungen (23.) mufs gleich Null sein, da sie ihren Werth mit dem Zeichenwechsel nicht ändern darf, und daher hat man als Bedingungen:

$$25)\begin{cases} S[mr^{2n-1}F(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] = 0, \\ S[mr^{2n-3}f(r)(u\cos\alpha+v\cos\beta)^{2n-c}\cos^c\gamma] = 0, \\ S[mr^{2n-1}F(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma] = 0, \\ S[mr^{2n-3}f(r)\cos^{2n-c}\alpha\cos^c\gamma] = 0, \end{cases}$$

für ungerade Zahlenwerthe von c.

Da ferner $(u\cos\alpha + v\cos\beta)^{2n-\mathfrak{c}}$

$$= \sum\left[\frac{(2n-\mathfrak{c})!}{\mathfrak{a}!\mathfrak{b}!}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\right]$$ (für $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=2n$), $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mögen gerade oder ungerade sein, und

$$(u^2+v^2)^{n-\frac{\mathfrak{c}}{2}} = \sum\left[\frac{\left(n-\frac{\mathfrak{c}}{2}\right)!}{\frac{\mathfrak{a}}{2}!\frac{\mathfrak{b}}{2}!}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$= \sum\left[\frac{2.4.6\ldots(2n-\mathfrak{c})}{2.4\ldots\mathfrak{a}.2.4\ldots\mathfrak{b}}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$= \sum\left[\frac{1.3.5\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3.5\ldots(\mathfrak{b}-1)}{1.3.5\ldots(2n-\mathfrak{c}-1)}\cdot\frac{(2n-\mathfrak{c})}{\mathfrak{a}!\mathfrak{b}!}u^{\mathfrak{a}}v^{\mathfrak{b}}\right]$$

ist für gerade Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so erhält man genau wieder die Bedingungsgleichungen (VII.), welche dort, wie hier, nur ungerade Potenzen enthalten, nämlich:

$$S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0,$$
$$S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0,$$

während statt der Gleichungen (VIII.) hier die Gleichungen

$$\text{IX.}\begin{cases} S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] \\ \quad = \dfrac{1.3\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3\ldots(\mathfrak{b}-1)}{1.3\ldots(2n-\mathfrak{c}-1)}S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{2n-\mathfrak{c}}\alpha\cos^{\mathfrak{c}}\gamma], \\ S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] \\ \quad = \dfrac{1.3\ldots(\mathfrak{a}-1).1.3\ldots(\mathfrak{b}-1)}{1.3\ldots(2n-\mathfrak{c}-1)}S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{2n-\mathfrak{c}}\alpha\cos^{\mathfrak{c}}\gamma], \end{cases}$$

für beliebige ganze Zahlenwerthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eintreten.

Die 4 Gleichungen (VII. u. IX.) sind also die Bedingungen der Elasticität in einaxigen Krystallen, welche, wie man ersieht, die Bedingungen für die Elasticität in einfach brechenden Mitteln als Einzelfall in sich schliefsen.

Bei Vernachlässigung der höhern Potenzen von r reduciren sich dieselben auf (VII, *a.* u. VII, *b.*), und die an die Stelle von (VIII, *a.* u. VIII, *b.*) tretenden:

$$\text{IX, } a. \quad S[mrF(r)\cos^2\alpha) = S[mrF(r)\cos^2\beta],$$

$$\text{IX, } b. \begin{cases} S[mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma] = S[mrf(r)\cos^2\gamma\cos^2\alpha], \\ S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta] = \tfrac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\alpha]. \end{cases}$$

Hätte man oben statt $v_1 = 0$ zu nehmen, $u_1 = 0$ genommen, so hätte man in den Gleichungen (22, 22 *a*, 23 u. 24) auf der rechten Seite β statt α, und in (25 u. IX.)

$cos^{2n-c}\beta$ statt $cos^{2n-c}\alpha$ erhalten, so daſs noch die Bedingung:

IX, c. $S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta] = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\beta]$

hinzutritt.

Aus diesen Bedingungen läſst sich leicht das Verhältniſs der Coefficienten L, M, N, P, Q, R, und somit die Polarisationsart und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmen.

Den Gleichungen (22, a.) zufolge wird nämlich

$$\mathfrak{A} = S\left[\frac{mF(r)}{r}[1 - \cos(r[\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma])]\right],$$

$$\mathfrak{B} = S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}(\pm[u^2+v^2]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma)^2 + \frac{\cos[r(\pm(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma)]}{r^2}\right)\right].$$

Da es willkührlich ist, das (+) oder (—) Zeichen zu nehmen, so kann man statt dieser Summen die halbe Summe der Resultate nehmen, welche die Anwendung des (+) und (—) für sich liefern, und da

$$\frac{[(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma]^2 + [-(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha + w\cos\gamma]^2}{2} = (u^2+v^2)\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma$$

ist, so erhält man

$$\mathfrak{A} = S\left[\frac{mF(r)}{r}[1 - \cos(r[u^2+v^2]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha)\cos(rw\cos\gamma)]\right],$$

$$\mathfrak{B} = S\left[\frac{mf(r)}{r}\left(\frac{(u^2+v^2)\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma}{2} + \frac{\cos(r[u^2+v^2]^{\frac{1}{2}}\cos\alpha)\cos(rw\cos\gamma)}{r^2}\right)\right].$$

Bezeichnet man $\frac{u^2+v^2}{2}$ mit g, und $\frac{1}{2}w^2$ mit h, ferner $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial g}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g^2}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial h}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial h^2}$ beziehlich mit $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^{2,2}$, und $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g\,\partial h}$ mit $\mathfrak{B}^{1,2}$, so hat man, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur Functionen von g und h sind, und $\frac{\partial g}{\partial u} = u$, $\frac{\partial g}{\partial v} = v$, $\frac{\partial h}{\partial w} = w$ ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u} = u\mathfrak{B}^1, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial v} = v\mathfrak{B}^1, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial w} = w\mathfrak{B}^2,$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^2} = \mathfrak{B}^1 + u^2\mathfrak{B}^{1,1}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial v^2} = \mathfrak{B}^1 + v^2\mathfrak{B}^{1,1}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial w^2} = \mathfrak{B}^2 + w\mathfrak{B}^{2,2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial v \partial w} = vw\mathfrak{B}^{1,2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u \partial w} = uw\mathfrak{B}^{1,2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u \partial v} = uv\mathfrak{B}^{1,1}.$$

Folglich $L = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + u^2\mathfrak{B}^{1,1}$, $M = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + v^2\mathfrak{B}^{1,1}$, $N = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + w^2\mathfrak{B}^{2,2}$, $P = vw\mathfrak{B}^{1,2}$, $Q = uw\mathfrak{B}^{1,2}$, $R = uv\mathfrak{B}^{1,1}$,

und die Gleichung des Ellipsoids ist:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1)(x^2 + y^2) + \mathfrak{B}^{1,1}(ux + vy)^2 + 2\mathfrak{B}^{1,2}(ux + vy)wz + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^{2,2}w^2)z^2 = 1.$$

Diese Gleichung wird noch einfacher, wenn man, die Axe der z beibehaltend, die Ebene yz so legt, dafs sie senkrecht auf der ursprünglichen Well-Ebene steht, also deren Normale in sich enthält. Alsdann ist

$$u = 0, \quad v = \sqrt{x^2 - w^2},$$

mithin das Ellipsoid:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1)x^2 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}^{1,1}(x^2 - w^2))y^2 \pm 2\mathfrak{B}^{1,2}(x^2 - w^2)^{\frac{1}{2}}wyz + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^{2,2}w^2)z^2 = 1.$$

Die eine Axe desselben liegt in dem Durchschnitt der Well-Ebene mit der Ebene xy; die andern beiden Axen fallen mit den Axen der Ellipse zusammen, in welcher das Ellipsoid von der Ebene yz (dem Hauptschnitt, der zur Normale der Well-Ebene gehört) geschnitten wird. Die Gleichung dieser Ellipse ist:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}^{1,1}(x^2 - w^2))y^2 \pm 2\mathfrak{B}^{1,2}(x^2 - w^2)^{\frac{1}{2}}wyz + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^{2,2}w^2)z^2 = 1.$$

Sind die Halbaxen dieser Ellipse $\frac{1}{s''}$ und $\frac{1}{s'''}$, und ist die auf der Ebene der Ellipse senkrechte Halbaxe des Ellipsoids $\frac{1}{s'}$, so hat man $s'^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1$, und s''^2 und s'''^2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$[s^2 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}^{1,1}(x^2 - w^2))][s^2 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^{2,2}w^2)] - (\mathfrak{B}^{1,2})^2(x^2 - w^2)w^2 = 0.$$

Die

Die entsprechenden Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten sind dann:

$$\omega'^2 = \frac{s'^2}{\varkappa^2}, \quad \omega''^2 = \frac{s''^2}{\varkappa^2}, \quad \omega'''^2 = \frac{s'''^2}{\varkappa^2}.$$

Bringt man die Gleichung des Ellipsoids auf die Form:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)(x^2+y^2+z^2)+\mathfrak{B}^{1,1}(ux+vy+wz)^2$$
$$+2(\mathfrak{B}^{1,2}-\mathfrak{B}^{1,1})(ux+vy)wz+(\mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}^1+(\mathfrak{B}^{2,2}-\mathfrak{B}^{1,1})w^2)z^2 = 1,$$

so ist ersichtlich, dafs sich dasselbe auf das Ellipsoid der einfach brechenden Mittel reducirt, sobald $\mathfrak{B}^{1,2}-\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{2,2}-\mathfrak{B}^{1,1}$ und $\mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}^1$ verschwinden. Diese Differenzen sind der Erfahrung gemäfs bei den Krystallen sehr gering, so dafs das Ellipsoid sich wenig von einem Rotations-Ellipsoid unterscheidet, dessen Umdrehungsaxe mit der Normale der Welle zusammenfällt. In beiden lichterzeugenden Wellensystemen geschehen daher die Schwingungen sehr nahe der Well-Ebene parallel. (Das eine System hat, wie wir vorher gesehen haben, eine genau parallele Schwingungsrichtung).

1) Für den Fall, dafs die Normale der Well-Ebene in die optische Axe fällt, wird $u = v = 0$ und $w = \pm\varkappa$; das Ellipsoid wird daher:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)(x^2+y^2)+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}^{2,2}\varkappa^2)z^2 = 1,$$

und ist also ein Revolutions-Ellipsoid, in welchem das Quadrat der halben Aequatorialaxen $\frac{1}{s'^2} = \frac{1}{s''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1}$, das Quadrat der halben Rotationsaxe $\frac{1}{s'''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}^{2,2}\varkappa^2}$ ist. Das gewöhnliche und ungewöhnliche System ebener Wellen haben also längs der optischen Axe einerlei Geschwindigkeit, bestimmt durch

$$\omega'^2 = \omega''^2 = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1}{\varkappa^2};$$

beide Wellensysteme setzen sich daher zu einem einzigen zusammen. Die Geschwindigkeit des dritten Wellensystems ist bestimmt durch

$$\omega'''^2 = \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2}{\varkappa^2}+\mathfrak{B}^{2,2}.$$

2) Wenn die Ebene der Welle der optischen Axe parallel ist, also ihre Normale senkrecht auf derselben steht, so ist $w = 0$, die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)x^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1+\mathfrak{B}^{1,1}x^2)y^2+(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)z^2 = 1,$$

und daher $s'^2 = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1$, $s''^2 = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2$, $s'''^2 = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}^{1,1}x^2$. Die Polarisationsrichtungen der beiden lichtgebenden Wellen liegen also in der Well-Ebene, und zwar die eine in der optischen Axe, die andere senkrecht auf derselben. Die dritte, unwirksame, Welle dagegen ist senkrecht gegen die Well-Ebene polarisirt.

3) Aetherbewegung in doppelbrechenden symmetrisch zweiaxigen Mitteln.

Symmetrisch zweiaxige Mittel nenne ich diejenigen ein- und einaxigen Krystalle der Mineralogen, welche in der Lage ihrer Flächen eine vollkommene Symmetrie gegen drei sich deutlich in der Krystallform aussprechende und auf einander senkrechte Richtungen zeigen (siehe Anm. p. 9.). Zu ihnen gehört der Topas, der Arragonit, der Salpeter, der zweiaxige Glimmer, der Schwerspath etc.

Die Lichterscheinungen in diesen Krystallen entsprechen der Annahme, dafs die Elasticitätskräfte sich gleich verhalten für alle Well-Ebenen, deren Normalen gleiche Winkel bilden mit drei auf einander senkrechten Richtungen, welche in jedem Krystall eine feste Lage haben, Axen doppelter Brechung oder Elasticitätsaxen heifsen, und mit den Krystallaxen zusammenfallen. Die Axen sind in Bezug auf die Gleichheit der Winkel mit den Normalen absolut zu denken, d. h. es ist abzusehen von dem Unterschied zwischen positiven und negativen Halbaxen, so dafs es stets in jedem der 8 Räume, welche durch die Axen abgetheilt werden, eine Normale giebt, deren Well-Ebene das gleiche Verhalten gegen das Licht zeigt.

Nimmt man die Elasticitätsaxen zu Coordinatenaxen, so sind die Bedingungen der betreffenden Elasticität daher $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$ für jedes u, v, w; u_1, v_1, w_1, wel-

ches den Gleichungen $u = \pm u_1$, $v = \pm v_1$, $w = \pm w_1$ genügt. Da demnach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich nicht ändern dürfen, wenn u oder v oder w sein Zeichen wechselt, so müssen die Summen der Glieder, welche ungerade Potenzen dieser Gröfsen enthalten, verschwinden, so dafs wiederum die Gleichungen (XV.) Bedingungsgleichungen sind, nämlich

$$S[mF(r)r^{2n-1}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0$$
$$S[mf(r)r^{2n-3}\cos^{\mathfrak{a}}\alpha\cos^{\mathfrak{b}}\beta\cos^{\mathfrak{c}}\gamma] = 0,$$

und zwar die einzigen Bedingungsgleichungen, da, wenn dieselben bestehen, nothwendig der obigen Annahme genügt wird.

Bei der Vernachlässigung der höhern Potenzen von r reduciren sich dieselben wiederum auf (VII, a. VIII, a.).

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind daher blofs Funktionen von u^2, v^2, w^2, und man hat also, wenn man $\frac{1}{2}u^2 = g$, $\frac{1}{2}v^2 = h$, $\frac{1}{2}w^2 = i$ setzt, und $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial g}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial h}$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial i}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial h^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial i^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial h\partial i}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g\partial i}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial g\partial h}$ beziehlich mit $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^3$, $\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{2,2}$, $\mathfrak{B}^{3,3}$, $\mathfrak{B}^{2,3}$, $\mathfrak{B}^{1,3}$, $\mathfrak{B}^{1,2}$ bezeichnet: $\frac{\partial g}{\partial u} = u$, $\frac{\partial h}{\partial v} = v$, $\frac{\partial i}{\partial w} = w$,

$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial u} = u\mathfrak{B}^1$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial v} = v\mathfrak{B}^2$, $\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial w} = w\mathfrak{B}^3$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u^2} = \mathfrak{B}^1 + u^2\mathfrak{B}^{1,1}$,

$\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v^2} = \mathfrak{B}^2 + v^2\mathfrak{B}^{2,2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial w^2} = \mathfrak{B}^3 + w^2\mathfrak{B}^{3,3}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial v\partial w} = vw\mathfrak{B}^{2,3}$,

$\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\partial w} = uw\mathfrak{B}^{1,3}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial u\partial v} = uv\mathfrak{B}^{1,2}$.

Substituirt man diese Werthe in L, M, N, P, Q, R, so erhält man:

$$L = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + u^2\mathfrak{B}^{1,1}, \quad M = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + v^2\mathfrak{B}^{2,2},$$
$$N = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^3 + w^2\mathfrak{B}^{3,3}, \quad P = vw\mathfrak{B}^{2,3}, \quad Q = uw\mathfrak{B}^{1,3},$$
$$R = uv\mathfrak{B}^{1,2},$$

und die Gleichung des Ellipsoids wird:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1 + u^2\mathfrak{B}^{1,1})x^2 + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2 + v^2\mathfrak{B}^{2,2})y^2$$
$$+ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^3 + w^2\mathfrak{B}^{3,3})z^2 + 2vw\mathfrak{B}^{2,3}yz + 2uw\mathfrak{B}^{1,3}xz$$
$$+ 2uv\mathfrak{B}^{1,2}xy = 1.$$

Für die Fälle, in denen die Normale der primitiven

Well-Ebene mit einer der Elasticitätsaxen zusammenfällt, ergeben sich folgende einfache Resultate:

1) Wenn die Normale der Well-Ebene in der Richtung der Axe der z liegt, ist $u = 0$, $v = 0$, $w = \pm x$, also das Ellipsoid:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_w x^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_w y^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3+x^2\mathfrak{B}^{3,3})_w z^2 = 1,$$

wo die angehängten w bedeuten, dafs die betreffenden Ausdrücke nur w enthalten, und aus den allgemeinen Ausdrücken dadurch entstanden sind, dafs die übrigen Variabeln (u und v) gleich Null gesetzt sind.

Die Form der Gleichung zeigt, dafs die Axen des Ellipsoids mit den Elasticitätsaxen zusammen fallen. Die Gröfse derselben ist bestimmt durch $\frac{1}{s'^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1}$, $\frac{1}{s''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2}$, $\frac{1}{s'''^2} = \frac{1}{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3+x^2\mathfrak{B}^{3,3}}$, und daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten: $\omega'^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_w}{x^2}$, $\omega''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_w}{x^2}$ für die beiden Lichtwellensysteme, $\omega'''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_w}{x^2} + \mathfrak{B}_w^{3,3}$ für das dritte System.

2) Wenn die Normale der Well-Ebene in der Richtung der Axe der y liegt, ist $u = 0$, $v = \pm x$, $w = 0$, also die Gleichung des Ellipsoids:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_v x^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2+x^2\mathfrak{B}^{2,2})_v y^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_v z^2 = 1,$$

wo das angehängte v die dem angehängten w analoge Bedeutung hat. Die Axen dieser Fläche fallen daher wiederum in die Elasticitätsaxen, und ihre Werthe sind gegeben durch $s'^2 = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_v}$, $s''^2 = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}^{2,2}x^2)_v}$, $\frac{1}{s'''^2} = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_v}$; folglich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch: $\omega'^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_v}{x^2}$, $\omega'''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_v}{x^2}$ für die Lichtwellen, durch $\omega''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_v}{x^2} + \mathfrak{B}_v^{2,2}$ für das dritte System.

3) Wenn die Normale der Well-Ebene mit der Axe der x zusammenfällt, ist $u = \pm x$, $v = 0$, $w = 0$, und man hat für das Ellipsoid:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1+x^2\mathfrak{B}^{1,1})_u x^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_u y^2 + (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_u z^2 = 1.$$

Es coincidiren somit die Ellipsoidsaxen mit den Elasticitätsaxen, und man hat: $\frac{1}{s'^2} = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1+x^2\mathfrak{B}^{1,1})_u}$, $\frac{1}{s''^2} = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_u}$, $\frac{1}{s'''^2} = \frac{1}{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_u}$, folglich: $\omega''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^2)_u}{x^2}$, $\omega'''^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^3)_u}{x^2}$ für die Lichtwellen, $\omega'^2 = \frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^1)_u}{x^2} + \mathfrak{B}^{1,1}$ für das dritte System.

Läfst man die mit r^2 und den höhern Potenzen von r multiplicirten Glieder aufser Acht, so ergiebt sich in Rücksicht auf die Gleichungen (VII, a. VII, b.)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}S[mrF(r)(u^2\cos^2\alpha + v^2\cos^2\beta + w^2\cos^2\gamma)],$$

$$\mathfrak{B} = S\left(\frac{mf(r)}{r^8}\right) + \frac{1}{4!}S[mrf(r)(u^4\cos^4\alpha + v^4\cos^4\beta + w^4\cos^4\gamma$$
$$+ 6u^2v^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 6v^2w^2\cos^2\beta\cos^2\gamma + 6u^2w^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma)],$$

$$\mathfrak{B}^1 = \frac{1}{3!}S[mrf(r)(u^2\cos^2\alpha + 3v^2\cos^2\beta + 3w^2\cos^2\gamma)\cos^2\alpha],$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{1}{3!}S[mrf(r)(3u^2\cos^2\alpha + v^2\cos^2\beta + 3w^2\cos^2\gamma)\cos^2\beta],$$

$$\mathfrak{B}^3 = \frac{1}{3!}S[mrf(r)(3u^2\cos^2\alpha + 3v^2\cos^2\beta + w^2\cos^4\gamma)\cos^2\gamma],$$

$\mathfrak{B}^{1,1} = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\alpha]$, $\mathfrak{B}^{2,2} = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\beta]$,
$\mathfrak{B}^{3,3} = \frac{1}{3}S[mrf(r)\cos^4\gamma]$, $\mathfrak{B}^{1,2} = S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta]$,
$\mathfrak{B}^{1,3} = S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\gamma]$, $\mathfrak{B}^{2,3} = S[mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma]$.

Der bequemern Uebersicht wegen führe man folgende Abkürzungen ein:

$$26)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}S[mrF(r)\cos^2\alpha] = \sigma'^2 \\ \frac{1}{2}S[mrF(r)\cos^2\beta] = \sigma''^2 \\ \frac{1}{2}S[mrF(r)\cos^2\gamma] = \sigma'''^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^2\beta\cos^2\gamma] = \mu^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\gamma] = \nu^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^2\alpha\cos^2\beta] = \pi^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^4\alpha] = q^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^4\beta] = p^2 \\ \frac{1}{2}S[mrf(r)\cos^4\gamma] = o^2, \end{cases}$$

so dafs man nun erhält:

$$27)\ \begin{cases} \mathfrak{A} = (\sigma'^2 a^2 + \sigma''^2 b^2 + \sigma'''^2 c^2) x^2 \\ \mathfrak{B}^1 = (\frac{1}{3} q^2 a^2 + \pi^2 b^2 + \nu^2 c^2) x^2 \\ \mathfrak{B}^2 = (\pi^2 a^2 + \frac{1}{3} p^2 b^2 + \mu^2 c^2) x^2 \\ \mathfrak{B}^3 = (\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2 + \frac{1}{3} o^2 c^2) x^2 \\ \mathfrak{B}^{1,1} = \frac{2}{3} q^2, \quad \mathfrak{B}^{2,2} = \frac{2}{3} p^2, \quad \mathfrak{B}^{3,3} = \frac{2}{3} o^2, \\ \mathfrak{B}^{1,2} = 2\pi^2, \quad \mathfrak{B}^{1,3} = 2\nu^2, \quad \mathfrak{B}^{2,3} = 2\mu^2, \end{cases}$$

und folglich:

$$L = [(\sigma'^2 + q^2) a^2 + (\sigma''^2 + \pi^2) b^2 + (\sigma'''^2 + \nu^2) c^2] x^2,$$
$$M = [(\sigma'^2 + \pi^2) a^2 + (\sigma''^2 + p^2) b^2 + (\sigma'''^2 + \mu^2) c^2] x^2,$$
$$N = [(\sigma'^2 + \nu^2) a^2 + (\sigma''^2 + \mu^2) b^2 + (\sigma'''^2 + o^2) c^2] x^2,$$
$$P = 2bc\mu^2 x^2, \quad Q = 2ac\nu^2 x^2, \quad R = 2ab\pi^2 x^2.$$

Sind nun ω' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der nach der Axe der x, ω'' die nach der Axe der y, ω''' die nach der Axe der z polarisirten Wellensysteme, so hat man daher

1) wenn die Wellen-Ebene senkrecht auf der Axe der z steht:

$$\omega_w'^2 = \sigma'''^2 + \nu^2, \quad \omega_w''^2 = \sigma'''^2 + \mu^2, \quad \omega_w'''^2 = \sigma'''^2 + o^2,$$

2) wenn die Wellen-Ebene senkrecht auf der Axe der y steht:

$$\omega_v'^2 = \sigma''^2 + \pi^2, \quad \omega_v''^2 = \sigma''^2 + p^2, \quad \omega_v'''^2 = \sigma''^2 + \mu^2,$$

3) wenn die Wellen-Ebene senkrecht auf der Axe der x steht:

$$\omega_u'^2 = \sigma'^2 + q^2, \quad \omega_u'^2 = \sigma'^2 + \pi^2, \quad \omega_u'''^2 = \sigma'^2 + \nu^2.$$

Wenn σ'^2, σ''^2, σ'''^2 verschwindend klein gegen die anderen Constanten μ, ν, π, o, p, q sind, wie es in der That für die Elasticitätsverhältnisse des Aethers zu sein scheint, so ergiebt sich:

$$\omega_w'^2 = \omega_u'''^2 = \nu^2, \quad \omega_w''^2 = \omega_v'''^2 = \mu^2, \quad \omega_v'^2 = \omega_u''^2 = \pi^2,$$
$$\omega_w'''^2 = o^2, \quad \omega_v''^2 = p^2, \quad \omega_u'^2 = q^2;$$

so dafs also die nach derselben Axe polarisirten Lichtwellensysteme einerlei Geschwindigkeit haben.

Die allgemeinen Werthe von L, M, N, P, Q, R werden unter jener Bedingung

$$28)\ \begin{cases} L = (q^2 a^2 + \pi^2 b^2 + \nu^2 c^2) x^2 \\ M = (\pi^2 a^2 + p^2 b^2 + \mu^2 c^2) x^2 \\ N = (\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2 + o^2 c^2) x^2 \\ P = 2bc\mu^2 x^2, \quad Q = 2ac\nu^2 x^2, \quad R = 2ab\pi^2 x^2, \end{cases}$$

so dafs die Gleichung (V, *a.*), welche die Axen des Ellipsoids, und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmt, wird: (29)

$$(q^2a^2+\pi^2b^2+\nu^2c^2-\omega^2)(\pi^2a^2+p^2b^2+\mu^2c^2-\omega^2)(\nu^2a^2+\mu^2b^2+o^2c^2-\omega^2)$$
$$-4b^2c^2\mu^4(q^2a^2+\pi^2b^2+\nu^2c^2-\omega^2)-4a^2c^2\nu^4(\pi^2a^2+p^2b^2+\mu^2c^2-\omega^2)$$
$$-4a^2b^2\pi^4(\nu^2a^2+\mu^2b^2+o^2c^2-\omega^2)+16a^2b^2c^2\mu^2\nu^2\pi^2=0.$$

Die Gröfsen μ, ν, π, o, p, q sind, wenn man von sehr unbedeutenden Differenzen absieht, durch folgende Relationen unter einander verbunden:

$$30)\quad \begin{cases} (o^2-\mu^2)(p^2-\mu^2) = 4\mu^4 \\ (o^2-\nu^2)(q^2-\nu^2) = 4\nu^4 \\ (p^2-\pi^2)(q^2-\pi^2) = 4\pi^4. \end{cases}$$

Man überzeugt sich von der Richtigkeit derselben, wenn man bedenkt, dafs $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^3$, da sie verschwinden, sobald die Elasticität in allen Richtungen gleich ist, von den, der Erfahrung zufolge sehr kleinen, Elasticitätsunterschieden abhängen: dafs daher die nach u, v, w abgeleiteten Funktionen dieser Gröfsen von Gröfsen abhängen, welche man in Absicht auf ihren Werth als von der zweiten Ordnung der Elasticitäts-Unterschiede betrachten kann. Man wird sich daher sehr wenig von der Wahrheit entfernen, wenn man die Differenzen der Unterschiede zwischen den gleichnamigen abgeleiteten Funktionen als verschwindend klein ansieht, und somit

$$\mathfrak{B}^{3,3}-\mathfrak{B}^{3,2}=\mathfrak{B}^{1,3}-\mathfrak{B}^{1,2},\quad \mathfrak{B}^{2,3}-\mathfrak{B}^{2,2}=\mathfrak{B}^{1,3}-\mathfrak{B}^{1,2}\ \text{und}$$
$$\mathfrak{B}^{1,1}-\mathfrak{B}^{1,3}=\mathfrak{B}^{2,1}-\mathfrak{B}^{2,3}\ \text{d. h.}$$
$$\tfrac{1}{3}o^2-\mu^2=\nu^2-\pi^2,\ \tfrac{1}{3}p^2-\mu^2=\pi^2-\nu^2,\ \tfrac{1}{3}q^2-\nu^2=\pi^2-\mu^2$$

annimmt. Man findet hieraus: (31)

$$\tfrac{1}{3}o^2=\mu^2+\nu^2-\pi^2,\ \tfrac{1}{3}p^2=\pi^2+\mu^2-\nu^2,\ \tfrac{1}{3}q^2=\nu^2+\pi^2-\mu^2,$$

$$32)\quad \begin{cases} o^2-\mu^2=2\mu^2-3(\pi^2-\nu^2), & o^2-\nu^2=2\nu^2-3(\pi^2-\mu^2), \\ p^2-\mu^2=2\mu^2+3(\pi^2-\nu^2), & q^2-\nu^2=2\nu^2+3(\pi^2-\mu^2), \\ \quad p^2-\pi^2=2\pi^2-3(\nu^2-\mu^2), & \\ \quad q^2-\pi^2=2\pi^2+3(\nu^2-\mu^2). & \end{cases}$$

Multiplicirt man die unter einander stehenden Gleichungen, so ergeben sich unmittelbar die obigen Relationen, sobald man die Quadrate der sehr kleinen Differenzen: $\pi^2-\nu^2$, $\pi^2-\mu^2$, $\nu^2-\mu^2$ unberücksichtigt läfst.

Auf Grund dieser Relationen zerfällt die Gleichung (29) in folgende zwei Faktoren:

33) $\omega^2 - (q^2 a^2 + p^2 b^2 + o^2 c^2) = 0,$

34) $\omega^4 - [(\nu^2 + \pi^2) a^2 + (\mu^2 + \pi^2) b^2 + (\nu^2 + \mu^2) c^2] \omega^2 + (\nu\pi a)^2 + (\mu\pi b)^2 + (\nu\mu c)^2 = 0.$

Der erste dieser Faktoren (33) gehört dem Wellensystem an, welches als auf das Gesicht nicht wirkend angenommen ist; der zweite Faktor gehört den beiden Licht-Wellensystemen an.

Aus dem Vorigen läfst sich leicht die Bewegung der ebenen Wellen bestimmen, wenn ihre Normalen in einen der Hauptschnitte fallen.

1) Wenn die Normalen in den Hauptschnitt yz fallen, wird $a = 0$, und mithin die Gleichung (34):

$$\omega^4 - \omega^2 [(\mu^2 + \pi^2) b^2 + (\nu^2 + \mu^2) c^2] + \mu^2 \pi^2 b^2 + \nu^2 \mu^2 c^2 = 0,$$

welche man wegen $\mu^2 = \mu^2 b^2 + \mu^2 c^2$ auf die Form

$$(\mu^2 - \omega^2)(\pi^2 b^2 + \nu^2 c^2 - \omega^2) = 0$$

bringen kann. Die Geschwindigkeit desjenigen Wellensystems, welches dem ersten Faktor entspricht, ist daher constant und gleich μ, für jede Lage der Normale in dem Hauptschnitt. Das dem zweiten Faktor entsprechende Wellensystem hat eine veränderliche Geschwindigkeit. Die Form $\omega^2 = \pi^2 b^2 + \nu^2 c^2$ lehrt, dafs diese Geschwindigkeit dem umgekehrten Werth eines Radius Vektors einer Ellipse proportional ist, deren Axen beziehlich gleich π und ν sind, und zwar desjenigen Radius Vektors, welcher mit den Axen der Ellipse Winkel bildet, deren Cosinus c und b sind. Denkt man sich die Axe π mit der Axe der z, die Axe ν mit der Axe der y zusammenfallend, so ist die Richtung der Normale zugleich die Richtung des in Rede stehenden Radius Vektors.

Man wäre zu demselben Resultat und mit derselben Leichtigkeit gekommen, wenn man unmittelbar von der Gleichung (V, a.) ausgegangen wäre. Dieselbe reducirt sich nämlich für $a = 0$, (da $Q = R = 0$ wird) auf

$$(L - s^2)[(M - s^2)(N - s^2) - P^2] = 0, \text{ d. h. auf}$$

$$\pi^2 b^2 + \nu^2 c^2 - \omega^2 = 0 \text{ und}$$

$$(p^2 b^2 + \mu^2 c^2 - \omega^2)(\mu^2 b^2 + o^2 c^2 - \omega^2) - 4 b^2 c^2 \mu^2 = 0,$$

während die letzte Gleichung zerfällt, wegen

$$4\mu^4 = (o^2 - \mu^2)(p^2 - \mu^2)$$

in: $\mu^2 - \omega^2 = 0$ und $\omega^2 - (p^2 b^2 + o^2 c^2) = 0$.

Was die Schwingungsrichtung in diesen Wellensystemen anlangt, so ist die Gleichung des Ellipsoids für den betreffenden Fall (für $a = 0$)

$$(\pi^2 b^2 + \nu^2 c^2) x^2 + (p^2 b^2 + \mu^2 c^2) y^2 + (\mu^2 b^2 + o^2 c^2) z^2 + 4\mu^2 bcyz = 1,$$

folglich ist der Durchschnitt desselben mit der Ebene xz die Ellipse: $(\pi^2 b^2 + \nu^2 c^2) x^2 + (\mu^2 b^2 + o^2 c^2) z^2 = 1$;

deren eine Axe $\dfrac{1}{\sqrt{(\pi^2 b^2 + \nu^2 c^2)}}$ mit der Axe der x, und wie man sieht auch mit einer der Axen des Ellipsoids zusammenfällt. Das Licht-Wellensystem, dessen Geschwindigkeit veränderlich ist, schwingt daher der Axe der x parallel, mithin das System mit der constanten Geschwindigkeit μ parallel der Ebene des Hauptschnitts.

2) Wenn die Normale der Well-Ebene in den Hauptschnitt xz fällt, so findet sich auf dieselbe Weise, daſs das eine System der Lichtwellen die constante Geschwindigkeit ν hat, und dem Hauptschnitt parallel polarisirt ist, und daſs das andere System nach der Axe der y (also senkrecht auf den Hauptschnitt) polarisirt ist und die Geschwindigkeit $\sqrt{(\pi^2 a^2 + \mu^2 c^2)}$ hat, die sich als dem umgekehrten Werth des in der Richtung der Normale liegenden Radius Vektor der Ellipse proportional erweist, welche über den Axen π und μ construirt ist, so daſs π mit der Axe der z, μ mit der Axe der x zusammenfällt.

3) Wenn die Normale der Well-Ebene in den Hauptschnitt xy fällt, so ist wiederum das eine System nach dem Hauptschnitt polarisirt und hat die constante Geschwindigkeit π; das andere ist senkrecht auf den Hauptschnitt polarisirt und hat die Geschwindigkeit $\sqrt{(\nu^2 a^2 + \mu^2 b^2)}$.

Bestimmung der Geschwindigkeit ebener Wellen durch die Elasticitätsfläche.

Die einfachste Form, auf welche sich die Gleichung (34) bringen läfst, welche die Fortpflanzungsgdschwindigkeit ebener Lichtwellen bestimmt, ist:

$$\text{X.} \quad \frac{a^2}{\omega^2-\mu^2}+\frac{b^2}{\omega^2-\nu^2}+\frac{c^2}{\omega^2-\pi^2}=0.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung lassen sich durch eine einfache geometrische Construction als Linien darstellen, nämlich als die auf einander senkrechten Axen derjenigen Schnittfigur, welche entsteht, wenn man die Fresnelsche Elasticitätsfläche, deren Gleichung

$$\text{XI.} \quad \varrho^2 = a^2\mu^2+b^2\nu^2+c^2\pi^2$$

ist (wo ϱ den Radius Vektor und a, b, c die Cosinus der Winkel derselben mit den Coordinaten- (Elasticitäts-) Axen sind), durch eine Ebene schneidet, die durch den Mittelpunkt geht und der Well-Ebene parallel ist.

Um die Richtigkeit dieser Construction zu beweisen, forme man die Gleichung (X.) nach und nach um in:

$$a^2(\omega^2-\nu^2)(\omega^2-\pi^2)+b^2(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\pi^2) + c^2(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2)=0,$$

$$a^2(\omega^2-\nu^2)\omega^2-a^2(\omega^2-\nu^2)\pi^2+b^2(\omega^2-\mu^2)\omega^2-b^2(\omega^2-\mu^2)\pi^2 + c^2(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2)=0,$$

oder wenn man $a^2(\omega^2-\nu^2)+b^2(\omega^2-\mu^2)$ durch h bezeichnet, in $\omega^2 h+c^2(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2)=\pi^2 h,$

$$\omega^2 h^2+c^2(\omega^2-\mu^2)(\omega^2-\nu^2)h=\pi^2h^2,$$

oder für h im zweiten Gliede seinen Werth setzend:

$$\omega^2[h^2+a^2c^2(\omega^2-\nu^2)^2+b^2c^2(\omega^2-\mu^2)^2] = a^2c^2(\omega^2-\nu^2)^2\mu^2+b^2c^2(\omega^2-\mu^2)^2\nu^2+\pi^2h^2.$$

Setzt man hierin

$$\frac{a^2c^2(\omega^2-\nu^2)^2}{h^2}=k_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{b^2c^2(\omega^2-\mu^2)^2}{h^2}=k_2^2,$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$35) \quad \omega^2[1+k_1^2+k_2^2]=\mu^2k_1^2+\nu^2k_2^2+\pi^2.$$

Man sieht hieraus, dafs ω^2 ein Werth von ϱ^2 der Fläche (XI.) ist für die Fälle, in denen

$$a^2 = \frac{k_1^2}{1+k_1^2+k_2^2},\quad b^2 = \frac{k_2^2}{1+k_1^2+k_2^2},\quad c^2 = \frac{1}{1+k_1^2+k_2^2}$$

wird, d. h. in denen der Radius-Vektor mit der Linie

$$36)\quad x = k_1 z,\quad y = k_2 z$$

zusammenfällt. Soll nun die Construction richtig sein, so mufs diese Linie 1) der Well-Ebene parallel; d. h.

$$37)\quad ak_1 + bk_2 + c = 0 \text{ sein,}$$

2) mit dem gröfsten und kleinsten Halbmesser der Curve zusammenfallen, in welcher die Elasticitätsfläche von der Ebene

$$38)\quad ax + by + cz = 0 \text{ geschnitten wird.}$$

Sollen die aus (35) bestimmten Werthe von ω ein Maximum oder Minimum des Halbmessers ϱ sein in der durch (XI. und 38) oder was dasselbe sein mufs, in der durch (XI. und 37) bestimmten Curve, so mufs das Differenzial $\frac{\partial\omega}{\partial k_1}$ oder $\frac{\partial\omega}{\partial k_2}$, aus (35 und 37) abgeleitet, verschwinden, d. h. es mufs $(\omega^2-\mu^2)k_1 + (\omega^2-\nu_1^2)k^2\frac{\partial k_2}{\partial k_1} = 0$ sein, wenn $\frac{\partial k_2}{\partial k_1}$ aus (37), nämlich durch $a + b\frac{\partial k_2}{\partial k_1} = 0$ bestimmt wird. Eliminirt man mittelst der letzten Gleichung aus der vorigen $\frac{\partial k_2}{\partial k_1}$, so erhält man in Verbindung mit (37):

$$39)\quad k_1 = -\frac{ac(\omega^2-\nu^2)}{h} \text{ und } k_2 = -\frac{bc(\omega^3-\mu^2)}{\omega},$$

folglich die Werthe, welche der Gleichung (X.) entsprechen.

Kreisschnitte der Elasticitätsfläche. Optische Axen.

Wenn der Durchschnitt der Elasticitätsfläche mit der Well-Ebene ein Kreis wird, so dafs die beiden Axen desselben einander gleich werden, so pflanzen sich die Bewegungen in den beiden zusammengehörigen Lichtwellen gleich schnell fort. Die Existenz solcher Kreisschnitte ist erwiesen, sobald die Durchschnittslinien der Elasticitätsfläche $\varrho^2 = \mu^2 a^2 + \nu^2 b^2 + \pi^2 c^2$, deren Gleichung auf rechtwinklige Coordi-

naten bezogen

40) $(x^2+y^2+z^2)^2 = \mu^2 x^2+\nu^2 y^2+\pi^2 z^2$

ist, mit einer Kugelfläche:

41) $x^2+y^2+z^2 = r^2$

ebene Curven sind, d. h. eine Ebene

42) $z = \alpha x+\beta y$

hineinfallen; oder mit andern Worten, sobald die Gleichungen (40, 41, 42) für reelle Werthe von α, β, r gleichzeitig bestehen.

Aus der Verbindung von (40 und 41) erhält man:

$$\mu^2 x^2+\nu^2 y^2+\pi^2 z^2 = r^4,$$

und wenn man z mittelst (42) eliminirt:

$$x^2(\mu^2+\alpha^2\pi^2)+y^2(\nu^2+\beta^2\pi^2)+2\alpha\beta\pi^2 xy = r^4.$$

Ferner giebt die Verbindung von (41 und 42):

$$x^2(1+\alpha^2)+y^2(1+\beta^2)+2\alpha\beta xy = r^2.$$

Sollen nun die beiden letzten Gleichungen zugleich existiren, so mufs:

$$43)\quad \frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2} = \frac{\nu^2+\beta^2\pi^2}{\mu^2+\alpha^2\pi^2},$$

$$44)\quad \frac{2\alpha\beta}{1+\alpha^2} = \frac{2\alpha\beta\pi^2}{\mu^2+\alpha^2\pi^2},$$

$$45)\quad \frac{r^2}{1+\alpha^2} = \frac{r^4}{\mu^2+\alpha^2\pi^2}$$

sein. Die Gleichung (44) erfordert, dafs entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ ist. Für $\alpha = 0$ findet man das zugehörige β aus (43) $\beta = \pm\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\nu^2}}$, welches nur reell wird, wenn ν der kleinste der drei Werthe μ, ν, π ist. Für $\beta = 0$ erhält man $\alpha = \pm\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}$, welches nur reel wird, wenn ν der Gröfse nach zwischen π und μ liegt.

Zur Fixirung der Begriffe sei ein für allemal π der gröfste, μ der kleinste Werth der Elasticitätsaxen, also für die Kreisschnitte

$$\beta = o,\quad \alpha = \pm\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}} \text{ und wegen (45) } r^2 = \nu^2.$$

Es giebt also zwei Kreisschnitte: $z = + x\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}$

und $z = - x\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}}$, welche durch die Axe der y gehen, und gleiche Winkel mit der Axe der z bilden, so dafs der Winkel zwischen den Kreisschnitten von der Ebene yz halbirt wird. Die Normalen der Kreisschnitte heifsen die optischen Axen.

Ist n der Winkel, den dieselben mit der Axe der z bilden, so hat man:

XII. $tg^2 n = \frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}$, $cos^2 n = \frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$, $sin^2 n = \frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}$.

Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Lichtwellensysteme, deren Well-Ebenen einem der Kreisschnitte parallel sind, ist $= r = \nu$.

Die Ebene xz, in welcher die beiden optischen Axen liegen, heifst die Ebene der optischen Axen.

Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Lage der Welle gegen die optischen Axen.

Die Gleichung (34) liefert als Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}[a^2(\pi^2+\nu^2)+b^2(\pi^2+\mu^2)+c^2(\nu^2+\mu^2)]$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{([a^2(\pi^2+\nu^2)+b^2(\pi^2+\mu^2)+c^2(\nu^2+\mu^2)]^2 - 4[\pi^2\nu^2a^2+\pi^2\mu^2b^2+\nu^2\mu^2c^2])},$$

oder nach einigen Reductionen:

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}[\mu^2+\nu^2+\pi^2-(a^2\mu^2+b^2\nu^2+c^2\pi^2]$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{([a^2(\pi^2-\nu^2)+b^2(\pi^2-\mu^2)+c^2(\nu^2-\mu^2)]^2 - 4a^2c^2(\nu^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2))}.$$

Bezeichnet man die beiden Werthe von ω^2 mit o^2 und e^2, so wird daher

$$e^2+o^2 = \mu^2+\nu^2+\pi^2-(a^2\mu^2+b^2\nu^2+c^2\pi^2)$$
$$e^2-o^2 = \sqrt{([a^2(\pi^2-\nu^2)+b^2(\pi^2-\mu^2)+c^2(\nu^2-\mu^2)]^2 - 4a^2c^2(\nu^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2))}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel, welche die Normale der Well-Ebene mit den optischen Axen bildet, mit

u und u', so erhält man, insofern $\pm\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}$, 0 und $\sqrt{\frac{\pi-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die optischen Axen beziehlich mit den Axen der x, y, z bilden;

$$46)\quad \begin{cases} \cos u = \dfrac{c\sqrt{\pi^2-\nu^2}+a\sqrt{\nu^2-\mu^2}}{\sqrt{\pi^2-\mu^2}}, \\ \cos u' = \dfrac{c\sqrt{\pi^2-\nu^2}-a\sqrt{\nu^2-\mu^2}}{\sqrt{\pi^2-\mu^2}}, \end{cases}$$

folglich $47)\ (\pi^2-\mu^2)\cos u\cos u' = a^2\mu^2+b^2\nu^2+c^2\pi^2-\nu^2$
$$= \pi^2+\mu^2-(o^2+e^2),$$

ferner $\sin u = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-\mu^2}}\sqrt{[a^2(\pi^2-\nu^2)+b^2(\pi^2-\mu^2)}$
$$+c^2(\nu^2-\mu^2)-2ac\sqrt{(\nu^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2)}],$$

$$\sin u' = \frac{1}{\sqrt{\pi^2-\mu^2}}\sqrt{[a^2(\pi^2-\nu^2)+b^2(\pi^2-\mu^2)}$$
$$+c^2(\nu^2-\mu^2)+2ac\sqrt{(\nu^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2)}],$$

folglich $48)\ (\pi^2-\mu^2)\sin u\sin u' = \sqrt{([a^2(\pi^2-\nu^2)}$
$$+b^2(\pi^2-\mu^2)+c^2(\nu^2-\mu^2)]^2-4a^2c^2(\nu^2-\mu^2)(\pi^2-\nu^2))$$
$$= e^2-o^2.$$

Durch die Verbindung der Gleichungen (47 und 48) erhält man alsdann:

$$\text{XIII.}\quad \begin{cases} o^2 = \dfrac{\pi^2+\mu^2}{2}-\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u-u'), \\ e^2 = \dfrac{\pi^2+\mu^2}{2}-\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\cos(u+u'). \end{cases}$$

Hierbei sind unter u und u' die Winkel zu verstehen, welche die Normale mit den optischen Halbaxen bildet, die zu beiden Seiten der Elasticitäts-Halbaxe π liegen. Nennt man aber u und u' die Winkel, welche die Normale mit den optischen Halbaxen bildet, welche einen spitzen Winkel unter sich bilden, so fallen diese Werthe von u und u' mit den obigen nur dann zusammen, wenn $n < 45^0$ ist. Man pflegt in diesem Fall die Krystalle negativ zu nennen, und nennt dann das Wellensystem, dessen Geschwindigkeit o ist, das gewöhnliche, und das-

jenige, dessen Geschwindigkeit e ist, das ungewöhnliche. Die Krystalle dagegen, für welche $n > 45^0$ ist, nennt man positiv, und für sie mufs u in den Formeln (XIII.) durch $180 - u$ oder u' durch $180 - u'$ ersetzt werden, wenn man u und u' in dem neuen Sinne gebraucht. Alsdann liefert die erste Gleichung (XIII.) die Geschwindigkeit desjenigen Systems, welches man das ungewöhnliche nennt, die zweite Gleichung die des gewöhnlichen. Bezeichnet man, um den Gröfsen o und e eine übereinstimmende Bedeutung zu geben, mit o die Geschwindigkeit des gewöhnlichen, mit e die des ungewöhnlichen Systems, so erhält man aus (XIII.) für die positiven Krystalle, indem man $180 - u$ oder $180 - u'$ statt u oder u' setzt,

$$\text{XIII, } a. \quad \begin{cases} o^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u - u'), \\ e^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u + u'). \end{cases}$$

Subtrahirt man die Gleichungen (XIII.) oder XIII, $a.$), so erhält man:

$$o^2 - e^2 = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin u \sin u'.$$

Diese Gleichung, in Worte gefafst, giebt folgendes Gesetz: die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeit in den gewöhnlichen und ungewöhnlichen ebenen Wellen ist dem Produkt der Sinus derjenigen Winkel proportional, welche die Normale der ebenen Wellen mit den optischen Axen bildet.

Macht man die Annahme, dafs in positiven Krystallen π der kleinste, μ der gröfste der drei Werthe π, ν, μ ist, so gelten die Formeln XIII. für beide Arten Krystalle.

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeit lehren auch, dafs in den positiven Krystallen das gewöhnliche Wellensystem rascher, in den negativen sich langsamer bewegt, als das ungewöhnliche. Denn in dem körperlichen Dreieck, dessen Kanten die optischen Axen und die Normale, und dessen Seiten u, u', $2n$ sind, mufs $u - u'$ zwischen 0 und

$2n$, und $u+u'$ zwischen $2n$ und 360^0-2n liegen. Ist nun $2n=90^0-m$, wo m ein spitzer Winkel ist, und $u-u'=90^0-(m-x)$, wo x jedesmal zwischen 0 und m liegt, so liegt $u+u'$ zwischen $90^0-(m-x)$ und $270^0+(m-x)$.

Die Cosinus der Winkel zwischen $90^0-(m-x)$ und $270^0+(m-x)$ sind aber algebraisch genommen stets kleiner als die Cosinus der Winkel zwischen 0 und $90^0-(m-x)$ also $\cos(u-u')>\cos(u+u')$, und für positive Krystalle $o^2>e^2$, für negative $o^2<e^2$.

Mittelst der Gleichungen (46) lassen sich auch die Winkel, welche die Normalen der Well-Ebenen mit den Axen bilden, in u und u' ausdrücken. Es findet sich nämlich

$$\cos u+\cos u' = 2b\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}} \text{ und}$$

$$\cos u-\cos u' = 2a\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}},$$

folglich:

$$49)\quad \begin{cases} a = \sin\tfrac{1}{2}(u+u')\sin\tfrac{1}{2}(u-u')\sqrt{\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\nu^2-\mu^2}} \\ \quad = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(u+u')\sin\frac{1}{2}(u-u')}{\sin n} \end{cases}$$

und

$$50)\quad \begin{cases} b = \cos\tfrac{1}{2}(u+u')\cos\tfrac{1}{2}(u-u')\sqrt{\dfrac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}} \\ \quad = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(u+u')\cos\frac{1}{2}(u-u')}{\cos n}. \end{cases}$$

Vergleichung der Gesetze der Bewegung des Aethers in zweiaxigen Mitteln mit denen in einaxigen und einfachbrechenden Mitteln.

Die Gesetze der Aetherbewegung sind aus den Bedingungsgleichungen der Elasticität abgeleitet worden.

Für die betrachteten zweiaxigen Mittel waren dies die Gleichungen (VII.), oder in Rücksicht auf die Kleinheit der Entfernung der Aethermoleküle die Gleichungen (VII, *a.* VII, *b.*) (wozu noch die genähert richtigen Gleichungen (31) kommen).

Für

Für die einaxigen Mittel waren es die Gleichungen (VII.) oder (VII, *a*. VII, *b*.) und die Gleichungen (IX.) oder (IX, *a*, *b*, *c*); für die einfachbrechenden Mittel waren es die Gleichungen (VII.) oder (VII, *a*, *b*) und (VIII.) oder (VIII, *a*, *b*).

Die Gesetze für zweiaxige Mittel schliefsen daher die Gesetze für die beiden anderen Arten Mittel als besondere Fälle in sich, und es lassen sich die letzteren Gesetze aus den ersten ableiten, wenn man die hinzutretenden Bedingungen berücksichtigt.

Wendet man die Abkürzungen (26) an, so sind die für einaxige Mittel hinzutretenden Bedingungen (IX, *a*, *b*, *c*)

$$\sigma'^2 = \sigma''^2, \quad \mu^2 = \nu^2, \quad \pi^2 = \tfrac{1}{3}q^2 = \tfrac{1}{3}p^2.$$

Durch die dritte Gleichung werden die zweite und dritte der Gleichungen (31) streng richtig. Durch die zweite Gleichung reducirt sich die Gleichung der Elasticitätsfläche auf

$$\varrho^2 = a^2\mu^2 + b^2\mu^2 + c^2\pi^2;$$

und es wird dieselbe daher eine Umdrehungsfläche.

Der Winkel zwischen den optischen Axen $2n$ (XXVII.) wird bestimmt durch $tang^2 n = 0$; es fallen daher dieselben in eine einzige zusammen, welche in der Richtung der Axe der z liegt.

Hätte man die Elasticitätsverhältnisse in den einaxigen Mitteln so in Bezug auf die Axe der x genommen, wie sie in Bezug auf die Axe der z genommen worden sind, so wären die hinzutretenden Bedingungen

$$\pi^2 = \nu^2, \quad \mu^2 = \tfrac{1}{3}o^2 = \tfrac{1}{3}p^2,$$

geworden, und man hätte als Gleichung für die Elasticitätsfläche

$$\varrho^2 = a^2\mu^2 + b^2\pi^2 + c^2\pi^2$$

und

$$tg^2 n = \infty$$

erhalten; die beiden optischen Axen hätten daher eine gemeinschaftliche Richtung nach der Axe der x erhalten, immer jedoch vorausgesetzt, dafs $\pi > \mu$ ist.

Die einaxigen Krystalle der zweiten Art nennt man **positiv** oder **attraktiv**, die der ersten Art **negativ** oder **repulsiv**.

Ist daher in zweiaxigen Krystallen $\nu^2 < \frac{1}{2}(\pi^2 + \mu^2)$, also

$n < 45^0$, so nähern sich dieselben den negativen einaxigen Krystallen; ist $v^2 > \frac{1}{2}(\pi^2 + \mu^2)$, also $n > 45^0$, so nähern sie sich den positiven einaxigen Krystallen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhält man für negative einaxige Krystalle aus (XIII.) wegen $u = u' = c$:

$$\text{XIV.} \quad o^2 = \mu^2 \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos 2c$$
$$= \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 c.$$

Das Wellensystem des ordentlichen Strahls, dessen Geschwindigkeit constant und gleich μ ist, ist daher das langsamer sich fortbewegende.

Für positive einaxige Krystalle würde sich aus (XIII, a) ergeben:

$$\text{XIV, } a. \quad o^2 = \pi^2, \quad e^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos 2c$$
$$= \mu^2 - (\mu^2 - \pi^2) \cos^2 c.$$

Das Wellensystem des gewöhnlichen Strahls, dessen constante Geschwindigkeit π ist, ist daher das schneller sich fortbewegende.

Die Bedingungen endlich, welche für einfach brechende Mittel hinzutreten, sind die Gleichungen (VIII, a, b) (von denen die letztern die strenge Erfüllung der Bedingungen (31) enthalten), d. h.

$\sigma'^2 = \sigma''^2 = \sigma'''^2$ und $\mu^2 = v^2 = \pi^2 = \frac{1}{3}o^2 = \frac{1}{3}p^2 = \frac{1}{3}q^2$.
Die Gleichung der Elasticitätsfläche wird daher $\varrho^2 = \mu^2$, oder $x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2$, d. h. eine Kugelfläche.

Richtung der Lichtstrahlen, Fortpflanzungs-Geschwindigkeit in der Richtung derselben. Wellenfläche.

Die **Wellenfläche** ist die einhüllende Fläche aller Ebenen, in welche die schwingende Bewegung zu gleicher Zeit anlangen würde, wenn dieselbe von primitiven Wellen-Ebenen ausginge welche, in allen möglichen Richtungen liegend, durch einen und denselben Punkt (leuchtenden Punkt oder Erschütterungs-Mittelpunkt) gehen. **Lichtstrahl** ist jede Gerade, welche vom Erschütterungs-Mit-

telpunkt nach irgend einem Punkt der Wellenfläche gehend gedacht werden kann.

Der zu einer bestimmten ebenen Well-Ebene gehörige Strahl hat also seinen Anfangspunkt im Schwingungscentrum, und geht durch denjenigen Punkt, in welchem die Well-Ebene von den Well-Ebenen geschnitten wird, welche sich durch ihre Lage am wenigsten von ihr unterscheiden.

Die Bestimmung dieses Durchschnittspunktes führt daher zur Kenntnifs der Lage des Strahls. Die Gleichung der betreffenden ebenen Welle nach der Zeit t sei

$$51)\quad ax+by+cz=e,$$

also die Gleichungen der sich am wenigsten von ihr unterscheidenden ebenen Wellen

$$52)\quad x+\frac{\partial c}{\partial a}z=\frac{\partial e}{\partial a}\quad \text{und}\quad 53)\quad y+\frac{\partial c}{\partial b}z=\frac{\partial e}{\partial b}.$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes, welche mit x_e, y_e, z_e bezeichnet sein mögen, erhält man alsdann durch Elimination von $\frac{\partial c}{\partial a}$, $\frac{\partial c}{\partial b}$, $\frac{\partial e}{\partial a}$, $\frac{\partial e}{\partial b}$.

Die Gleichung $a^2+b^2+c^2=1$ liefert dazu:

$$\frac{\partial c}{\partial a}=-\frac{a}{c},\quad \frac{\partial c}{\partial b}=-\frac{b}{c}.$$

Die Gleichung (X.), d. i.

$$54)\quad \frac{a^2}{e^2-\mu^2}+\frac{b^2}{e^2-\nu^2}+\frac{c^2}{e^2-\pi^2}=0,$$

liefert $\frac{\partial e}{\partial a}$ und $\frac{\partial e}{\partial b}$ durch Differenziation, nämlich

$$\frac{\partial e}{\partial a}=\frac{1}{eE^2}\left(\frac{a}{e^2-\mu^2}-\frac{a}{e^2-\pi^2}\right),$$

$$\frac{\partial e}{\partial b}=\frac{1}{eE^2}\left(\frac{b}{e^2-\nu_2}-\frac{b}{e^2-\pi^2}\right),$$

wo für $\frac{\partial c}{\partial a}$ und $\frac{\partial c}{\partial b}$ sogleich ihre Werthe $-\frac{a}{c}$ und $-\frac{b}{c}$ substituirt sind, und wo der Kürze wegen

$$\text{XV.}\quad E^2=\left(\frac{a}{e^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{b}{e^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{c}{e^2-\pi^2}\right)^2$$

gesetzt ist. Substituirt man die gefundenen Werthe der Differenzialquotienten, so erhält man:

$$55)\quad x - \frac{a}{c}z = \frac{a}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2-\mu^2} - \frac{1}{e^2-\pi^2}\right),$$

$$56)\quad y - \frac{b}{c}z = \frac{b}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2-\nu^2} - \frac{1}{e^2-\pi^2}\right).$$

Multiplicirt man alsdann (55) mit a, (56) mit b, und addirt die daraus entstehenden Gleichungen zu $cz - cz = 0$, so ergiebt sich:

$$ax + by + cz - \frac{1}{c}z = \frac{1}{eE^2}\left[\frac{a^2}{e^2-\nu^2} + \frac{b^2}{e^2-\nu^2} - \frac{a^2+b^2}{e^2-\pi^2}\right]$$

oder, insofern

$$ax + by + cz = e,\quad -\frac{a^2+b^2}{e^2-\pi^2} = \frac{c^2}{e^2-\pi^2} - \frac{1}{e^2-\pi^2},\ \text{und}$$

$$\frac{a^2}{e^2-\mu^2} + \frac{b^2}{e^2-\pi^2} + \frac{c^2}{e^2-\pi^2} = 0 \text{ ist:}$$

$$57)\quad z_e = c\left(e + \frac{1}{eE^2(e^2-\pi^2)}\right).$$

Durch die Substitution dieses Werthes von z_e in (55 und 56) gewinnt man das zugehörige y_e und x_e, nämlich

$$58)\quad y_e = b\left(e + \frac{1}{eE^2(e^2-\nu^2)}\right).$$

$$59)\quad x_e = a\left(e + \frac{1}{eE^2(e^2-\mu^2)}\right).$$

Die durch die Punkte ($x = y = z = o$) und (x_e, y_e, z_e) bestimmte Richtung ist also der Strahl, welcher zu einer ebenen Welle gehört, deren Geschwindigkeit e ist, und deren Normale mit den Axen Winkel bildet, zu denen die Cosinus a, b, c gehören. Drückt r_e die Geschwindigkeit der Wellenbewegung in der Richtung des Strahls aus, so hat man $\quad r_e^2 = x_e^2 + y_e^2 + z_e^2$,
oder wenn man für x_e, y_e, z_e die obigen Werthe setzt und (54) berücksichtigt:

$$\text{XVI.}\quad r_e^2 = e^2 + \frac{1}{e^2E^2}.$$

Sind ferner a'', b'', c'' die Cosinus der Winkel, welche vom Strahl und den Axen gebildet werden, so ist die Lage

des Strahls gegeben durch:

$$a'' = \frac{x_e}{r_e}, \quad b'' = \frac{y_e}{r_e}, \quad c'' = \frac{z_e}{r_e}.$$

Auf gleiche Weise findet man die Lage und Geschwindigkeit des zweiten gewöhnlichen Strahls, dessen zugehörige Well-Ebene die Geschwindigkeit o hat. Bezeichnet man nämlich mit x_o, y_o, z_o, r_o, a', b', c' das, was beim ungewöhnlichen Strahl x_e, y_e, z_e, r_e, a'', b'', c'' ausdrückte, und setzt:

$$\text{XV, a.} \quad O^2 = \left(\frac{a}{o^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{o^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{o^2-\pi^2}\right)^2,$$

so kommt man auf:

$$60) \quad x_o = a\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\mu^2)}\right),$$

$$y_o = b\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\nu^2)}\right), \quad z_o = c\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\pi^2)}\right).$$

$$\text{XVI, a.} \quad r_o^2 = o^2 + \frac{1}{o^2O^2}, \quad a' = \frac{x_o}{r_o}, \quad b' = \frac{y_o}{r_o}, \quad c' = \frac{z_o}{r_o}.$$

Aus dem Vorigen ist es leicht, umgekehrt aus der Lage und Geschwindigkeit des Strahls die Lage und Geschwindigkeit der zugehörigen ebenen Wellen zu bestimmen.

Zieht man nämlich aus (59)

$$61) \quad x_e = \frac{a(E^2e^2(e^2-\mu^2)+1)}{E^2e(e^2-\mu^2)},$$

und dividirt diesen Ausdruck durch $r_e^2 - \mu^2$, welche Differenz man aus (XVI.) durch Subtraction von μ^2 findet, so erhält man

$$62) \quad \frac{x_e}{r_e^2-\mu^2} = \frac{ae}{e^2-\mu^2}.$$

Eben so findet sich:

$$63) \quad \frac{y_e}{r_e^2-\nu^2} = \frac{be}{e^2-\nu^2} \quad \text{und} \quad 64) \quad \frac{z_e}{r_e^2-\pi^2} = \frac{ce}{e^2-\pi^2}.$$

Eliminirt man aus den letzten drei Gleichungen a, b, c, indem man dieselben quadrirt und addirt, so ergiebt sich,

$$65) \quad \left(\frac{x_e}{r_e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{y_e}{r_e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{z_e}{r_e^2-\pi^2}\right)^2 = S_e^2$$

setzend, $\quad 66) \quad S_e^2 = e^2E^2,$

mithin, da aus (XVI.) $E^2 e^2 = \frac{1}{r_e^2 - e^2}$ folgt,

$$\text{XVI, } b. \qquad e^2 = r_e^2 - \frac{1}{S_e^2}$$

für die gesuchte Geschwindigkeit der ebenen Wellen.

Die Lage derselben, d. h. a, b, c, bestimmt sich aus (62, 63, 64, XV, b), welche Gleichungen liefern

$$a = \frac{x_e}{e}\left(1 - \frac{1}{(r_e^2 - \mu^2)S_e^2}\right),$$

$$b = \frac{y_e}{e}\left(1 - \frac{1}{(r_e^2 - \nu^2)S_e^2}\right),$$

$$c = \frac{z_e}{e}\left(1 - \frac{1}{(r_e^2 - \pi^2)S_e^2}\right).$$

Vollkommen analoge Ausdrücke lassen sich für die ebenen Wellen der gewöhnlichen Strahlen ableiten.

Die Ausdrücke für O und E, und mithin für die Geschwindigkeit der Strahlen werden sehr bequem, wenn man dieselben statt auf die Coordinatenaxen auf die optischen Axen bezieht. Nach (XIII.) ist nämlich

$$o^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u - u')$$

$$= \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \tfrac{1}{2}(u - u'),$$

folglich $o^2 - \mu^2 = (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \frac{1}{2}(u - u')$,

$$o^2 - \nu^2 = \mu^2 - \nu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \tfrac{1}{2}(u - u')$$

$$= (\pi^2 - \nu^2) - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \tfrac{1}{2}(u - u'),$$

$$o^2 - \pi^2 = -(\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \tfrac{1}{2}(u - u').$$

Dies in $O^2 = \left(\frac{a}{o^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{o^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{o^2 - \pi^2}\right)^2$ substituirt giebt, wenn man aus (49 und 50) die Werthe von a und b entnimmt:

$$(\pi^2 - \mu^2)^2 O^2 = \frac{\pi^2 - \mu^2}{\nu^2 - \mu^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(u + u')}{\sin^2 \frac{1}{2}(u - u')}$$

$$+ \frac{1}{\left(\frac{o^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}\right)^2} \left[1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}(u + u') \sin^2 \tfrac{1}{2}(u - u') \frac{\pi^2 - \mu^2}{\nu^2 - \mu^2}\right.$$

$$\left. - \cos^2 \tfrac{1}{2}(u + u') \cos^2 \tfrac{1}{2}(u - u') \frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}\right] + \frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(u + u')}{\cos^2 \frac{1}{2}(u - u')}.$$

Multiplicirt man, um die Glieder der rechten Seite auf

gleiche Nenner zu bringen, das erste Glied mit $\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$ $+\sin^2\frac{1}{2}(u-u')$ und das dritte Glied mit $\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}-\cos^2\frac{1}{2}(u-u')$ (insofern diese beiden Ausdrücke gleich $\frac{o^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$ sind, so erhält man nach einigen Reductionen für $O^2(\pi^2-\mu^2)^2$ einen Bruch, dessen Zähler

$$(\pi^2-\nu^2)\cos^2\tfrac{1}{2}(u+u')\sin^2\tfrac{1}{2}(u-u')$$
$$+(\nu^2-\mu^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(u+u')\cos^2\tfrac{1}{2}(u-u')$$
$$+(\mu^2-\pi^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(u-u')\cos^2\tfrac{1}{2}(u-u')$$

und dessen Nenner

$$(\pi^2-\mu^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(u-u')\cos^2\tfrac{1}{2}(u-u')\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}+\sin^2\tfrac{1}{2}(u-u')\right)^2$$

ist. Der Zähler ist gleichbedeutend mit folgendem Product: $(\sin^2\frac{1}{2}(u-u')-\sin^2\frac{1}{2}(u+u'))(\mu^2-\nu^2+(\pi^2-\mu^2)\sin^2\frac{1}{2}(u'-u))$; daher wird aus der letzten Gleichung, wegen $\sin^2\frac{1}{2}(u-u')\cos^2\frac{1}{2}(u-u')=\frac{1}{4}\sin^2(u-u')$,

$$O^2(\pi^2-\mu^2)^2=\frac{4[\sin^2\frac{1}{2}(u'-u)-\sin^2\frac{1}{2}(u'+u)]}{\sin^2(u'-u)\left[\frac{\mu^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}+\sin^2\frac{1}{2}(u-u')\right]},$$

folglich hat man

$$\frac{1}{O^2}=\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2\sin^2(u-u')\frac{\left[\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}-\sin^2\frac{1}{2}(u-u')\right]}{\sin u\sin u'}$$
$$=\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2\sin^2(u-u')\left[\frac{\sin^2 n-\sin^2\frac{1}{2}(u-u')}{\sin u\sin u'}\right].$$

Das körperliche Dreieck, welches aus den beiden optischen Axen und der Normale der Well-Ebene gebildet wird, dessen Seiten also u, u' und $2n$ sind, giebt aber, wenn man den Flächenwinkel, dessen Kante die Normale ist, 2φ nennt, die Relation:

$$67)\quad \cos 2n=\cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos 2\varphi,$$

und mithin

$$2\sin^2\varphi=\frac{\cos(u-u')-\cos 2n}{\sin u\sin u'}=2\frac{\sin^2 n-\sin^2\frac{1}{2}(u-u')}{\sin u\sin u'};$$

folglich wird: $\quad 68)\quad \frac{1}{O}=\pm\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin(u-u')\sin\varphi.$

Ebenso findet man:

$$\frac{1}{E^2} = \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\right)^2 \sin(u+u') \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(u+u') - \sin^2 n}{\sin u \sin u'},$$

oder, da aus (67)

$$\cos^2 \varphi = \frac{\cos 2n - \cos(u+u')}{2 \sin u \sin u'} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(u+u') - \sin^2 n}{2 \sin u \sin u'}$$

folgt,

$$69) \quad \frac{1}{E} = \pm \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u+u') \cos \varphi.$$

Die Gleichung für die Wellenfläche erhält man, wenn man in die Gleichung $\frac{a^2}{\omega^2 - \mu^2} + \frac{b^2}{\omega^2 - \nu^2} + \frac{c^2}{\omega^2 - \pi^2} = 0$ für a, b, c und ω die Werthe aus (61, 62, 63, 64) substituirt. Nach gehöriger Reduction ergiebt sich dadurch

$$\text{XVII.} \quad \frac{\mu^2 x^2}{r^2 - \mu^2} + \frac{\nu^2 y^2}{r^2 - \nu^2} + \frac{\pi^2 z^2}{r^2 - \pi^2} = 0.$$

Die Form, in welcher Fresnel diese Gleichung für die Wellenfläche hingestellt hat, ist:

$$(x^2+y^2+z^2)(\pi^2 x^2 + \nu^2 y^2 + \mu^2 z^2) - \pi^2(\nu^2+\mu^2)x^2 - \nu^2(\pi^2+\mu^2)y^2 - \mu^2(\pi^2+\nu^2)z^2 + \pi^2\mu^2\nu^2 = 0.$$

Man erhält dieselbe sogleich aus (XVII.), indem man dieselbe mit dem Produkt der Nenner multiplicirt, wodurch sich ergiebt: $(\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 + \pi^2 z^2) r^4$

$$- [\pi^2(\nu^2+\mu^2)x^2 + \nu^2(\pi^2+\mu^2)y^2 + \mu^2(\pi^2+\nu^2)z^2] r^2 + \mu^2\nu^2\pi^2(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

für r^2 seinen Werth $x^2+y^2+z^2$ setzt, und den gemeinsamen Faktor $x^2+y^2+z^2$ fortläfst.

Als Gleichung für den Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene xy bekommt man aus (XVII.):

$$(r^2 - \pi^2)\left(\frac{\mu^2 x^2}{r^2 - \mu^2} + \frac{\nu^2 y^2}{r^2 - \nu^2}\right) = 0,$$

oder wenn man die Nenner durch Mulplication fortschafft, und x^2+y^2 für r^2 setzt:

$$(x^2+y^2-\pi^2)(\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 - \mu^2\nu^2) = 0.$$

Der Durchschnitt besteht also aus einem Kreise mit dem Radius π, und einer Ellipse, deren Halbaxen μ und ν sind.

Ebenso findet man für den Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene xz die Gleichung:

$$(x^2+z^2-\nu^2)(\mu^2 x^2+\pi^2 z^2-\mu^2\pi^2)=0,$$

d. h. einen Kreis, dessen Radius ν, und eine Ellipse, deren Halbaxen μ und π sind; und für den Durchschnitt mit der Ebene yz: $(z^2+y^2-\mu^2)(\pi^2 z^2+\nu^2 y^2-\pi^2\nu^2)=0$, d. h. einen Kreis, dessen Radius μ, und eine Ellipse, deren Halbaxen π und ν sind.

Für positive einaxige Krystalle, (d. h. für $\pi^2=\nu^2$) erhält man aus (XVII.), indem man mit dem Produkt der Nenner multiplicirt als Wellenfläche:

$$(r^2-\pi^2)(\mu^2 x^2+\pi^2(y^2+z^2)-\pi^2\mu^2)=0,$$

also die Vereinigung einer Kugel, deren Radius π ist (dem gewöhnlichen Strahl angehörend), und eines Umdrehungs-Ellipsoids, welches zur Umdrehungsaxe μ, zur Aequatorialaxe π hat.

Für negative einaxige Krystalle wird dagegen die Wellenfläche: $(r^2-\mu^2)(\pi^2 x^2+\mu^2(x^2+y^2)-\pi^2\mu^2)=0$, d. h. die Vereinigung einer Kugel mit dem Radius μ, und eines Umdrehungs-Ellipsoids, dessen Umdrehungsaxe gleich π, und dessen Aequatorialaxe gleich μ ist.

In einfachbrechenden Mitteln endlich, d. h. für $\pi=\mu=\nu$, reducirt sich die Gleichung auf $x^2+y^2+z^2-\mu^2=0$, d. h. auf die einer Kugelfläche.

Bestimmung der Geschwindigkeit der Strahlen durch das Fresnelsche Ellipsoid. Kreisschnitte des Ellipsoids. Scheinbare optische Axen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellenbewegung in der Richtung der Strahlen lassen sich geometrisch darstellen als die auf einander senkrechten Axen einer Ellipse, welche entsteht, wenn man ein Ellipsoid, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\nu^2}+\frac{z^2}{\pi^2}=1 \text{ *)}$$

---

*) Fresnel kam auf die Construction mittelst dieses Ellipsoids (welches mit der Elasticitätsfläche gleiche Axen hat) durch die Betrachtung, dafs,

ist, durch eine Ebene schneidet, die durch den Mittelpunkt gehend senkrecht auf dem Strahl steht.

Sind nämlich die Gleichungen für den Strahl

$$x = -mz$$
$$y = -nz,$$

so dafs die Gleichung der schneidenden Ebene $z = mx + ny$ ist, so findet man als Bedingungsgleichung für das Maximum und Minimum des Radius Vektors (r_1) der Schnittfigur, d. h. als Bestimmungsgleichung der Lage der Axen der in Rede stehenden Ellipse:

$$\mu^2(\nu^2-r_1^2)(\pi^2-r_1^2)m^2+\nu^2(\mu^2-r_1^2)(\pi^2-r_1^2)n^2 + \pi^2(\mu^2-r_1^2)(\nu^2-r_1^2) = 0,$$

also wenn man für m^2 und n^2 ihre Werthe $\frac{x^2}{z^2}$ und $\frac{y^2}{z^2}$ setzt:

$$\mu^2(\nu^2-r_1^2)(\pi^2-r_1^2)x^2+\nu^2(\mu^2-r_1^2)(\pi^2-r_1^2)y^2 + \pi^2(\mu^2-r_1^2)(\nu^2-r_1^2)z^2 = 0,$$

oder $\frac{\mu^2 x^2}{\mu^2-r_1^2}+\frac{\nu^2 y^2}{\nu^2-r_1^2}+\frac{\pi^2 z^2}{\pi^2-r_1^2} = 0$. Es werden also die Axen des Schnittes, d. h. die Werthe von r_1 durch dieselbe Gleichung bestimmt, welche die Geschwindigkeit der Strahlen liefert.

Werden die Schnittfiguren Kreise, so müssen natürlich die Geschwindigkeiten in beiden Strahlen gleich werden.

---

wenn man durch irgend eine der Axen eines Ellipsoids eine Ebene legt und diese Ebene um diese Axe dreht, die durch den Mittelpunkt gelegte Normale derselben einen Kreis (in der Ebene der beiden andern Ellipsoidsaxen) beschreibt, sobald man die Normale der halben Axe, um welche sie gedreht wird, gleich macht, dagegen eine Ellipse, sobald man sie der andern Halbaxe der jedesmaligen Schnittfigur gleich macht — eine Eigenschaft der sich in den Coordinatenebenen bewegenden Radii Vektoren der Wellenfläche, auf die er gekommen war, ehe er die algebraische Gleichung für die Wellenfläche selbst fand. Von der Vermuthung ausgehend, dafs durch die Drehung der durch den Mittelpunkt gehenden Schnitt-Ebene in alle mögliche Lagen die Normalen, wenn sie den jedesmaligen Halbaxen gleich gemacht würden, auch die übrigen Punkte der Wellenfläche bestimmen dürften, untersuchte er, ob die sich daraus ergebende Gleichung für die beschriebene Fläche der Gleichung genügte, welche er als Differenzialgleichung der Wellenfläche gefunden hatte.

Da jeder der Kreisschnitte sich als Durchschnitt der schneidenden Ebene, deren Gleichung $z = mx + ny$ sei, mit einer Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$ betrachten läfst, so dafs die Gleichung desselben

$$70) \quad (1+m^2)x^2 + (1+n^2)y^2 + 2mnxy = r_1^2$$

ist: so findet man die Lage der Kreisschnitte, wenn man den Kugel-Radius r_1 so bestimmt, dafs die Schnittfigur (70) zugleich der Fläche des Ellipsoids angehört.

Die Curve, in welcher die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$ das Ellipsoid $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\nu^2} + \frac{z^2}{\pi^2} = 1$ schneidet, ist:

$$\frac{r^2 - y^2 - z^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\nu^2} + \frac{z^2}{\pi^2} = 1 \quad \text{oder:}$$

$$\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)z^2 = \frac{\mu^2 - r_1^2}{\mu^2}.$$

Damit dieser Durchschnitt in der Ebene $z = mx + ny$ liegt, mufs darin z den Werth $mx + ny$ haben, es mufs daher die letzte Gleichung noch richtig bleiben, wenn man für z darin diesen Werth substituirt, d. h. es mufs sein:

$$m^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)x^2 + \left[\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) + n^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)\right]y_2$$
$$+ 2mn\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)xy = \frac{\mu^2 - r_1^2}{\mu^2}.$$

Es mufs daher r_1 so gewählt sein, dafs die letzte Gleichung mit (70) zugleich existire. Die Bedingungen unter denen dies möglich ist, sind daher:

$$\frac{1+n^2}{1+m^2} = \frac{\left(\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2}\right) + n^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)}{m^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)},$$

$$\frac{mn}{1+m^2} = \frac{n}{m},$$

$$\frac{r_1^2}{1+m^2} = \frac{\mu^2 - r_1^2}{\mu^2 m^2\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)}.$$

Die zweite dieser Bedingungen wird nur erfüllt durch $n = 0$, wozu die erste liefert:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}}} = \pm \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\nu^2 - \mu^2}},$$

und die dritte giebt: $r_1^2 = \nu^2$.

Die Gleichung der zwei sich hieraus ergebenden Kreisschnitte ist daher

$$z = \pm \frac{\pi}{\mu} \sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}}\, x,$$

und ihre Ebenen gehen mithin durch die Axe der y. Die Normalen derselben, in deren Richtung der gewöhnliche und ungewöhnliche Strahl die gemeinschaftliche Geschwindigkeit haben, und welche in der Ebene xz, also in der Ebene der optischen Axen liegen, heifsen scheinbare optische Axen. Nennt man den Winkel, welche dieselben mit der Axe der z machen, n', so ist ihre Lage bestimmt durch

$$\text{(XII, } a.) \quad tang^2 n' = \frac{\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2}}{\frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{\mu^2} \cdot \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}.$$

Daraus folgt

$$sin^2 n' = \pi^2 \cdot \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}, \quad cos^2 n' = \mu^2 \cdot \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}.$$

Der Winkel n, welchen die wahren optischen Axen mit der Axe der z bilden, war gegeben durch

$$tang^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2},$$

also hat man (71)

$$tang^2 n' = \frac{\pi^2}{\mu^2} tang^2 n, \quad sin^2 n' = \pi^2 sin^2 n, \quad cos^2 n' = \mu^2 cos^2 n.$$

Da π sich wenig von μ unterscheidet, so liegen die scheinbaren optischen Axen den wahren sehr nahe.

Konische Strahlung.

Wenn das Licht von undulatorischen Bewegungen eines Aethers herrührt, und in einem homogenen doppelbrechenden Mittel von einem homogenes Licht aussendenden Punkt die betreffenden Bewegungen ausgehen und sich ungestört verbreiten, so haben wir gesehen: dafs sich die auf das Gesicht wirkenden Schwingungen entstanden denken lassen aus Systemen von ebenen Wellen; dafs aber die Normalen je zweier Systeme eine gemeinschaftliche Richtung haben, dafs diese gepaarten Systeme nur dann gleiche Geschwindigkeit haben und ein einziges System bilden: in einaxigen Mitteln, wenn die Normalen in die Richtung der optischen Axe, in zweiaxigen Mitteln, wenn die Normalen in die Richtung einer der zwei wahren optischen Axen fallen; dafs ferner zu jedem Paare ebener Wellensysteme ein Strahlenpaar gehört, welches im Allgemeinen Verschiedenheit sowohl in der Richtung als in der Geschwindigkeit zeigt; dafs diese Geschwindigkeit in beiden Strahlen nur gleich werde in einaxigen Mitteln, wenn die Richtung der Strahlen zugleich die Richtung der optischen Axe ist — in zweiaxigen Mitteln, wenn ihre Richtung die Richtung einer der beiden scheinbaren optischen Axen ist; dafs endlich die Geschwindigkeiten der Strahlen (r) mit denen der zugehörigen ebenen Wellen (ω) verbunden sind durch die Gleichungen:

$$72)\quad \frac{x}{r^2-\mu^2} = \frac{a\omega}{\omega^2-\mu^2},$$

$$73)\quad \frac{y}{r^2-\nu^2} = \frac{b\omega}{\omega^2-\nu^2}, \qquad 74)\quad \frac{z}{r^2-\pi^2} = \frac{c\omega}{\omega^2-\pi^2}.$$

Ausnahmsfälle, in denen zu einem System ebener Wellen mehr als ein Strahl, oder zu einem Strahl mehr als ein System ebener Wellen gehört, können daher nur eintreten, wenn in den Ausdrücken für x, y, z auf der einen Seite, oder in denen für a, b, c auf der andern Seite Zähler und Nenner unabhängig von einander verschwinden, die respectiven Ausdrücke also unendlich vieldeutig werden. Die Zahl

der Strahlen, so wie die der Systeme ebener Wellen muſs daher in solchen Fällen unendlich groſs sein.

a. Strahlenkegel, die zu einem System ebener Wellen gehören.

Die Ordinate eines Strahls $y=\frac{r^2-v^2}{\omega^2-v^2}\cdot b\omega$ wird unendlich vieldeutig, wenn b und ω^2-v^2 unabhängig von einander verschwinden, d. h. wenn die Normale in der Ebene xz liegt und zugleich $\omega=v$ ist, ein Fall, welcher dem Zusammenfallen der Normale mit einer der wahren optischen Axen entspricht.

Die Lage der unendlich vielen zu $y=\frac{0}{0}$ gehörigen Strahlen wird bestimmt durch die Gleichungen (72 u. 74).

Diese Gleichungen bestimmen eine Curve, nach deren Punkten die Strahlen gerichtet sind, so daſs von den letzteren eine Kegelfläche gebildet wird.

Da $a=\sin n=\sqrt{\frac{v^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}$, $c=\cos n=\sqrt{\frac{\pi^2-v^2}{\pi^2-\mu^2}}$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ und $\omega=v$ ist, so erhält man aus (72 und 74):

$$x=(x^2+y^2+z^2-\mu^2)\frac{v}{\sqrt{(\pi^2-\mu^2)(v^2-\mu^2)}}$$

$$z=-(x^2+y^2+z^2-\pi^2)\frac{v}{\sqrt{(v^2-\mu^2)(\pi^2-v^2)}},$$

also die Gleichung eines Kreises, dessen Projection auf die Ebene xz die Gerade: $z=-\tan g\, n.x+v\sec n$ ist. Die Ebene des Kreises steht daher auf der Ebene xz, und da die Projection den Winkel n mit der Axe der x bildet, auch auf der optischen Axe senkrecht. Ueberdies liegt der Mittelpunkt in der Ebene xz, und wenn x', z' und x'', z'' die Coordinaten der beiden Punkte sind, in welchen die Kreislinie die Ebene der optischen Axen trifft, so erhält man:

$$75)\quad \begin{cases} x'=v\sin n, & z'=v\cos n, \\ x''=\frac{\pi^2}{v}\sin n, & z''=\frac{\mu^2}{v}\cos n, \end{cases}$$

also für die Länge des Durchmessers D

$$76)\quad D = \sqrt{(x'-x'')^2+(z'-z'')^2}$$
$$= \frac{1}{\nu}\sqrt{[(\pi^2-\nu^2)^2 \sin^2 n + (\nu^2-\mu^2)^2 \cos^2 n]}$$
$$= \frac{1}{\nu}\sqrt{(\pi^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)} = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu}\sin 2n.$$

Ferner fällt der nach dem Punkt (x', y') gehende Strahl, wie aus (75) erhellt, mit der optischen Axe zusammen, und hat die Geschwindigkeit ν, während die übrigen Strahlen des Kegels eine gröfsere Geschwindigkeit haben.

Die Länge einer Sehne, welche vom Punkt (x', z') ausgeht, und mit der Ebene der optischen Axen den Winkel φ bildet, ist gleich $D\cos\varphi = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu}\sin 2n \cos\varphi$, und daher ist, wenn ψ der Winkel ist, welchen die Ebene der optischen Axe mit derjenigen Ebene macht, die durch die optische Axe und diese Sehne geht,

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \cos\varphi$$

die Polargleichung des Strahlenkegels.

Da die zu einem Strahl gehörige Well-Ebene mit der Berührungs-Ebene der Wellenfläche am Durchschnittspunkt des Strahls mit der letzteren einerlei ist, so mufs die auf der optischen Axe senkrechte Tangential-Ebene die Wellenfläche in unendlich vielen Punkten berühren, die in einem Kreise liegen *).

b. Kegel der Normalen ebener Wellen, die zu einem Strahl gehören.

Von den Gröfsen a, b, c, welche die Lage der Well-Ebenen bestimmen, kann $b = \frac{\omega}{\omega^2-\nu^2}\cdot\frac{y}{r^2-\nu^2}$ unendlich vieldeutig werden, da y und $r^2-\nu^2$ gleichzeitig und unab-

*) Durch die Entdeckung dieser Eigenschaft der Wellenfläche wurde von Hamilton die konische Strahlung zuerst theoretisch nachgewiesen, und dann erst ihre Existenz von Lloyd durch Versuche bestätigt. Pogg. Ann. XXVIII.

hängig von einander verschwinden können, nämlich für die Strahlen, welche die gemeinsame Geschwindigkeit $r = v$ haben, und welche in der Ebene xz liegen; also für den Fall, dafs die Richtung der Strahlen die Richtung einer der scheinbaren optischen Axen ist. Zur Auffindung der Lage der Normalen der unendlich vielen Well-Ebenen aus (72 und 74) hat man

$$x = \pi \sin n \text{ und } z = \mu \cos n;$$

ferner, wenn man die Coordinaten der Punkte, in denen die durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Normalen ihre Well-Ebene treffen, mit x', y', z' bezeichnet:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \omega^2, \quad a = \frac{x'}{\omega}, \quad b = \frac{y'}{\omega}, \quad c = \frac{z'}{\omega}.$$

Man erhält daher durch Substitution:

$$x' = \frac{\omega^2 - \mu^2}{\nu^2 - \mu^2} x = \frac{\omega^2 - \mu^2}{\nu^2 - \mu^2} \pi \sin n = \frac{\pi(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}$$

und

$$z' = -\frac{\omega^2 - \pi^2}{\pi^2 - \nu^2} z = -\frac{\omega^2 - \pi^2}{\pi^2 - \nu^2} \mu \cos n = -\frac{\mu(x'^2 + y'^2 + z'^2 - \pi^2)}{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}.$$

Dies sind wiederum die Gleichungen eines Kreises; dessen Mittelpunkt in der Ebene xz liegt, und dessen Projection auf diese Ebene die Gerade:

$$z' = -\frac{\mu^2}{\pi^2} \tang n' \cdot x' + \mu \sec. n'$$

ist. Die Ebene des Kreises steht also senkrecht auf der Ebene xz, und die Normalen bilden eine elliptische Kegelfläche, deren Spitze im Ursprung der Coordinaten liegt, und deren Seitenlinien durch die Punkte des erwähnten Kreises gehen.

Die Coordinaten der beiden Punkte (x_1, z_1) und (x_2, z_2), in denen die Ebene der optischen Axen von der Kreislinie geschnitten wird, sind daher:

$$x_1 = \pi \sqrt{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}} = \sin n', \quad z_1 = \mu \sqrt{\frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}} = \cos n',$$

$$x_2 = \frac{\mu^2 \pi \sqrt{(\nu^2 - \mu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}, \quad z_2 = \frac{\pi^2 \mu \sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\pi^2 - \mu^2)}}{\mu^2(\nu^2 - \mu^2) + \pi^2(\pi^2 - \nu^2)}$$

oder

oder da $\mu^2(\nu^2-\mu^2)+\pi^2(\pi^2-\nu^2)=(\pi^2-\mu^2)(\pi^2+\mu^2-\nu^2)$ ist,

$$x_2=\frac{\mu^2\pi}{\pi^2+\mu^2-\nu^2}\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}}=\frac{\mu^2}{\pi^2+\mu^2-\nu^2}\cdot\sin n',$$

$$z_2=\frac{\pi^2\mu}{\pi^2+\mu^2-\nu^2}\sqrt{\frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}}=\frac{\pi^2}{\pi^2+\mu^2-\nu^2}\cdot\cos n',$$

und der Durchmesser D ist somit

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2}=\sqrt{\frac{(\pi^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{\pi^2+\mu^2-\nu^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\pi^2}}{2\nu}\sin 2n'.$$

Es fällt folglich die nach (x_1, z_1) gehende Normale mit der scheinbaren optischen Axe zusammen, und die Geschwindigkeit ihrer Wellen-Ebene ist ν; während die nach (x_2, z_2) gehende Normale senkrecht auf der Kreisebene steht und die Geschwindigkeit $\frac{\mu\pi}{\sqrt{\mu^2+\pi^2-\nu^2}}$ hat.

Ist wiederum φ die Neigung einer durch (x_2, z_2) gehenden Sehne gegen die Ebene der optischen Axen, und ψ die Neigung der Ebene, welche durch diese Sehne und den Anfangspunkt der Coordinaten geht, gegen eben diese Ebene, so findet man

$$tang\,\psi=\cos\varphi\sqrt{\frac{(\pi^2-\nu^2)(\nu^2-\mu^2)}{\pi^2\mu^2}}$$

$$=\nu^2\cos\varphi\sqrt{\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\pi^2}\right)\left(\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\nu^2}\right)},$$

welches die Polargleichung der Kegelfläche ist, die man mit Hülfe der Gleichungen (XII, a.) schreiben kann:

$$tang\,\psi=\nu^2\frac{\frac{1}{\mu^2}-\frac{1}{\pi^2}}{2}\sin 2n\cos\varphi.$$

Polarisations-Richtung.

Da die Schwingungsrichtung keine andere ist, als die Richtung der Axen des Ellipsoids (VI.), so sind A, B, C die Cosinus ihrer Winkel mit den Coordinatenaxen. Die Gleichungen (V.), nämlich

$$(L-s^2)A+RB+QC=0,$$
$$RA+(M-s^2)B+PC=0,$$
$$QA+PB+(N-s^2)C=0,$$

dienen zur Bestimmung von A, B, C, und geben, wenn man für L, M, N, P, Q, R die Werthe aus (28) setzt, und mittelst (31) o^2, p^2, q^2 eliminirt, nach einigen Reductionen als erste Näherung für den einen Strahl

$$77)\quad A'=\frac{a}{e^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{E},\quad B'=\frac{b}{e^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{E},\quad C'=\frac{c}{e^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{E},$$

und für den andern Strahl

$$78)\quad A''=\frac{a}{o^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{O},\quad B''=\frac{b}{o^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{O},\quad C''=\frac{c}{o^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{O}.$$

Da diese genäherten Werthe wegen

$$\frac{a^2}{\omega^2-\mu^2}+\frac{b^2}{\omega^2-\nu^2}+\frac{c^2}{\omega^2-\pi^2}=0$$

die Gleichungen $aA'+bB'+cC'=0$ und $aA''+bB''+cC''=0$ erfüllen, so geschehen die Schwingungen in beiden Strahlen nahe senkrecht auf die Normale ihrer Well-Ebenen.

Man konnte zu demselben Schlufs durch die Betrachtung der Coefficienten des Ellipsoids gelangen, indem man die Gleichung desselben auf die Form

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}')(x^2+y^2+z^2)+\mathfrak{B}^{1,1}(ux+vy+wz)^2\\ +[\mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}^1+v^2(\mathfrak{B}^{2,2}-\mathfrak{B}^{1,1})]y^2\\ +[\mathfrak{B}^3-\mathfrak{B}^1+w^2(\mathfrak{B}^{3,3}-\mathfrak{B}^{1,1})]z^2\\ +2(\mathfrak{B}^{2,3}-\mathfrak{B}^{1,1})vwyz+2(\mathfrak{B}^{1,3}-\mathfrak{B}^{1,1})uwxz\\ +2(\mathfrak{B}^{1,2}-\mathfrak{B}^{1,1})uvxy=1\end{aligned}$$

bringt. Die Gleichung erhält dann nämlich die für das Ellipsoid einfach brechender Mittel gefundene Form, wenn $\mathfrak{B}^2-\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^3-\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^{2,2}-\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{3,3}-\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{2,3}-\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{1,3}-\mathfrak{B}^{1,1}$, $\mathfrak{B}^{1,2}-\mathfrak{B}^{1,1}$ verschwinden. Da diese Differen-

zen in den doppelbrechenden Mitteln sehr klein (den Elasticitätsunterschieden proportional sind), so wird das obige Ellipsoid nahe ein Umdrehungs-Ellipsoid, dessen Umdrehungsaxe mit der Normale der Well-Ebene dieselbe Richtung hat; die Schwingungen in den lichtgebenden Wellensystemen müssen daher der Well-Ebene nahe parallel sein.

Da ferner nach (62, 63 und 64)

$$\frac{a}{e^2-\mu^2} = \frac{x_e}{e(r_e^2-\mu^2)}, \quad \frac{b}{e^2-\nu^2} = \frac{y_e}{e(r_e^2-\nu^2)},$$

$\frac{c}{e^2-\pi^2} = \frac{z_e}{e(r_e^2-\pi^2)}$, und aus der Vergleichung von (54 und 65) $\frac{1}{E} = \frac{e}{S_e}$ sich ergiebt, und da für den andern Strahl ebenso die Gleichungen: $\frac{a}{o^2-\mu^2} = \frac{x_o}{o(r_o^2-\mu^2)}$, $\frac{b}{o^2-\nu^2} = \frac{y_o}{o(r_o^2-\nu^2)}$, $\frac{c}{o^2-\pi^2} = \frac{z_o}{o(r_o^2-\pi^2)}$, $\frac{1}{O} = \frac{o}{S_o}$ bestehen, so kann man aus (77 und 78) ziehen:

$$A' = \frac{x_e}{r_e^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{S_e}, \quad B' = \frac{y_e}{r_e^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{S_e}, \quad C' = \frac{z_e}{r_e^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{S_e}.$$

$$A'' = \frac{x_o}{r_o^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{S_o}, \quad B'' = \frac{y_o}{r_o^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{S_o}, \quad C'' = \frac{z_o}{r_o^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{S_o}.$$

Sind wiederum a', b', c' die Cosinus der Winkel, welche der gewöhnliche Strahl mit den Axen bildet, so ist der Cosinus des Winkels zwischen dem Strahl und der Schwingungsrichtung

$$A'a'+B'b'+C'c' = \frac{A'x_o+B'y_o+C'z_o}{r_o}.$$

Substituirt man hierin für A', B', C' die Werthe aus (77) und für x_o, y_o, z_o aus (60), so erhält man zum Zähler:

$$\frac{o}{E}\left[\frac{a^2}{e^2-\mu^2}+\frac{b^2}{e^2-\nu^2}+\frac{c^2}{e^2-\pi^2}\right]$$

$$+\frac{1}{Oo}\left[\frac{1}{OE}\left(\frac{a^2}{(e^2-\mu^2)(o^2-\mu^2)}+\frac{b^2}{(e^2-\nu^2)(o^2-\nu^2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{c^2}{(e^2-\pi^2)(o^2-\pi^2)}\right)\right].$$

Der Faktor von $\frac{o}{E}$ verschwindet aber wegen (54), und der

Faktor von $\frac{1}{Oo}$ ist der Cosinus des Winkels, welchen die beiden Schwingungsrichtungen mit einander bilden, und als solcher gleich Null; folglich ist

$$A'a' + B'b' + C'c' = 0.$$

Ebenso findet sich $A''a'' + B''b'' + C''c'' = 0$ für den ungewöhnlichen Strahl.

Die Polarisationsrichtung würde also sowohl auf dem gewöhnlichen als auf dem ungewöhnlichen Strahl senkrecht stehen.

Es läfst sich erweisen, dafs die Polarisationsrichtung (wenigstens nahe) senkrecht auf der Axe des Schnittes der Elasticitätsfläche steht, durch welche die Geschwindigkeit der zugehörigen Well-Ebene bestimmt wird. Sind nämlich A_1, B_1, C_1 die Cosinus der Winkel zwischen den Coordinatenaxen und dem bezeichneten Loth auf der Axe des Schnittes, so hat man, da $\frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}}$, $\frac{k^2}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}}$ die Cosinus der Winkel zwischen den Coordinatenaxen und der Axe des Schnittes nach (35) sind, zu Bedingungen: $A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1 = 0$,
damit die fragliche Gerade auf der Axe des Schnittes senkrecht steht, und $A_1 a + B_1 b + C_1 c = 0$,
damit sie auf der Normale der Well-Ebene senkrecht steht. Man hat daher zur Bestimmung von A_1, B_1, C_1:

$$A_1(a - ck_1) + B_1(b - ck_2) = 0,$$
$$A_1(ak_2 - bk_1) + C_1(ck_2 - b) = 0.$$

Da ferner $\frac{a^2}{\omega^2 - \mu^2} + \frac{b^2}{\omega^2 - \nu^2} + \frac{c^2}{\omega^2 - \pi^2} = 0$ ist, so findet man, wenn man wiederum $a^2(\omega^2 - \nu^2) + b^2(\omega^2 - \mu^2) = h$ setzt, $c = -\frac{h}{c}\frac{\pi^2 - \omega^2}{(\mu^2 - \omega^2)(\nu^2 - \omega^2)}$, und wenn man dies in die Werthe für k_1 und k_2 in (39) substituirt:

$$k_1 = -\frac{ac}{h}(\omega^2 - \nu^2) = \frac{a}{c}\frac{\pi^2 - \omega^2}{\mu^2 - \omega^2},$$
$$k_2 = -\frac{bc}{h}(\omega^2 - \mu^2) = \frac{b}{c}\frac{\pi^2 - \omega^2}{\nu^2 - \omega^2},$$

folglich
$$a\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2-\omega^2}A_1+b\frac{\pi^2-\nu^2}{\nu^2-\omega^2}B_1=0,$$
$$a\frac{\nu^2-\mu^2}{\mu^2-\omega^2}A_1+c\frac{\nu^2-\pi^2}{\pi^2-\omega^2}C_1=0,$$
woraus sich ergiebt
$$A_1=\frac{a}{e^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{E},\quad B_1=\frac{b}{e^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{E},\quad C_1=\frac{c}{e^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{E},$$
oder
$$A_1=\frac{a}{o^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{O},\quad B_1=\frac{b}{o^2-\nu^2}\cdot\frac{1}{O},\quad C_1=\frac{c}{o^2-\pi^2}\cdot\frac{1}{O},$$
jenachdem man dem ω den Werth e oder o giebt; mithin ist die Identität mit der Schwingungsrichtung erwiesen.

Polarisations-Ebene.

Polarisations-Ebene eines Strahls nennt man diejenige Ebene, welche durch den Strahl und die Schwingungsrichtung geht. Polarisations-Ebene eines ebenen Wellensystems nennt man die durch dessen Normale und die Schwingungsrichtung gehende Ebene.

Da die Schwingungsrichtung auf der einen Axe des Schnittes der Elasticitätsfläche, welcher der dem Strahl entsprechenden Well-Ebene parallel ist, senkrecht steht, so geht die Polarisations-Ebene durch die andere Axe desselben Schnittes. Da ferner die Kreisschnitte jener Fläche die Schnittfigur in zwei Geraden schneiden, welche mit demjenigen Radius Vektor derselben zusammenfallen, der gleich ν ist, und da die Schnittfigur durch die Axen symmetrisch getheilt wird, so werden die Winkel zwischen jenen zwei (von den Kreisschnitten gebildeten) Durchschnittsrichtungen von den Axen, und mithin von den Polarisations-Ebenen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Well-Ebene halbirt.

Betrachtet man nun das körperliche Dreieck, welches von den Normalen der Kreisschnitte (den optischen Axen) und der Normale der Schnittfläche (d. h. der Well-Ebene) gebildet wird, und bedenkt, dafs die Polarisations-Ebenen die Winkel zwischen den Durchschnittslinien der Kreisschnitte halbiren, so sieht man, dafs auch der Winkel des

körperlichen Dreiecks, dessen Kante die Normale der W
Ebene ist, und sein Nebenwinkel, von den Polarisatio
Ebenen halbirt wird.

Es ergiebt sich also folgende Regel für die Lage
Polarisations-Ebenen.

Man denke sich durch jede der optischen Axen ei
Ebene gelegt, welche die Normale der Well-Ebene in si
schliefst, und halbire den sich an der Normale bildend
Winkel oder dessen Nebenwinkel durch eine Ebene. Di
Halbirungs-Ebene ist die Polarisations-Ebene, und zwar
hört sie der gewöhnlichen oder der ungewöhnlichen W
Ebene an, jenachdem sie zwischen den Schenkeln des sp
zen oder des stumpfen Winkels der optischen Axen h
durchgeht. Denn Seite 79 ist gezeigt worden, dafs je
Ebene in positiven Krystallen den schnelleren, diese d
langsameren Wellen zugehört, und dafs das Umgekehrte
negative gilt; während nach dem Seite (19) Gesagten je
als Merkmal der gewöhnlichen, dieses als Merkmal der u
gewöhnlichen Wellen-Ebenen zu betrachten ist.

In den einaxigen Mitteln geht die Halbirungs-Ebe
da die optischen Axen zusammenfallen, durch die optis
Axe selbst. Die Polarisations-Ebene des gewöhnlich
Strahls ist daher der Hauptschnitt desselben, und die
ungewöhnlichen Wellen-Ebene ist die durch die Norm
gehende auf dem Hauptschnitt perpendikulär stehende Ebe
wie es auch schon oben gefunden war.

C. *Gegenseitige Beziehungen der Wellenbewegungen des v schiedenfarbigen Lichtes.*

Allgemeine Gesetze der Dispersion.

Wir haben gesehen, dafs in jedem Mittel, wenn
die Elasticitätskräfte im Zustande des Gleichgewichts die A
thertheilchen dadurch in Ruhe erhalten, dafs sich ihre W
kungen in geraden entgegengesetzt liegenden Richtungen a

heben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten jeglichen Wellensystems $\omega = \frac{s}{x}$ ist, dafs ferner diese Geschwindigkeit ω sich dadurch ändert, dafs s und x (abhängig von einander) mit der Richtung des Strahls variiren; und dafs man endlich von einem homogenen Wellensystem zu einem andern übergeht, wenn man x bei einerlei Richtung des Strahls variiren läfst.

Die Gröfse x, und somit auch die Wellenlänge, welche durch die Relation $l = \frac{2\pi}{x}$ bestimmt ist, variirt also einmal bei derselben Farbe mit der Richtung des Strahls, zweitens bei derselben Richtung des Strahls mit der Farbe, d. h. mit dem von der Oscillationsdauer abhängigen s. Die Abhängigkeit zwischen der Wellenlänge und dem die Oscillationsdauer bestimmenden s sei durch $x = \varphi(s)$ vorgestellt, wo $\varphi(s)$ 1) Gröfsen enthält, welche von der Natur des Mittels abhängen, 2) Gröfsen, welche sich mit der Lage der Wellen-Ebene ändern, 3) Gröfsen, welche sich von Farbe zu Farbe ändern.

Die Lehre von der Dispersion hat nun zum Gegenstand, Abhängigkeiten zwischen den zu verschiedenen Farbenstrahlen gehörigen Wellenlängen oder Werthen von x, d. h. eine Funktion von der Form $x = \psi(x_\alpha)$, aufzufinden, in der x_α die Werthe x_1 x_2 x_3... vorstellt, welche als zu verschiedenen Farbenstrahlen desselben Mittels gehörig zu denken sind.

Läfst sich die Funktion $\varphi(s)$ herstellen, so dafs man soviel Gleichungen $x_\alpha = \varphi(s_\alpha)$ (für ein bestimmtes Mittel) hat, als man Strahlen betrachtet, so lassen sich aus denselben diejenigen Gröfsen eliminiren, welche von der Natur des Mediums abhängen, sobald die Zahl dieser Gröfsen eine endliche und nicht gröfser ist, als die Zahl der betrachteten Strahlen; während die von der Lage der Well-Ebene abhängigen Gröfsen auf Constanten reducirt und gleichzeitig eliminirt werden können, wenn man in allen Strahlen eine gleiche Lage der Well-Ebene annimmt. Man

erhält somit $\varkappa$ als Funktion der übrigen Werthe von $\varkappa$ und der zugehörigen Werthe von s, etwa $\varkappa = \psi_1(\varkappa_a, s_a, s)$. Um diese Gleichung endlich von den Werthen von s unabhängig zu machen, hat man dieselbe nur mit entsprechenden Gleichungen für andere Mittel zu verbinden, welche dieselben Werthe von s enthalten.

Beschränkt man sich auf einfach brechende, und auf einaxige und symmetrisch zweiaxige doppelbrechende Mittel, so hat man zur Bestimmung von $\varkappa = \varphi(s)$ die nach s^2 kubische Gleichung (V, a.), welche unmittelbar s^2 als Funktion von L, M, N, P, Q, R liefert, während diese Gröſsen wiederum Summen sind, deren Glieder mit Faktoren von der Form $\varkappa^{2n} r^{2n-1}$ multiplicirt sind.

Für die Strahlen, welche sich in der Richtung der Elasticitätsaxen fortbewegen, haben wir (Seite 68) erhalten

$$s^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^1, \quad s^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^2, \quad s^2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}^3,$$

während man findet:

$$\mathfrak{A} = S\left[\frac{mF(r)}{r}\left(\tfrac{1}{2}r^2\varkappa^2(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos\gamma)\right.\right.$$
$$-\frac{r^4\varkappa^4}{4!}(a^4\cos^4\alpha + b^4\cos^4\beta + c^4\cos^4\gamma + 6a^2b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$\left.\left. + 6b^2c^2\cos^2\beta\cos^2\gamma + 6a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma) + \ldots\right)\right],$$

$$\mathfrak{B}^1 = S\left[\frac{mf(r)}{r^3}\left(\frac{r^4\varkappa^2}{3!}(a^2\cos^4\alpha + 3b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 3c^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma)\right.\right.$$
$$-\frac{r^6\varkappa^4}{5!}(a^4\cos^6\alpha + 10a^2b^2\cos^4\alpha\cos^2\beta + 10a^2c^2\cos^4\alpha\cos^2\gamma$$
$$+ 5c^4\cos^2\alpha\cos^4\gamma + 5b^4\cos^2\alpha\cos^4\beta + 30b^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$$
$$\left.\left. + \ldots\right)\right],$$

$$\mathfrak{B}^2 = S\left[\frac{mf(r)}{r^3}\left(\frac{r^4\varkappa^2}{3!}(b^2\cos^4\beta + 3a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 3c^2\cos^2\beta\cos^2\gamma)\right.\right.$$
$$-\frac{r^6\varkappa^4}{5!}(b^4\cos^6\beta + 10a^2b^2\cos^2\alpha\cos^4\beta + 10b^2c^2\cos^4\beta\cos^2\gamma$$
$$+ 5a^4\cos^4\alpha\cos^2\beta + 5c^2\cos^2\beta\cos^4\gamma + 30a^2c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$$
$$\left.\left. + \ldots\right)\right],$$

$$\mathfrak{B}^3 = S\left[\frac{mf(r)}{r^3}\left(\frac{r^4 x^2}{3!}(c^2\cos^4\gamma + 3b^2\cos^2\beta\cos^2\gamma + 3a^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma\right.\right.$$

$$-\frac{r^6 x^4}{5!}(c^4\cos^6\gamma + 10a^2c^2\cos^2\alpha\cos^4\gamma + 10b^2c^2\cos^2\beta\cos^4\gamma$$

$$+5a^4\cos^4\alpha\cos^2\gamma + 5b^4\cos^4\beta\cos^2\gamma + 30a^2b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$$

$$\left.\left. + \ldots\right)\right].$$

Es ist also erwiesen, dafs für jene Strahlen s^2 sich in eine Reihe von folgender Form entwickeln läfst:

79) $s^2 = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^4 + \sigma_3 x^6 + \sigma_4 x^8 + \ldots$ in inf.,

wo σ_1, σ_2, σ_3 etc. Summen sind, in denen die Glieder beziehlich mit den Werthen von r, r^3, r^5 etc. multiplicirt sind, so dafs, wenn r sehr klein und von der ersten Ordnung ist, σ_1 von der ersten, σ_2 von der dritten, σ_3 von der fünften Ordnung etc. ist. Kehrt man die Reihe um, so erhält man

80) $x^2 = \tau_1 s^2 + \tau_2 s^4 + \tau_3 s^6 + \ldots$ in inf.

Zieht man nämlich aus (79)

$$s^2 = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^4 + \sigma_3 x^6 + \ldots$$
$$s^4 = \sigma_1^2 x^4 + 2\sigma_1\sigma_2 x^6 + \ldots$$
$$s^6 = \sigma_1^3 x^6 + \ldots$$

und substituirt dies in (80), so findet man

$$x^2 = \sigma_1\tau_1 x^2 + (\sigma_2\tau_1 + \sigma_1^2\tau_2)x^4 + (\sigma_3\tau_1 + 2\sigma_1\sigma_2\tau_2 + \sigma_1^3\tau_3)x^6 + \ldots$$

Man hat daher zur Bestimmung von τ_1, τ_2, τ_3 etc. die Bedingungen:

$\sigma_1\tau_1 = 1$, $\sigma_2\tau_1 + \sigma_1^2\tau_2 = 0$, $\sigma_3\tau_1 + 2\sigma_1\sigma_2\tau_2 + \sigma_1^3\tau_3 = 0$ etc.,

also $\tau_1 = \frac{1}{\sigma_1}$, $\tau_2 = -\frac{\sigma_2\tau_1}{\sigma_1^2} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1^3}$, $\tau_3 = -\frac{\sigma_3\tau_1 + 2\sigma_1\sigma_2\tau_2}{\sigma_1^3}$

$= -\frac{\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2}{\sigma_1^5}$ und

81) $x^2 = \frac{1}{\sigma_1}s^2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^3}s^4 - \frac{\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2}{\sigma_1^5}s^6 -$ etc.

Dafs (81) mit (79) zusammenfällt, wenn man nur das erste Glied in beiden Reihen beibehält, ist für sich klar. Behält man in (81) zwei Glieder bei, setzt also

$$x^2 = \frac{1}{\sigma_1}s^2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^3}s^4,$$

so erhält man

$$s^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} - \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_1^2}{2\sigma_2}\right)^2 - \frac{\sigma_1^3}{\sigma_2}x^2\right]} = \sigma_1^2\,\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{4\sigma_2^2x^2}{\sigma_1}}}{2\sigma_2}$$

$= \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^4 + 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1}x^6 + 5\frac{\sigma_2^3}{\sigma_1^2}x^8 + \ldots$, oder da man in (81) die Glieder von der dritten Ordnung ab vernachlässigt hat: $s^2 = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x^4$,

da $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1}$ von der 5ten, $\frac{\sigma_2^3}{\sigma_1^2}$ von der 7ten Ordnung etc. ist; folglich giebt die Beibehaltung zweier Glieder in (81) denselben Grad der Näherung, wie die Beibehaltung zweier Glieder in (79). Ebenso erweist es sich für die Zuziehung mehrerer Glieder.

Die Coefficienten σ_1, σ_2, σ_3 etc. hängen von den Constanten m, r, $f(r)$, α, β, γ, welche die Natur des Mittels bedingen, und von den Gröfsen a, b, c, welche die Lage des Strahls bestimmen, ab.

Giebt man dem a, b, c bestimmte Werthe, so bleiben daher σ_1, σ_2, σ_3 etc. dieselben, so lange das Mittel dasselbe bleibt. Dies vorausgesetzt, ändert sich x von Farbe zu Farbe nur durch die Aenderungen von s, und man hat für ein bestimmtes Mittel und für eine bestimmte Lage der Well-Ebene, wenn x_1, s_1; x_2, s_2; x_3, s_3 etc. verschiedenen, aber bestimmten Farben angehören:

$$82)\quad \begin{cases} x_1^2 = \tau_1 s_1^2 + \tau_2 s_1^4 + \tau_3 s_1^6 + \ldots \\ x_2^2 = \tau_1 s_2^2 + \tau_2 s_2^4 + \tau_3 s_2^6 + \ldots \\ x_3^2 = \tau_1 s_3^2 + \tau_2 s_3^4 + \tau_3 s_3^6 + \ldots \\ \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

wo τ_1, τ_2, τ_3 etc. constant sind.

Erhielte man hinlänglich genaue Resultate, wenn man nur das erste Glied der Reihen in (82) berücksichtigte, so könnte man τ_1 mittelst der ersten Gleichungen aus den übrigen eliminiren, wodurch man für jede beliebige Farbe, zu denen die Werthe x_n, s_n gehören:

$$x_n = \frac{s_n^2}{s_1^2}x$$

erhielte.

Bedürfte man die zwei ersten Glieder der Reihen in (82), um hinlänglich genaue Resultate zu erhalten, so kann man mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen τ_1 und τ_2 aus den übrigen eliminiren, und erhielte:

$$\varkappa_n^2 = \frac{s_n^2 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2} \cdot \frac{s_n^2}{s_1^2} \varkappa_1^2 + \frac{s_n^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2} \cdot \frac{s_n^2}{s_2^2} \varkappa_2^2.$$

Bei den drei ersten Gliedern erhielte man ferner durch Elimination von τ_1, τ_2, τ_3:

$$\varkappa_n^2 = \frac{(s_n^2 - s_2^2)(s_n^2 - s_3^2)}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_1^2} \varkappa_1^2 + \frac{(s_n^2 - s_3^2)(s_n^2 - s_1^2)}{(s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 - s_1^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_2^2} \varkappa_2^2$$
$$+ \frac{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)}{(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_3^2} \varkappa_3^2$$

u. s. w., also Gleichungen, die von der Natur des Mittels unabhängig sind.

Man kann denselben auch folgende Form geben:

$$\frac{\varkappa_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_n^2)} + \frac{\varkappa_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)} = 0,$$

$$\frac{\varkappa_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_n^2)} + \frac{\varkappa_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_n^2)}$$
$$+ \frac{\varkappa_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)} = 0,$$

$$\frac{\varkappa_1^2}{s_1^2(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_n^2)} + \frac{\varkappa_2^2}{s_2^2(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 - s_n^2)}$$
$$+ \frac{\varkappa_3^2}{s_3^2(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)(s_3^2 - s_n^2)} + \frac{\varkappa_n^2}{s_n^2(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)(s_n^2 - s_3^2)}$$
$$= 0,$$

und allgemein, wenn man die $n-1$ ersten Glieder beibehalten mufs:

$$S\left[\frac{\varkappa_a^2}{s_a^2 P(s_a - s_b^2)}\right] = 0\ ^{*}),$$

wo das Summenzeichen auf alle ganze Zahlenwerthe von a, die kleiner als $n+1$ sind, zu beziehen ist, und $P(s_a^2 - s_b^2)$ ein Produkt, deren Faktoren von der Form $s_a^2 - s_b^2$ sind, bedeutet, in denen b alle ganze Zahlen vorstellt, die $< n+1$

*) Diese Reihe liefs sich auch direkt aus der von Lagrange gegebenen Interpolationsformel finden.

und $\gtrless a$ sind. Bezeichnet man das Glied, in welchem $\varkappa_a^2$ als Faktor vorkommt, mit K_a, so ist die Abhängigkeits-Gleichung der Wellenlängen für die verschiedenen Farben:

$$83)\quad K_1 + K_2 + K_3 + \ldots\ldots + K_n = 0.$$

Haben nun $\varkappa_a'$, s_a', K_a' für ein anderes Mittel Bedeutungen, welche denen der Gröfsen $\varkappa_a$, s_a, K_a in dem betrachteten Medium analog sind; ist ferner $s_a' = s_a$, und ist daher die Farbe in beiden Mitteln dieselbe, so dafs auch $K_a' = K_a$ ist; ist endlich $\varkappa_a' = \theta \varkappa_a$, und dabei θ constant, so ergiebt sich für jenes neue Mittel die Bedingung:

$$84)\quad K_1 \Theta_1 + K_2 \Theta_2 + K_3 \Theta_3 + \ldots + K_n \Theta_n = 0,$$

wo $\theta^2 = \Theta$ gesetzt ist.

Wegen $\frac{s}{\varkappa} = \omega$ ist $\frac{\varkappa'}{\varkappa}$, d. h. θ das Verhältnifs der Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten derjenigen zwei Strahlen, für welche $s = s'$ ist. Dieses Verhältnifs nennt man das Brechungsverhältnifs des betreffenden Strahls im zweiten Mittel in Bezug auf das erste. Ist das erste Mittel die atmosphärische Luft, oder was sehr nahe dasselbe ist, der leere Raum, so heifst θ schlechtweg das Brechungsverhältnifs dieses Strahls in dem betrachteten zweiten Mittel. Das Verhältnifs der Brechungsverhältnisse für die verschiedenen Farbenstrahlen heifst das Zerstreuungsverhältnifs dieser Strahlen *).

Ist nun s_a, $\varkappa_a$ für eine Anzahl Strahlen, die gröfser als $n-1$ ist, bekannt, und kennt man $\varkappa_a'$ für die $n-1$ ersten dieser Strahlen für das zweite Mittel (nämlich $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, $\varkappa_3' \ldots . \varkappa_{n-1}'$), so läfst sich aus den beiden Gleichungen (83, 84) $\varkappa_n'$, $\varkappa_{n+1}'$, $\varkappa_{n+2}'$ etc. für die übrigen Strahlen finden, und somit enthalten diese zwei Gleichungen die Lösung des Problems der Dispersionslehre, und zwar für alle Mittel, sie mögen einfach-

---

*) Das mittlere Brechungsverhältnifs eines Mittels und das Zerstreuungsverhältnifs eines Mittels sind aus den Brechungsverhältnissen der Strahlen zusammengesetzte Gröfsen.

oder doppelbrechend oder sonst von einer andern Natur sein, wenn für sie nur die Elasticitätsbedingung (Seite 102) erfüllt ist, wenn ferner $\omega^2 = \frac{s^2}{\varkappa^2}$ ist, s^2 sich in eine Reihe von der Form (79) entwickeln läfst, $s_\alpha = s_\alpha'$ ist, und θ_α einen constanten Werth hat.

Die Werthe von θ_α sind, als Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, constant für jede bestimmte Lage der verglichenen Strahlen; sie sind constant für jede beliebige Lage der Strahlen in einfachbrechenden Mitteln, für die gewöhnlichen Strahlen in einaxigen Mitteln, und für die nach je einem der Hauptschnitte polarisirten (in dem Hauptschnitt liegenden) Strahlen (deren Geschwindigkeit näherungsweise beziehlich gleich μ, ν, π gefunden worden ist) in zweiaxigen Mitteln.

Da man indefs aus den Brechungsverhältnissen der den Elasticitätsaxen parallelen Strahlen in den letztgedachten Mitteln die Brechungsverhältnisse (Geschwindigkeitsverhältnisse) aller beliebig liegenden Strahlen nach dem Vorigen ableiten kann, so kann man sich begnügen, dieselben nur für jene Strahlen, deren genäherte Werthe $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu}$ sind, zu bestimmen. $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\mu}$ heifsen vorzugsweise die Brechungsverhältnisse der doppelbrechenden Substanz.

Ist $n-1$ die Zahl der Glieder, welche man in (81) beibehalten mufs, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen, und sind s_α'', $s_\alpha'''\ldots$, $\varkappa_\alpha''$, $\varkappa_\alpha'''\ldots$, θ_α', $\theta_\alpha''\ldots$, Θ_α', $\Theta_\alpha''\ldots$ Werthe für ein drittes, viertes etc. Mittel, welche den Werthen s_α', $\varkappa_\alpha'$, θ_α, Θ_α analog sind, so müssen mit jener Genauigkeit die Bedingungen (siehe 84)

$$85)\quad \begin{cases} K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 + \ldots + K_n\Theta_n = 0, \\ K_1\Theta_1' + K_2\Theta_2' + K_3\Theta_3' + \ldots + K_n\Theta_n' = 0, \\ K_1\Theta_1'' + K_2\Theta_2'' + K_3\Theta_3'' + \ldots + K_n\Theta_n'' = 0, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

erfüllt sein. Eliminirt man aus $n-1$ dieser Gleichungen in Verbindung mit (83) die Gröfsen $\frac{K_1}{K_n}, \frac{K_2}{K_n}, \frac{K_3}{K_n}\ldots\frac{K_{n-1}}{K_n}$,

so erhält man eine Bedingungsgleichung zwischen den Werthen von Θ_a, die mit der vorgeschriebenen Genauigkeit erfüllt sein mufs, wenn $n-1$ Glieder in (81) hinreichen sollen, und wenn mithin $n-1$ Brechungsverhältnisse hinreichen, die übrigen zu bestimmen.

Um den höchsten Grad der erreichbaren Genauigkeit festzusetzen, kann man die Differenzen der Werthe von θ zum Grunde legen, welche die genauesten, an einer und derselben Substanz wiederholten Messungen gegeben haben, und die gröfste Differenz als Grenze der Beobachtungsfehler betrachten.

Legt man nun dem n nach und nach die Werthe 2, 3, 4 etc. unter, so hätte man bei dem Werthe stehen zu bleiben, welcher mittelst der gedachten Bedingungsgleichung zu Werthen von θ führt, die von den gemessenen Werthen um Gröfsen abweichen, die kleiner sind als jene Grenze der Beobachtungsfehler *).

Statt den angedeuteten mühsamen Weg einzuschlagen, ging Cauchy von folgenden Betrachtungen aus, um zugleich die Beobachtungsfehler der zum Grunde gelegten Messungen möglichst zu compensiren.

Entwickelung der Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Brechungsverhältnisse von einander ausdrücken. Correktion gemessener Brechungsverhältnisse.

Es seien θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, θ_5, θ_6, θ_7 die Brechungsverhältnisse der von Fraunhofer mit B, C, D, E, F, G, H bezeichneten Farben, und für die allein alle bisherigen Messungen angestellt sind; ferner

$$S\Theta_a = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7$$
$$S'\Theta_a = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7$$
$$S''\Theta_a = -\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 + \Theta_5 + \Theta_6 - \Theta_7$$
$$S'''\Theta_a = -\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 + \Theta_6 + \Theta_7;$$

*) Dafs $n>2$ sein mufs, ergiebt sich unmittelbar, indem für $n=2$ aus (83 u. 84) $K_1 + K_2 = 0$ und $K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 = 0$, also $\Theta_1 = \Theta_2$ folgen würde, welches der Erfahrung widerspricht, da alsdann die Dispersionserscheinungen, welche auf Verschiedenheit der Brechungsverhältnisse beruhen, unmöglich würden.

und $\Sigma\Theta_c$, $\Sigma'\Theta_c$, $\Sigma''\Theta_c$ *) etc. seien ähnliche Summen von der Form $\pm\Theta_c\pm\Theta_c'\pm\Theta_c''\pm\ldots\ldots$ für einen und denselben Strahl in verschiedenen Substanzen. Endlich sei ϑ_c der Werth, den man für Θ_c erhalten würde, wenn man in (81) ein Glied; $\vartheta_c+\vartheta_c'$, wenn man zwei Glieder; $\vartheta_c+\vartheta_c'+\vartheta_c''$, wenn man drei Glieder in derselben Gleichung beibehielte u. s. w., so dafs der wahre Werth von Θ_c sein würde: $\Theta_c=\vartheta_c+\vartheta_c'+\vartheta_c''+\vartheta_c'''+\ldots.$, und der gesuchte Näherungswerth:

$$\Theta_a=\vartheta_c+\vartheta_c'+\vartheta_c''+\ldots.+\vartheta_c^{(n-2)}.$$

Man hat alsdann gleichzeitig

$$S\Theta_a = S\vartheta_a+S\vartheta_a'+S\vartheta_a''+\ldots.$$

$$\Sigma\Theta_c = \Sigma\vartheta_c+\Sigma\vartheta_c'+\Sigma\vartheta_c''+\ldots.$$

$$\Sigma S\Theta_a = \Sigma S\vartheta_a+\Sigma S\vartheta_a'+\Sigma S\vartheta_a''+\ldots., \text{ etc.}$$

Um nun zuvörderst ϑ_c aus gemessenen Werthen von Θ, Θ', Θ'' etc., und zwar möglichst frei von den an diesen Werthen haftenden Beobachtungsfehlern zu finden, beachte man, dafs für $n=2$ aus den Gleichungen (85) folgt:

$$-\frac{K_2}{K_1}=\frac{\Theta_1}{\Theta_2}=\frac{\Theta_1'}{\Theta_2'}=\frac{\Theta_1''}{\Theta_2''} \text{ etc.},$$

und ebenso

$$-\frac{K_2}{K_1}=\frac{\Theta_1}{\Theta_3}=\frac{\Theta_1'}{\Theta_3'} \text{ etc. etc.},$$

mithin

$$86)\quad \frac{\Theta_1}{\Theta_1'}=\frac{\Theta_2}{\Theta_2'}=\frac{\Theta_3}{\Theta_3'}=\ldots.=\frac{\Theta_7}{\Theta_7'}.$$

Statt nun z. B. das Verhältnifs $\frac{\Theta_c}{\Theta_c'}$ aus einer einzelnen dieser Gleichungen (also Θ_c nur mit Hülfe drei gemessener Werthe) zu bestimmen, kann man die aus allen Gleichungen (86) abgeleitete Gleichung $\frac{\Theta_c}{\Theta_c'}=\frac{S\Theta_a}{S\Theta_a'}$ nehmen, an welcher 14 Messungen gleichen Antheil haben, und welche daher einen ungleich genaueren Werth liefert. Statt der letz-

*) In den folgenden Untersuchungen stellt der Index c immer eine bestimmte, wenngleich jede beliebige der ersten 7 Ziffern, der Index a, der nur in Summen vorkommt, sämmtliche 7 Ziffern vor.

ten Gleichung hätte man auch nehmen können:

$$\frac{\Theta_c}{\Theta_c'} = \frac{S'\Theta_a}{S'\Theta_a'} \text{ oder } = \frac{S''\Theta_a}{S''\Theta_a'} \text{ etc.}$$

Gleicherweise erhält man $\frac{\Theta_c}{\Theta_c''} = \frac{S\Theta_c}{S\Theta_c''}$, $\frac{\Theta_c}{\Theta_c'''} = \frac{S\Theta_c}{S\Theta_c'''}$ etc., so dafs man durch Combination aller dieser Gleichungen, insofern $\frac{\Theta_c}{S\Theta_a} = \frac{\Theta_c'}{S\Theta_a'} = \frac{\Theta_c''}{S\Theta_a''} = \frac{\Theta_c'''}{S\Theta_a'''}$ etc. ist, auf die einzige Gleichung:

$$\frac{\Theta_c}{S\Theta_a} = \frac{\Theta_c + \Theta_c' + \Theta_c'' + \ldots\ldots}{S\Theta_a + S\Theta_a' + S\Theta_a'' + \ldots\ldots},$$

d. h. auf

$$\frac{\Theta_c}{S\Theta_a} = \frac{\Sigma\Theta_c}{\Sigma S\Theta_a}$$

kommt, welche $\Theta_c = \frac{\Sigma\Theta_c}{\Sigma S\Theta_a} S\Theta_a$, also für Θ_c einen Werth giebt, an welchem alle Messungen an sämmtlichen Substanzen gleichen Antheil haben, und der daher von den Beobachtungsfehlern noch unabhängiger als der vorhergehende ist. Das so gefundene Θ_c wird daher der genaueste Werth von ϑ_c sein, der sich aus den Beobachtungen ableiten läfst.

Um das zweite Glied ϑ_c' des wahren Werthes von Θ_c mit gleicher Genauigkeit zu finden, setze man

$$\Theta_c = \vartheta_c + \Delta\Theta_c.$$

Da 87) $\vartheta_c = \frac{\Sigma\Theta_c}{\Sigma S\Theta_a} S\Theta_a$ gefunden wurde, so ergiebt sich $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \ldots + \vartheta_7 = S\vartheta_a = S\left[\frac{\Sigma\Theta_c}{\Sigma S\Theta_a} S\Theta_a\right]$

$$= \frac{\Sigma S\Theta_a}{\Sigma S\Theta_a} S\Theta_a = S\Theta_a,$$

folglich, da auch $S\Theta_a = S\vartheta_a + S\Delta\Theta_a$ ist,

$$87, a) \quad S\Delta\Theta_a = 0.$$

Nimmt man nun $n = 3$, so dafs aus (85) wird:

$$88) \quad K_1\Theta_1 + K_2\Theta_2 + K_3\Theta_3 = 0,$$

oder da diese Gleichung von der Natur des Mittels unabhängig ist:

$$K_1\Sigma\Theta_1 + K_2\Sigma\Theta_2 + K_3\Sigma\Theta_3 = 0.$$

Sub-

Substituirt man hierin die Werthe für $\Sigma\Theta_1$, $\Sigma\Theta_2$, $\Sigma\Theta_3$ aus (87), so verwandelt sich diese Gleichung in

$$K_1\vartheta_1 + K_2\vartheta_2 + K_3\vartheta_3 = 0.$$

Da ferner $\Theta_c = \vartheta_c + \Delta\vartheta_c$, so leitet man aus (88) mittelst der vorigen Gleichung ab:

$$89)\quad K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + K_3\Delta\Theta_3 = 0.$$

Diese Relation liefert $\Delta\Theta_3$ als lineäre Funktion von $\Delta\Theta_1$ und $\Delta\Theta_2$, und ebenso $\Delta\Theta_4$, $\Delta\Theta_5$, $\Delta\Theta_6$, $\Delta\Theta_7$, wenn man darin nach und nach 4, 5, 6, 7 statt 3 setzt. Die genannte Funktion von $\Delta\Theta_1$ und $\Delta\Theta_2$ ist von der Natur des Mittels unabhängig, und daher hat man

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta_1'}{\Delta\Theta_2'}, \text{ d. h. } \frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta_2'},$$

und allgemein: $$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_1'} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta_2'} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta_3'} = \ldots\ldots = \frac{\Delta\Theta_7}{\Delta\Theta_7'},$$

folglich $$\frac{\Delta\Theta_c}{\Delta\Theta_c'} = \frac{S\Delta\Theta_a}{S'\Delta\Theta_a'},$$

und wenn man auch die übrigen Substanzen hinzuzieht:

$$\frac{\Delta\Theta_c}{S\Delta\Theta_a} = \frac{\Delta\Theta_c'}{S'\Delta\Theta_a'} = \frac{\Delta\Theta_c''}{S'\Delta\Theta_a''} = \ldots\ldots = \frac{\Sigma\Delta\Theta_c}{\Sigma S\Delta\Theta_a},$$

woraus sich findet:

$$90)\quad \Delta\Theta_c = \frac{\Sigma\Delta\Theta_c}{\Sigma S\Delta\Theta_a} S\Delta\Theta_a = \vartheta_c',$$

da $\Delta\Theta_c = \vartheta_c'$ ist, insofern es unter der Voraussetzung, dafs $n = 3$ richtige Resultate liefert, entwickelt ist; und zwar ist das so bestimmte ϑ_c' wegen der Zuziehung sämmtlicher Messungen sehr frei von Beobachtungsfehlern.

Auf dieselbe Weise findet man ϑ_c''. Für $n = 4$ hätte man nämlich den genaueren Werth von $\Delta\Theta_c = \vartheta_c' + \Delta^2\Theta_c$ zu setzen, und fände wiederum, während nach (87 *a*) $S\vartheta_a' = 0$, und $S'\vartheta_a' = S\Delta\Theta_a$ ist,

$$91)\quad S\Delta^2\Theta_a = 0,\quad S'\Delta^2\Theta_a = 0,$$
$$K_1\Sigma\Theta_1 + K_2\Sigma\Theta_2 + K_3\Sigma\Theta_3 + K_4\Sigma\Theta_4 = 0,$$
$$K_1\vartheta_1 + K_2\vartheta_2 + K_3\vartheta_3 + K_4\vartheta_4 = 0,$$
$$K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + K_3\Delta\Theta_3 + K_4\Delta\Theta_4 = 0,$$

oder wegen der Unabhängigkeit von der Natur des Mittels:

$$K_1\Sigma\Delta\Theta_1 + K_2\Sigma\Delta\Theta_2 + K_3\Sigma\Delta\Theta_3 + K_4\Sigma\Delta\Theta_4 = 0,$$

mithin, da aus (90) folgt: $\Sigma' \Delta\Theta_c = \frac{\Sigma S' \Delta\Theta_a}{S' \Delta\Theta_a} \vartheta_c'$,

$$K_1 \vartheta_1' + K_2 \vartheta_2' + K_3 \vartheta_3' + K_4 \vartheta_4' = 0,$$

und da $\vartheta_c' = \Delta\Theta_c - \Delta^2\Theta_c$ ist,

$$K_1 \Delta^2\Theta_1 + K_2 \Delta^2\Theta_2 + K_3 \Delta^2\Theta_3 + K_4 \Delta^2\Theta_4 = 0.$$

Es ist daher $\Delta^2\Theta_4$ eine lineäre Funktion von $\Delta^2\Theta_1$, $\Delta^2\Theta_2$, $\Delta^2\Theta_3$, und somit auch $\Delta^2\Theta_5$, $\Delta^2\Theta_6$, $\Delta^2\Theta_7$, und man erhält durch Substitution dieser Werthe in (91) zwei Werthe für $\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2}$ und $\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_3}$, die von der Natur des Mittels unabhängig sind, und daher liefern: $\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta_1'}{\Delta^2\Theta_2'}$, folglich auch

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_1'} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta_2'} = \frac{\Delta^2\Theta_3}{\Delta^2\Theta_3'} = \ldots\ldots = \frac{\Delta^2\Theta_7}{\Delta^2\Theta_7'}, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta^2\Theta_c}{\Delta^2\Theta_c'} = \frac{S'' \Delta^2\Theta_a}{S'' \Delta^2\Theta_a'},$$

und mit Zuziehung der übrigen Mittel

$$\frac{\Delta^2\Theta_c}{S'' \Delta^2\Theta_a} = \frac{\Delta^2\Theta_c'}{S'' \Delta^2\Theta_a'} = \frac{\Delta^2\Theta_c''}{S'' \Delta^2\Theta_a''} = \ldots\ldots = \frac{\Sigma'' \Delta^2\Theta_c}{\Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_a},$$

mithin, da die Entwicklungen unter der Voraussetzung gemacht sind, dafs man $n = 4$ setzen darf,

$$\vartheta_c'' = \Delta^2\Theta_c = \frac{\Sigma'' \Delta^2\Theta_c}{\Sigma'' S'' \Delta^2\Theta_a} S'' \Delta^2\Theta_a.$$

Man sieht voraus, wie man durch die Annahme, dafs $n = 5$ zu hinreichend genauen Resultaten führt, auf

$$\vartheta_c''' = \Delta^3\Theta_c = \frac{\Sigma''' \Delta^3\Theta_c}{\Sigma''' S''' \Delta^3\Theta_a} S''' \Delta^3\Theta_a \text{ etc.}$$

kommen würde, und dafs mithin der vollständige Werth von Θ_c sein wird:

$$\Theta_c = \vartheta_c + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c''' \ldots\ldots + \Delta^{n-1}\Theta_c.$$

Sollen nun $n-1$ Glieder der Gleichung (81) allen Ansprüchen an die geforderte Genauigkeit genügen, so mufs $\Delta^{n-1}\Theta_c$ innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegen, so dafs $\Theta_c - \Delta^{n-1}\Theta_c = \vartheta_c + \vartheta_c' + \vartheta_c'' \ldots\ldots + \vartheta_c^{(n-2)}$ dem wahren Werth Θ_c im Allgemeinen näher kommt, als der aus Beobachtungen bestimmte Werth derselben Gröfse, jedenfalls aber diesem beobachteten Werthe vorzuziehen ist.

Zur Bestimmung von n kann man nun so verfahren:

Nach möglichst genau beobachteten Werthen der Brechungsverhältnisse der Strahlen B, C, D, E, F, G, H für verschiedene Substanzen berechne man, für c nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 setzend, für sämmtliche Substanzen:

$$92)\quad \begin{cases} \Delta\Theta_c = \Theta_c - \vartheta_c \\ \Delta^2\Theta_c = \Delta\Theta_c - \vartheta_c' \\ \Delta^3\Theta_c = \Delta^2\Theta_c - \vartheta_c'' \\ \Delta^4\Theta_c = \Delta^3\Theta_c - \vartheta_c''' \text{ etc. etc.,} \end{cases}$$

während man dazu ϑ_c, ϑ_c', ϑ_c'' etc. findet aus

$$93)\quad \begin{cases} \vartheta_c = \dfrac{\Sigma\Theta_c}{\Sigma S\Theta_a} S\Theta_a \\ \vartheta_c' = \dfrac{\Sigma'\Delta\Theta_c}{\Sigma' S'\Delta\Theta_a} S'\Delta\Theta_a \\ \vartheta_c'' = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_c}{\Sigma'' S''\Delta^2\Theta_a} S''\Delta^2\Theta_a \\ \vartheta_c''' = \dfrac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_c}{\Sigma''' S'''\Delta^3\Theta_a} S'''\Delta^3\Theta_a \text{ etc. etc.,} \end{cases}$$

und bleibt bei denjenigen Differenzen $\Delta^b\Theta_c$ stehen, welche unter der nach der obigen Angabe bestimmten Grenze der Beobachtungsfehler liegen.

Cauchy legte die Fraunhoferschen Messungen für Wasser, Kalilösung, Terpenthinöl und mehrere Arten Kron- und Flintglas zum Grunde, und bestimmte die Grenze der Beobachtungsfehler aus zwei Reihen Messungen, die derselbe für Wasser und eine Flintglasart angestellt hat. Als gröfste Differenzen in den aus den Beobachtungen abgeleiteten Werthen für Θ finden sich daraus resp. 0,000159 und 0,000113.

Von den Werthen von $\Delta^3\Theta_a$, welche Cauchy nach dem Schema (92, 93) berechnete, überstieg nur einer diese Grenze, nämlich der für den Strahl D des Flintglases No. 1, welcher 0,000171 betrug, während der gröfste Werth von $\Delta^4\Theta_a$ nur 0,000079 war. Es sind daher die nach der Formel

$$(\text{☾})\quad \Theta_c = \vartheta_c + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c'''$$

berechneten Werthe von Θ_c den aus Beobachtungen abgeleiteten vorzuziehen, wenn diese Beobachtungen in Absicht auf Genauigkeit den Fraunhoferschen gleich stehen.

Von den Substanzen, deren Brechungsverhältnifs Fraunhofer durch Messungen bestimmte, ist die eine, das Terpenthinöl, doppelbrechend; jedoch ist die Art der Doppelbrechung in demselben abweichend von derjenigen der bisher betrachteten Krystalle, und wird erst späterhin näher betrachtet werden. Die Resultate jener Messungen sind folgende:

Tab. I.

Substanzen.	Specifisches Gewicht.	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
a) Wasser	1,000	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
b) Wasser	1,000	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Kalilösung	1,416	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
Terpenthinöl	0,885	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
Kronglas No. 13.	2,535	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
Kronglas No. 9.	2,535	1,525832	1,526849	1,529587	1,538005	1,536052	1,541657	1,546566
Kronglas Litt. M.	2,756	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
Flintglas No. 3.	3,512	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flintglas No. 30.	3,695	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
a) Flintglas No. 23. . . .	3,724	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
b) Flintglas No. 23. . . .	3,724	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Flintglas No. 13.	3,723	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062

Die beiden mit *a* und *b* bezeichneten Reihen für Wasser und Flintglas No. 23. sind die Resultate der Doppelmessungen, aus denen die Grenze der Beobachtungsfehler bestimmt worden ist

Die hieraus gezogenen Werthe von Θ_c sind:

Tab. II.

Substanzen.	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4	Θ_5	Θ_6	Θ_7
a) Wasser	1,771387	1,773457	1,778429	1,784497	1,789757	1,799068	1,806813
b) Wasser	1,771500	1,773449	1,778429	1,784492	1,789677	1,798981	1,806772
Kalilösung	1,958961	1,961442	1,967862	1,975801	1,982695	1,995381	2,006099
Terpenthinöl	2,162360	2,165402	2,173955	2,185528	2,195543	2,214734	2,231661
Kronglas No. 13. . . .	2,323527	2,326538	2,334730	2,345101	2,354190	2,371317	2,386049
Kronglas No. 9. . . .	2,328164	2,331269	2,339637	2,350105	2,359457	2,376707	2,391867
Kronglas Litt. M. . . .	2,417322	2,420927	2,430716	2,443438	2,454677	2,476012	2,494726
Flintglas No. 3..	2,566538	2,572175	2,587255	2,606712	2,624535	2,659418	2,690825
Flintglas No. 30. . . .	2,635981	2,642177	2,658808	2,680936	2,700981	2,740370	2,775796
a) Flintglas No. 23. . .	2,645712	2,651854	2,668865	2,691384	2,711886	2,751781	2,787832
b) Flintglas No. 23. . .	2,645816	2,651912	2,668869	2,691225	2,711806	2,751776	2,787853
Flintglas No. 13. . . .	2,649568	2,655861	2,673344	2,696244	2,716761	2,756547	2,792449

Der Ueberschufs der nach der Formel

$$\Theta_c = \vartheta_c + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c'''$$

mittelst (92 und 93) berechneten Werthe von Θ_c über die vorstehenden beobachteten, in Einheiten der letzten Decimale ausgedrückt, sind in der folgenden Tafel verzeichnet.

Tab. III.

	Wasser.		Kali.	Terpenthinöl.	Kronglas			Flintglas				
	a.	b.			No. 13.	No. 9.	Lit. M.	No. 3.	No. 30.	No. 23. a.	No. 23. b.	No. 13.
Θ_1	−12	−4	24	−31	34	13	1	−7	−22	−2	39	−8
Θ_2	47	−6	−1	10	−33	−20	3	−31	44	10	16	−40
Θ_3	−13	8	−9	−36	−1	61	−11	19	−65	7	26	14
Θ_4	−21	1	−12	58	−1	−30	6	21	43	−17	−79	33
Θ_5	35	2	−12	−26	−33	41	−8	−13	−20	18	42	−25
Θ_6	1	−12	33	5	36	−74	12	−25	43	−6	13	−22
Θ_7	−33	9	−22	22	−2	32	−4	39	−22	−11	−54	47
ϑ_1	−4	−2	9	−11	11	−4	0	−2	−7	−1	12	−2
ϑ_2	18	−2	0	3	−11	−7	1	−10	14	3	5	−12
ϑ_3	−5	3	−3	−12	0	20	−4	6	−20	2	8	4
ϑ_4	−8	0	−4	20	0	−10	2	7	18	−5	−24	10
ϑ_5	13	1	−4	−9	−11	13	−3	−4	−6	5	13	−8
ϑ_6	0	−4	12	2	12	−24	4	−8	13	−2	4	−7
ϑ_7	−12	3	−8	7	−1	10	−1	12	−7	−3	−16	14

Auf die Luft angewendet, für welche $\Theta_c = 1$ werden mufs, erhält man als Differenzen in Millionteln für Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5, Θ_6, Θ_7 respective:

$$-75;\ -40;\ 47;\ 60;\ 8;\ -122;\ 117;\ 4.$$

Die Uebereinstimmung wird jedoch vollkommen, d. h. diese Differenzen werden gleich Null, sobald man statt des ersten Gliedes der Formel für Θ_c, nämlich statt ϑ_c das arithmetische Mittel der gegebenen Brechungsverhältnisse, d. h. $\frac{1}{7}S\Theta_a$, welches hier 1 wird, nimmt, indem alsdann $\Delta\Theta_c = \Delta^2\Theta_c = \Delta^3\Theta_c = \Delta^4\Theta_c = 0$ wird.

Setzt man der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{7}(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7) = \tfrac{1}{7}S\Theta_a = \Theta,$$

$$\frac{\Sigma\Delta\Theta_c}{\Sigma S'\Delta\Theta_a} = \beta_c,\quad \frac{\Sigma''\Delta^2\Theta_c}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta_a} = \gamma_c,\quad \frac{\Sigma'''\Delta^3\Theta_c}{\Sigma'''S'''\Delta^3\Theta_a} = \delta_c,$$

so erhält man statt der Gleichungen (92 und 93), wenn man Θ für ϑ_c einführt:

$$94)\quad \begin{cases} \Delta\Theta_c = \Theta_c - \Theta \\ \Delta^2\Theta_c = \Delta\Theta_c - \vartheta_c' \\ \Delta^3\Theta_c = \Delta^2\Theta_c - \vartheta_c'', \end{cases}$$

$$95)\quad \begin{cases} \Theta = \tfrac{1}{7}S\Theta_a \\ \vartheta_c' = \beta_c S'\Delta\Theta_a \\ \vartheta_c'' = \gamma_c S''\Delta^2\Theta_a \\ \vartheta_c''' = \delta_c S'''\Delta^3\Theta_a. \end{cases}$$

Bestimmt man alsdann Θ_c aus der Gleichung

$$96)\quad \Theta_c = \Theta + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c''',$$

indem man für ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' die Werthe aus (95) statt aus (93) nimmt, so erhält man gleichfalls Resultate, deren Abweichungen von den beobachteten Werthen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegen, sobald sich erweisen läſst, daſs die Gröſsen Θ, ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' aus (95) von derselben Ordnung wie ϑ_c, ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' aus (93), oder was dasselbe ist, wie τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, sind.

Damit Θ und ϑ_c von gleicher Ordnung seien, muſs $\Delta\Theta$, so wie $\Delta\vartheta_c$ verschwinden, wenn man in (83 u. 84) nur zwei Glieder beibehält. Da nun $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ für diesen Fall ist, also (84) sich auf $(K_1 + K_2)\Theta = 0$ reducirt, so verificirt sich diese Gleichung, weil (83) $K_1 + K_2 = 0$ giebt, d. h. es wird $\Delta\Theta = 0$ und $\Delta\Theta$ ist demnach von gleicher Ordnung mit τ_2.

Hieraus ergiebt sich, wenn man in (83 u. 84) 3 Glieder beibehält, wegen $\Theta_c = \Theta + \Delta\Theta_c$, wiederum die Gleichung (89) nämlich

$$K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2 + K_3\Delta\Theta_3 = 0,$$

folglich bleiben die späteren (auf die Gleichung (89) folgenden) Entwickelungen ungeändert, und mithin sind die aus (95) sich ergebenden Werthe von ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' in Absicht auf ihre Kleinheit von gleicher Ordnung mit den aus (93) gezogenen, d. h. die Gleichung (96) giebt Resultate, welche gleichfalls den Vorzug vor den aus den Beobachtungen gewonnenen verdienen.

Setzt man der Kürze wegen

$$S\Theta_a = U,\quad S'\Theta_a = U',\quad S''\Theta_a = U'',\quad S'''\Theta_a = U''',$$

so erhält man aus (94):

$$\Delta\Theta_c = \Theta_c - \Theta,$$

mithin $\quad S'\Delta\Theta_a = S'(\Theta_a - \Theta) = S'\Theta_a - \Theta = U' - \Theta,$

folglich: $\quad \vartheta_c' = (U' - \Theta)\beta_c.$

Ferner ist $\Delta^2\Theta_c = \Delta\Theta_c - \vartheta_c' = \Theta_c - \Theta - (U' - \Theta)\beta_c$,

mithin: $\quad S''\Delta^2\Theta_a = S''[\Theta_a - \Theta - (U' - \Theta)\beta_a]$

$= S''\Theta_a - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a = U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a,$

folglich: $\quad \vartheta_c'' = [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]\gamma_c.$

Ebenso ist $\Delta^3\Theta_c = \Delta^2\Theta_c - \vartheta_c'' = \Theta_c - \Theta - (U' - \Theta)\beta_c$
$- [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]\gamma_c$,
also: $S'''\Delta^3\Theta_a = U''' - \Theta - (U' - \Theta)S'''\beta_a$
$- [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]S'''\gamma_a$.
folglich: $\vartheta_c''' = [U''' - \Theta - (U' - \Theta)S'''\beta_a$
$- [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]S'''\gamma_a]\delta_c$,

Die Substitution dieser Werthe in (94) giebt daher:

$$\Theta_c = \Theta + (U' - \Theta)\beta_c - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]\gamma_c + [U''' - \Theta - (U' - \Theta)S'''\beta_a - [U'' - \Theta - (U' - \Theta)S''\beta_a]S'''\gamma_a]\delta_c,$$

oder, wenn man $U' - \Theta = A_1$, $U'' - \Theta = A_1''$, $U''' - \Theta = A_1'''$, setzt:

$$\Theta_c = \Theta + A_1\beta_c - (A_1'' - A_1 S''\beta_a)\gamma_c + (A_1''' - A_1 S'''\beta_a - [A_1'' - A_1 S''\beta_a]S'''\gamma_a)\delta_c;$$

oder, $A_1'' - A_1 S''\beta_a = A_2$ und $A_1''' - A_1 S'''\beta - A_2 S'''\gamma_a = A_3$ setzend,

$$\text{XVIII.} \quad \Theta_c = \Theta + A_1\beta_c + A_2\gamma_c + A_3\delta_c.$$

Es ist also Θ_c eine lineäre Funktion, einmal von β_c, γ_c, δ_c, die sich mit der Farbe des Strahls ändern, und auf der andern Seite eine lineäre Funktion von Θ, A_1, A_2, A_3, die sich nur mit dem Medium ändern. β_c, γ_c, δ_c läfst sich daher ein für allemal als für alle Substanzen gültig berechnen.

Die Constanten β_c, γ_c, δ_c und deren Logarithmen, aus den Fraunhoferschen Messungen gezogen, sind folgende:

Tab. IV.

c	β_c	γ_c	δ_c	$log(\pm\beta_c)$	$log(\pm\gamma_c)$	$log(\pm\delta_c)$
1	0,190836	—0,16423	—0,2357	2806612	2154602	3722686
2	0,168772	—0,08707	0,1094	2273007	9398676	0392056
3	0,109002	0,06720	0,2435	0374332	8273423	3864878
4	0,031390	0,18408	—0,1162	4967943	2649986	0651847
5	—0,038191	0,20259	—0,1476	5819592	3066121	1690674
6	—0,171628	0,04688	0,0207	2345877	6635100	3154951
7	—0,290181	—0,24876	0,1269	4626688	3957769	1035171

Hieraus folgt:

$S''\beta_a = -0{,}138854 \qquad log(-S''\beta_a) = 1425584$
$S'''\beta_a = -0{,}368070 \qquad log(-S'''\beta_a) = 5659304$
$S'''\gamma_a = -0{,}444990 \qquad log(-S'''\gamma_a) = 6483503.$

Die Constanten Θ, A_1, A_2, A_3, welche sich nicht mit der Farbe, aber von Mittel zu Mittel ändern, sind für die obigen Substanzen in folgender Tafel enthalten:

Tab. V.

	Wasser a.	Wasser b.	Kalilösung.	Terpenthinöl.
Θ	1,786201	1,786186	1,978320	2,189883
A_1	−0,074069	−0,073746	−0,098429	−0,144576
A_2	0,003608	0,003433	0,003250	0,000379
A_3	0,000270	0,000158	0,000223	−0,000605

	Kronglas No. 13.	Kronglas No. 9.	Kronglas Litt. M.	Flintglas No. 3.
Θ	2,348779	2,353887	2,448260	2,615351
A_1	−0,130439	−0,132743	−0,161272	−0,257449
A_2	0,002333	0,002288	0,001214	−0,002717
A_3	0,000062	0,000026	−0,000136	0,000568

	Flintglas No. 30.	Flintglas No. 23 (*a*).	Flintglas No. 23 (*b*).	Flintglas No. 13.
Θ	2,690721	2,701331	2,701322	2,705825
A_1	−0,289966	−0,295015	−0,294935	−2,296565
A_2	−0,003842	−0,003777	−0,004180	−0,001987
A_3	0,000094	−0,000250	−0,000176	−0,000237

Die nächstfolgenden zwei Tafeln enthalten die Differenzen zwischen den hiernach berechneten Werthen von Θ_c und θ_c, und denen der Tafel I. u. II.:

Tab. VI.

	Wasser. a.	Wasser. b.	Kali.	Terpenthinöl.	Kronglas No. 13.	Kronglas No. 9.	Kronglas Litt. M.	Flintglas No. 3.	Flintglas No. 30.	Flintglas No. 23. a.	Flintglas No. 23. b.	Flintglas No. 13.
Θ_1	−22	−11	12	−14	39	−9	6	6	−13	2	51	−44
Θ_2	41	−9	−7	18	−31	−19	6	−25	49	11	22	−59
Θ_3	−6	13	−1	47	−3	59	−14	11	−71	6	19	37
Θ_4	−12	7	−1	43	−5	−33	1	8	35	−20	−90	66
Θ_5	36	3	−9	−28	−35	40	−8	−14	−22	16	41	−22
Θ_6	−17	−23	13	34	42	−68	20	−5	58	−4	32	−80
Θ_7	−17	20	−3	−4	−9	26	−13	19	−36	−15	−72	103
θ_1	−8	−4	4	−5	13	−3	2	2	−4	1	16	−14
θ_2	15	−3	−2	6	−10	−6	2	−8	15	3	7	−18
θ_3	−2	5	0	−16	−1	19	−4	3	−22	2	6	11
θ_4	−4	3	0	15	−2	−11	0	2	11	−6	−27	20
θ_5	13	1	−3	−9	−11	13	−3	−4	−7	5	12	7
θ_6	−6	−9	5	11	14	−22	6	−2	18	−1	10	−24
θ_7	−6	7	−1	−1	−3	8	−4	6	−11	−4	−22	31

Die vorstehenden Werthe weichen von denen der Tafel III. um weniger als 0,000010 ab, wenn man das Flintglas No. 13. ausnimmt, in welchem die Differenz auf 0,000017 steigt. Man wird daher dieselben als Norm nehmen können, und zwar, nach Cauchy's Meinung, mit gröfserem Rechte als die der Tafel III., weil die Grundformel für Luft vollkommen strenge Resultate liefert.

Es möge daher hier noch die Gleichung (XVIII.) auf die von Rudberg durch Beobachtung bestimmten Brechungsverhältnisse des Bergkrystalls, des Kalkspaths, des Arragonits und des Topases angewendet werden.

Die Resultate der Rudberg'schen Messungen enthält die folgende Tafel, in welcher die Brechungsverhältnisse der gewöhnlichen Strahlen des (positiv einaxigen) Bergkrystalls und des (negativ einaxigen) Kalkspaths, deren genäherte Werthe beziehlich gleich $\frac{1}{\pi}$ und gleich $\frac{1}{\mu}$ (s. p. 70) gefunden wurden, mit *o* überschrieben sind, die der senkrecht gegen die Axe gerichteten ungewöhnlichen Strahlen dagegen, die beziehlich näherungsweise gleich $\frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{\pi}$ sind, mit *e*.

Die Brechungsverhältnisse der den (negativ zweiaxigen) Arragonit, und den (positiv zweiaxigen) weifsen Topas in der Richtung der Elasticitätsaxen durchlaufenden Strahlen sind mit den Zeichen ihrer Näherungswerthe $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\mu}$ überschrieben.

Tab. VII.

	Bergkrystall		Topas		
	o	*e*	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
θ_1	1,54090	1,54990	1,60840	1,61049	1,61791
θ_2	1,54181	1,55085	1,60935	1,61144	1,61880
θ_3	1,54418	1,55328	1,61161	1,61375	1,62109
θ_4	1,54711	1,55631	1,61452	1,61668	1,62408
θ_5	1,54965	1,55894	1,61701	1,61914	1,62652
θ_6	1,55425	1,56365	1,62154	1,62365	1,63123
θ_7	1,55817	1,56772	1,62539	1,62745	1,63506

	Bergkrystall		Topas		
	o	e	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
Θ_1	2,374373	2,402190	2,586951	2,593678	2,617633
Θ_2	2,377177	2,405136	2,590007	2,596734	2,620513
Θ_3	2,384492	2,412678	2,597287	2,604190	2,627932
Θ_4	2,393550	2,422101	2,606674	2,613655	2,637630
Θ_5	2,401415	2,430295	2,614721	2,621615	2,645567
Θ_6	2,415695	2,445003	2,629395	2,636257	2,660911
Θ_7	2,427893	2,457746	2,641893	2,648594	2,673423

	Kalkspath		Arragonit		
	o	e	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
θ_1	1,65308	1,48391	1,52749	1,67631	1,68061
θ_2	1,65452	1,48455	1,52820	1,67779	1,68203
θ_3	1,65850	1,48635	1,53013	1,68157	1,68589
θ_4	1,66360	1,48868	1,53264	1,68634	1,69084
θ_5	1,66802	1,49075	1,53479	1,69053	1,69515
θ_6	1,67617	1,49453	1,53882	1,69836	1,70318
θ_7	1,68330	1,49780	1,54226	1,70509	1,71011
Θ_1	2,732674	2,201988	2,333226	2,810014	2,824451
Θ_2	2,737436	2,203889	2,335395	2,814979	2,829224
Θ_3	2,750623	2,209237	2,341297	2,827678	2,842225
Θ_4	2,767565	2,216168	2,348985	2,843742	2,858938
Θ_5	2,782291	2,222336	2,355580	2,857892	2,873533
Θ_6	2,809545	2,233620	2,367967	2,884427	2,900821
Θ_7	2,833499	2,243405	2,378565	2,907332	2,924475

Die diesen Mitteln eigenthümlichen Constanten Θ, A_1, A_2, A_3 sind:

Tab. VIII.

	Bergkrystall		Topas		
	o	e	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
Θ	2,396371	2,425021	2,609561	2,616389	2,640515
A_1	−0,111782	−0,115960	−0,114651	−0,114598	−0,116708
A_2	0,003817	0,003883	0,003745	0,004410	0,003751
A_3	0,000102	0,000003	0,000141	0,000220	0,000146

	Kalkspath		Arragonit		
	o	*e*	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
Θ	2,773376	2,218663	2,351572	2,849438	2,864809
A_1	−0,210413	−0,086742	−0,094792	−0,202676	−0,208800
A_2	0,003822	0,001372	0,001909	0,003834	0,003565
A_3	−0,000549	−0,000321	−0,000180	0,000437	−0,000253

Die Abweichungen der mittelst der Tafeln VIII. u. IV. aus der Gleichung (XVIII.) abgeleiteten Werthe von Θ_c und θ_c von den Messungen sind folgende:

Tab. IX.

	Bergkrystall		Kalkspath		Topas			Arragonit		
	o	*e*	*o*	*e*	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\varkappa}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{1}{\mu}$
Θ_1	−15	−64	10	66	−82	−66	40	15	−13	14
Θ_2	−7	23	−47	20	107	46	5	7	33	−7
Θ_3	24	35	59	15	−63	−58	−149	−27	−37	−2
Θ_4	−3	5	27	−61	39	77	105	16	11	−1
Θ_5	17	58	24	35	43	−19	27	−26	1	−9
Θ_6	−39	−99	109	14	−44	−7	190	42	18	17
Θ_7	21	42	85	−47	−24	20	−43	−16	−20	−15
θ_1	0	−2	0	1	−2	−1	1	0	0	0
θ_2	0	1	−1	1	3	2	0	0	1	0
θ_3	1	1	2	0	−2	−2	−5	−1	−1	0
θ_4	0	0	1	−2	1	2	3	0	0	0
θ_5	0	2	1	1	1	−1	1	−1	0	0
θ_6	−1	−3	−3	0	−1	0	6	1	1	0
θ_7	1	1	2	−2	−1	1	−1	0	−1	0

Die Uebereinstimmung mit den Messungen ist so grofs, wie man sie nur irgend erwarten kann. Die einzelnen Abweichungen liegen sämmtlich innerhalb der aus den Fraunhoferschen Messungen entnommenen Grenze der Beobachtungsfehler bis auf den Strahl Θ_6 des langsamsten Strahlensystems des Topas, wo dieselbe um ein Geringes überschritten wird, und der mittlere Werth von $\Delta^4\Theta_c$ ist 0,000038, während derselbe für die Fraunhoferschen Substanzen 0,000026 ist.

Selbst gröfsere Abweichungen hätten nicht auffallen dürfen, da bei doppelbrechenden Krystallen noch eine neue Fehlerquelle, die Ungenauigkeit der Schleifung des Krystallstücks, an welchem die Messungen angestellt werden, hinzukommt.

Für Bergkrystall und Arragonit hat Rudberg zwei Reihen von Messungen angestellt, und die Resultate der Rechnung liegen sämmtlich zwischen diesen beiden Reihen. Läfst man die Messungen aufser Acht, welche auf eine constante Fehlerquelle schliefsen lassen, so sind die gröfsten Abweichungen der Rudbergschen Messungen unter sich 0,000270 (für Bergkrystall θ_3, o) und 0,000515 (für Aragonit θ_7, $\frac{1}{\mu}$), also bei weitem gröfser, als die Abweichungen der mittleren Werthe von der Rechnung.

Die Werthe von Θ, ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''', welche durch die Gleichungen (95) bestimmt sind, müssen den obigen Entwickelungen zufolge eine abnehmende Reihe bilden, und so findet es sich auch für die in Tafel I. enthaltenen Substanzen, mit Ausnahme des Terpenthinöls, für welches meist $\vartheta_c''' > \vartheta_c''$ ist.

Es ist nämlich für dasselbe

$$\vartheta_1' = -0{,}027590 \quad \vartheta_2' = -0{,}024400 \quad \vartheta_3' = -0{,}015759$$
$$\vartheta_1'' = -0{,}000062 \quad \vartheta_2'' = -0{,}000033 \quad \vartheta_3'' = 0{,}000025$$
$$\vartheta_1''' = 0{,}000143 \quad \vartheta_2''' = -0{,}000066 \quad \vartheta_3''' = -0{,}000147$$

$$\vartheta_4' = -0{,}004538 \quad \vartheta_5' = 0{,}005522 \quad \vartheta_6' = 0{,}024813$$
$$\vartheta_4'' = 0{,}000070 \quad \vartheta_5'' = 0{,}000077 \quad \vartheta_6'' = 0{,}000017$$
$$\vartheta_4''' = 0{,}000070 \quad \vartheta_5''' = 0{,}000089 \quad \vartheta_6''' = -0{,}000013$$

$$\vartheta_7' = 0{,}041953$$
$$\vartheta_7'' = -0{,}000094$$
$$\vartheta_7''' = -0{,}000077.$$

Was dagegen die Werthe von ϑ_c, ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' betrifft, welche durch die Gleichungen (93) bestimmt sind, so wird für einzelne Strahlen $\vartheta_c''' > \vartheta_c''$ nicht nur beim Terpenthinöl, sondern auch beim Flintglas No. 3. und beim Flintglas No. 23. (in Bezug auf die erste Reihe (a)).

Abgesehen von dem Vorzug, den die Bestimmung der Brechungsverhältnisse mittelst (XVIII.) vor der Bestimmung

mittelst (☾) haben mag, scheint an dieser Abweichung die absolute Kleinheit von ϑ_c'' Antheil zu haben, da die Werthe von ϑ_c'' aus (93) im Allgemeinen bedeutend kleiner als die aus (95) entnommenen sind.

Es scheint daher die Reihe $\vartheta_c + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c'''$ etc. im Allgemeinen schneller zu convergiren, als die Reihe $\Theta + \vartheta_c' + \vartheta_c'' + \vartheta_c'''$, so dafs in der ersteren die (absolute) Differenz $\vartheta_c'' - \vartheta_c'''$, wenn ϑ_c'' und ϑ_c''' aus (93) mit Hilfe der zum Grunde liegenden Beobachtungen genommen werden, nur deshalb so klein ist (und mithin auch negativ werden kann), weil das wahre (von Beobachtungsfehlern freie) ϑ_c''' von der Ordnung der Beobachtungsfehler ist und deshalb leicht gröfser oder kleiner als das berechnete erscheint. Der Gang der Werthe von ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' in den beiden Reihen, wie er sich bei den Substanzen der Tafel I. zeigt, scheint wenigstens für diese Ansicht zu sprechen.

Cauchy suchte den Grund der bleibenden Abweichung beim Terpenthinöl in dessen doppelbrechender Kraft. Ist aber jenes anomale Verhältnifs von ϑ_c'' und ϑ_c''' wirklich etwas Wesentliches, so dürfte es eher der abweichenden Polarisationsart dieser Substanz als der doppelbrechenden Kraft im Allgemeinen zuzuschreiben sein, zumal da die anderen oben untersuchten doppelbrechenden Substanzen (der Kalkspath, Bergkrystall, Topas und Arragonit) eine regelmäfsige Abnahme der Glieder Θ, ϑ_c', ϑ_c'', ϑ_c''' zeigen.

Auf den Grund jener Unregelmäfsigkeit der Resultate beim Terpenthinöl schlofs Cauchy diese Substanz später von der Rechnung aus, und fand für die Constanten β_c, γ_c, δ_c folgende etwas geänderte Werthe:

Tab. X.

c	β_c	γ_c	δ_c	$log(\pm\beta_c)$	$log(\pm\gamma_c)$	$log(\pm\delta_c)$
1	0,190868	−0,16970	−0,2737	2087340	2296904	4372667
2	0,168734	−0,08510	0,1688	2272021	9299187	2273171
3	0,108921	0,07534	0,1612	0371132	8770350	2073000
4	0,031477	0,17924	−0,0547	4979974	2534450	7382967
5	−0,038125	0,19999	−0,1698	5812101	3010033	2299177
6	−0,171613	0,04521	0,0654	2345423	6552454	8154626
7	−0,290264	−0,24541	0,1064	4627934	3898998	0270922

nd hieraus:

$S''\beta_a = -0{,}138675$ $\qquad$ $log - S''\beta_a = 1419982$

$S'''\beta_a = -0{,}368439$ $\qquad$ $log - S'''\beta_a = 5663656$

$S'''\gamma_a = -0{,}41949$ $\qquad$ $log - S'''\gamma_a = 6227216$

Von den Constanten Θ, A_1, A_2, A_3, welche sich von [M]ittel zu Mittel ändern, erhalten nur A_2 und A_3 andere [W]erthe. Diese sind für die Substanzen der Tafel I.:

	Wasser		Kali-	Kronglas		
	a	b	lösung.	No. 13.	No. 9.	Litt. M.
A_2	0,003622	0,003445	0,003267	0,002357	0,002312	0,001243
A_3	0,000152	0,000048	0,000113	−0,000035	−0,000071	−0,000213

	Flintglas				
	No. 3.	No. 30.	No. 23 (a).	No. 23 (b).	No. 13.
A_2	−0,002670	−0,003790	−0,003724	−0,004127	−0,001935
A_3	0,000562	0,000108	0,000239	−0,000156	−0,000276

Die Abweichungen der hiernach corrigirten Werthe von [illegible]c und θ_c von denen der Tafel I. in Millionteln sind:

Tab. XI.

	Wasser		Kali.	Kronglas			Flintglas				
	a	b		13.	9.	L.M.	3.	30.	23 a	23 b	13
$\Delta^4\Theta_1$	−20	−12	14	35	−14	−3	27	−8	−7	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_2$	36	−9	−11	−25	−11	−21	−58	42	25	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_3$	−1	8	−1	−13	46	−38	56	−60	−13	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_4$	−14	13	−1	4	−22	19	−25	27	−6	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_5$	34	−2	−12	−39	35	−16	−2	−19	12	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_6$	−18	−20	15	48	−60	34	−30	52	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\Theta_7$	−17	20	−1	−9	24	−17	31	−33	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_1$	−8	−5	5	11	−5	−1	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_2$	14	−3	−4	−8	−4	7	−18	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_3$	0	3	0	−4	15	−12	17	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_4$	−5	5	0	1	−7	6	−6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_5$	13	1	−4	−13	11	−5	−1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_6$	−7	−7	5	16	−19	11	−9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\Delta^4\theta_7$	6	7	0	−3	8	−5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[D]ie gröfsten Abweichungen von [illegible]
[u]nd daher die für die Strahlen [illegible]
[N]o. 3, von denen die beiden [illegible]
[0,0]00014 *) betragen.

*) Dieser sehr geringen Differenzen [illegible]
[de]s Kalkspaths etc. nicht aus den [illegible]

Nimmt man statt der beiden Reihen für das Wasser und das Flintglas No. 23. das arithmetische Mittel, so werden die, wohl den gröfsten Vorzug verdienenden, Brechungsverhältnisse folgende:

Tab. XII.

	Wasser.	Kalilösung.	Kronglas			Flintglas			
			No. 13.	No. 9.	Litt. M.	No. 3.	No. 30.	No. 23.	No. 13.
θ_1	1,330963	1,399624	1,524301	1,525837	1,554775	1,602034	1,623572	1,626574	1,627766
θ_2	1,331705	1,400519	1,525307	1,526853	1,555926	1,603818	1,625464	1,628451	1,629694
θ_3	1,333576	1,402805	1,527986	1,529572	1,559087	1,608477	1,630603	1,633668	1,635033
θ_4	1,335850	1,405632	1,531371	1,533012	1,563146	1,614540	1,637348	1,640533	1,641998
θ_5	1,337796	1,408086	1,534350	1,536041	1,566746	1,620043	1,643472	1,646760	1,648269
θ_6	1,341285	1,412574	1,539892	1,541676	1,573524	1,630781	1,655390	1,658842	1,660305
θ_7	1,344169	1,416368	1,544687	1,546558	1,579475	1,640364	1,666082	1,669697	1,671033

Directe Bestimmung der Brechungsverhältnisse eines Mittels, wenn nur einzelne derselben gegeben sind.

Bisher sind zur Auswerthung der Werthe von θ_c sämmtliche durch Messungen bestimmte Brechungsverhältnisse benutzt, um dieselben möglichst frei von Beobachtungsfehlern zu erhalten.

Eine zweite Anwendung der Formeln (83 und 85) ist, aus gegebenen Werthen von θ_c die übrigen zu finden. Am kürzesten und am unabhängigsten von den Fehlern der Beobachtung gelangt man dazu, wenn man von der Gleichung

$$\text{(XVIII.)} \qquad \Theta_c = \Theta + A_1\beta_c + A_2\gamma_c + A_3\delta_c$$

ausgeht. Statt aber die Constanten Θ, A_1, A_2, A_3 direkt zu finden, was schon die Kenntnifs von Θ_c für sämmtliche Strahlen voraussetzt, lassen sich dieselben eliminiren durch vier neue Relationen, welche zwischen denselben (d. h. zwischen Θ, A_1, A_2, A_3) bestehen. Diese Relationen finden sich aus der vorstehenden Gleichung selbst, indem man für Θ_c die aus vier als gegeben betrachteten Brechungsverhältnissen hervorgehenden Werthe setzt.

Sind z. B. θ_1, θ_3, θ_5, θ_7 durch Messung gefunden, so hat man

$$97)\quad \begin{cases} \Theta_1 = \Theta + A_1\beta_1 + A_2\gamma_1 + A_3\delta_1 \\ \Theta_3 = \Theta + A_1\beta_3 + A_2\gamma_3 + A_3\delta_3 \\ \Theta_5 = \Theta + A_1\beta_5 + A_2\gamma_5 + A_3\delta_5 \\ \Theta_7 = \Theta + A_1\beta_7 + A_2\gamma_7 + A_3\delta_7. \end{cases}$$

Behufs der Elimination subtrahire man die erste dieser Gleichungen von (XVIII.) und dividire die Differenz, welche

$$\Theta_c - \Theta_1 = A_1(\beta_c - \beta_1) + A_2(\gamma_c - \gamma_1) + A_3(\delta_c - \delta_1)$$

ist, durch $\beta_c - \beta_1$, so dafs man, wenn man der Kürze wegen $\frac{\gamma_c - \gamma_1}{\beta_c - \beta_1} = \gamma_c'$ und $\frac{\delta_c - \delta_1}{\beta_c - \beta_1} = \delta_c'$ setzt,

$$\frac{\Theta_c - \Theta_1}{\beta_c - \beta_1} = A_1 + A_2\gamma_c' + A_3\delta_c',$$

und hieraus $\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = A_1 + A_2\gamma_3' + A_3\delta_3'$

erhält. Ferner dividire man die Differenz der beiden letzten Gleichungen, nämlich

$$\frac{\Theta_c - \Theta_1}{\beta_c - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1} = A_2(\gamma_c' - \gamma_3') + A_3(\delta_c' - \delta_3')$$

durch $\gamma_c' - \gamma_3'$, und setze abkürzend $\frac{\delta_c' - \delta_3'}{\gamma_c' - \gamma_3'} = \delta_c''$, so dafs man

$$\left(\frac{\Theta_c - \Theta_1}{\beta_c - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right) \cdot \frac{1}{\gamma_c' - \gamma_3'} = A_2 + A_3\delta_c'',$$

und somit auch

$$\left(\frac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right) \cdot \frac{1}{\gamma_5' - \gamma_3'} = A_2 + A_3\delta_5''$$

erhält.

Durch Subtraction der letzten beiden Gleichungen ergiebt sich A_3 als blofse Funktion von δ_c''. Setzt man in diesen Werth von A_3, $c = 7$, so bekommt man einen zweiten Ausdruck für A_3, welcher, mit jenem zu einer Gleichung verbunden, giebt:

$$\left(\frac{\frac{\Theta_c - \Theta_1}{\beta_c - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_c' - \gamma_3'} - \frac{\frac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3}\right) \cdot \frac{1}{\delta_c'' - \delta_3''}$$

$$= \left(\frac{\frac{\Theta_7 - \Theta_1}{\beta_7 - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_7' - \gamma_3'} - \frac{\frac{\Theta_5 - \Theta_1}{\beta_5 - \beta_1} - \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\beta_3 - \beta_1}}{\gamma_5' - \gamma_3'}\right) \cdot \frac{1}{\delta_7'' - \delta_3''},$$

folglich

$$98) \quad \Theta_c = \Theta_1 + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1) + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_5 - \beta_1} \cdot \frac{\gamma_c' - \gamma_3'}{\gamma_5' - \gamma_3'} \times \left(\Theta_5 - \Theta_3 - \frac{\beta_5 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1)\right) + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_7 - \beta_1} \cdot \frac{\gamma_c' - \gamma_3'}{\gamma_7' - \gamma_3'} \cdot \frac{\delta_c'' - \delta_5''}{\delta_7'' - \delta_5''} \times \left[\Theta_7 - \Theta_1 - \frac{\beta_7 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1) - \frac{\beta_7 - \beta_1}{\beta_5 - \beta_1} \cdot \frac{\gamma_7' - \gamma_3'}{\gamma_5' - \gamma_3'} \times \left(\Theta_5 - \Theta_1 - \frac{\beta_5 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1)\right)\right],$$

welche Gleichung unmittelbar die Werthe von Θ_2, Θ_4, Θ_6 liefert.

Durch Auswerthung der Constanten erhält man hieraus: (XIX.)

$$\Theta_2 = 0{,}47143\,\Theta_1 + 0{,}73685\,\Theta_3 - 0{,}24587\,\Theta_5 + 0{,}03759\,\Theta_7$$
$$\Theta_4 = 0{,}09913\,\Theta_1 + 0{,}16566\,\Theta_3 + 0{,}82448\,\Theta_5 - 0{,}08927\,\Theta_7$$
$$\Theta_6 = -0{,}15023\,\Theta_1 + 0{,}08584\,\Theta_3 + 0{,}62126\,\Theta_5 + 0{,}44313\,\Theta_7.$$

Die Logarithmen der 12 Constanten dieser Gleichungen, aus denen dieselben bestimmt wurden, sind in derselben Folge die nachstehenden:

6734172, 8673791, 3907055, 5749464
9962051, 2192177, 9161801, 9506877
1767567, 9336897, 7932734, 6465330.

Die Abweichungen der hiernach berechneten Werthe von Θ_2, Θ_4, Θ_6 für die in Tafel I. und IX. enthaltenen Substanzen von den beobachteten sind in Einheiten der letzten Decimale:

Tab. XIII.

	Wasser *a*	Wasser *b*	Kali.	Kronglas 13.	Kronglas 9.	Kronglas L.M.	Terpenthin	Flintglas 3.	Flintglas 30.	Flintglas 23 *a*.	Flintglas 23 *b*.	Flintglas 13.
θ_2	−65	14	14	56	50	−11	−53	40	−103	−11	3	74
θ_4	41	−6	−5	−19	73	−8	−75	−19	−63	35	138	−91
θ_6	33	37	−22	−74	111	−33	−55	−4	−92	8	−45	122

	Bergkrystall *o*	Bergkrystall *e*	Topas $\frac{1}{\varkappa}$	Topas $\frac{1}{\nu}$	Topas $\frac{1}{\mu}$	Kalkspath *o*	Kalkspath *e*	Arragonit $\frac{1}{\varkappa}$	Arragonit $\frac{1}{\nu}$	Arragonit $\frac{1}{\mu}$
θ_2	2	66	232	144	93	−22	34	39	94	17
θ_4	−25	−48	10	94	231	1	−108	26	5	−6
θ_6	−68	−170	−43	−20	312	−177	11	65	23	23

Die Werthe von θ_2, θ_4, θ_6 der letzten vier Substanzen sind hiernach:

	Bergkrystall *o*	*D*	Bergkrystall *e*	*D*	Kalkspath *o*	*D*	Kalkspath *e*	*D*
θ_2	1,54181	0	1,55083	2	1,65452	0	1,48454	1
θ_4	1,54712	−1	1,55632	−1	1,66360	0	1,48871	−3
θ_6	1,55428	−3	1,56370	−5	1,67622	−5	1,49453	0

	Topas $\frac{1}{\varkappa}$	*D*	Topas $\frac{1}{\nu}$	*D*	Topas $\frac{1}{\mu}$	*D*
θ_2	1,60928	7	1,61139	5	1,61877	3
θ_4	1,61452	0	1,61665	3	1,62401	7
θ_6	1,62155	−1	1,62366	−1	1,63113	10

	Arragonit $\frac{1}{\varkappa}$	*D*	Arragonit $\frac{1}{\nu}$	*D*	Arragonit $\frac{1}{\mu}$	*D*
θ_2	1,52819	1	1,67779	3	1,68203	0
θ_4	1,53264	0	1,68634	0	1,69084	0
θ_6	1,53880	2	1,69836	0	1,70318	0

Die Abweichungen sind hier im Allgemeinen gröfser, als die obigen, und müssen gröfser sein, da die Messungswerthe unmittelbar und ohne Compensationsverfahren in die Rechnung eingeführt werden. Die sich etwas über die Grenze der Beobachtungsfehler erhebenden Differenzen einiger Strahlen des Topases beruhen wahrscheinlich, wenn nicht auf einen zufällig gröfseren Beobachtungsfehler, auf

eine Ungenauigkeit in der Schleifung des Krystallstückes, welches zur Messung angewendet wurde.

Numerische Bestimmung der Wellenlänge, der Schwingungsdauer und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die von Fraunhofer gefundenen Werthe der Wellenlängen in der Luft, sind in $\frac{1}{100000000}$ Zollen:

$$l_1 = 2541 \quad l_2 = 2425 \quad l_3 = 2175 \quad l_4 = 1943$$
$$l_5 = 1789 \quad l_6 = 1585 \quad l_7 = 1451$$

und in $\frac{1}{10000000}$ Millimetern.

$$l_1 = 6878 \quad l_2 = 6564 \quad l_3 = 5888 \quad l_4 = 5260$$
$$l_5 = 4843 \quad l_6 = 4291 \quad l_7 = 3928.$$

Dividirt man diese Zahlen durch das Brechungsverhältnifs einer Substanz, so erhält man die Länge der Wellen in dieser letzteren.

Legt man die Werthe der Tafel I. zum Grunde, so erhält man für die dortigen Substanzen, in $\frac{1}{10000000}$ Millimetern:

Tab. XIV.

Substanzen.	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
Wasser	5168	4929	4415	3937	3620	3199	2922
Kalilösung	4915	4687	4197	3742	3439	3037	2773
Terpenthinöl . . .	4678	4461	3993	3558	3268	2883	2629
Kronglas No. 3. . .	4513	4304	3853	3435	3156	2786	2543
« No. 9. . .	4508	4299	3849	3431	3153	2783	2540
« Litt. M. . .	4424	4219	3776	3365	3091	2727	2487
Flintglas No. 3. . .	4294	4093	3660	3258	2989	2631	2394
« No. 30. . .	4237	4038	3611	3212	2947	2592	2358
« No. 23. . .	4229	4031	3604	3206	2941	2586	2352
« No. 13. . .	4226	4028	3601	3203	2938	2584	2351

e Substanzen der Tafel IX. erhält man ebenso;

Tab. XV.

		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
ystall	o . . .	4464	4258	3813	3400	3125	2761	2521
	e . . .	4438	4233	3791	3360	3106	2744	2505
ath	o . . .	4161	3968	3550	3162	2903	2560	2333
	e . . .	4634	4422	3961	3533	3249	2871	2622
nit	$\frac{1}{\varkappa}$ . . .	4503	4296	3848	3432	3155	2788	2547
	$\frac{1}{\nu}$ . . .	4103	4926	3501	3119	2865	2526	2304
	$\frac{1}{\mu}$ . . .	4093	4913	3492	3111	2857	2519	2297
	$\frac{1}{\varkappa}$ . . .	4277	4079	3653	3258	2995	2646	2417
	$\frac{1}{\nu}$ . . .	4271	4074	3648	3253	2991	2643	2413
	$\frac{1}{\mu}$ . . .	4251	4055	3632	3239	2984	2630	2402

as Brechungsverhältnifs der Luft ist für alle Strah-
sselbe, und von **Biot** und **Arago** bei $0^m,76$ Luft-
und für die Temperatur von 0° gleich 1,000294 ge-
. Astronomische Beobachtungen gaben als Mittel-
1,000276. Multiplicirt man mit der letzten Zahl die
ılängen für Luft, so erhält man für den leeren Raum

$= 6880 \quad l_2 = 6566 \quad l_3 = 5889 \quad l_4 = 5261$

$l_5 = 4844 \quad l_6 = 4292 \quad l_7 = 3929.$

ie Fortpflanzungsgeschwindigkeit im leeren Raum, oder
st dasselbe ist, in der Luft, ist von **Roemer** und
ni gleich 310177500 Meter in einer Zeitsekunde ge-
worden *).

Auf die Entdeckung, dafs das Licht Zeit gebrauche, um sich zu
n, d. h. dafs es eine angebbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit gäbe,
n dadurch, dafs man bemerkte, dafs die Verfinsterungen der Jupi-
banten nicht immer genau zu der Zeit eintraten, welche man durch
g gefunden hatte. Geht man bei der Berechnung dieser Verfinste-
on einer derselben aus, welche zu einer Zeit eintrat, in der die
ng des Jupiters von der Erde gleich a ist, und die Zeit des Eintritts
folgenden ist der Rechnung zufolge t, die des wirklichen Eintritts
$t+\delta$, während der Abstand des Jupiters alsdann $a+b$ ist, so
das Licht die Zeit δ, um einen Raum b zu durchlaufen, so dafs

ortpflanzungsgeschwindigkeit ist.

Aus den obigen Werthen von l läfst sich nun $\varkappa = \frac{2\pi}{l}$, und mit Hilfe des eben angegebenen Werthes von ω für den leeren Raum, die Schwingungsdauer $T = \frac{l}{\omega}$ für jeden Strahl, so wie die Zahl n der Schwingungen, die in einer Secunde vollführt werden, nämlich $n = \frac{1}{T}$, und endlich die Werthe von s aus $s = \frac{2\pi}{T}$ berechnen.

Nimmt man den Meter zur Längeneinheit und die Secunde zur Zeiteinheit, so ergiebt sich nämlich:

Tab. XVI.

Index des Strahls.	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{1}{10^3} k$	9132	9569	10669	11943	12971	11640	15992
$10^{18} T$	2218	2117	1899	1696	1562	1384	1267
$\frac{1}{10^{11}} n$	4508	4724	5267	5896	6403	7227	7895
$\frac{1}{10^{12}} s$	2833	2968	3309	3704	4023	4541	4960

Bestimmung der Brechungsverhältnisse aus der Schwingungsdauer.

Um die Brechungsverhältnisse aus der Undulationsdauer zu bestimmen, hat man nur nöthig, in die Gleichung

$$(\text{XVIII.}) \quad \Theta_c = \Theta + A_1 \beta_c + A_2 \gamma_c + A_3 \delta_c$$

statt der Constanten β_c, γ_c, δ_c die Werthe von T, oder, was dasselbe ist, die Werthe von s einzuführen. Da dieselben durch die Wellenlänge bestimmt werden, und die von Fresnel mit sehr grofser Genauigkeit angestellten Messungen Differenzen von 0,000005 zeigen, so werden schon, wie sich erweisen läfst, die mit r^6 afficirten Glie-

der von der Ordnung der Beobachtungsfehler, und man mufs daher von der dreigliedrigen Reihe:

$$x^2 = \tau_1 s^2 + \tau_2 s^4 + \tau_3 s^6$$

ausgehen.

Bezieht sich dieses x^2 auf Luft, so erhält man für jedes andere Mittel, dem der Werth x'^2 entspreche:

$$x'^2 = \theta^2 x^2 = \tau_1 s^2 + \tau_2 s^4 + \tau_3 s^6,$$

oder wenn man durch x^2 dividirt, $\frac{x^2}{\omega^2}$ (auf Luft bezogen) für s^2 setzt:

$$\theta^2 = \tau_1 \omega^2 + \tau_2 \omega^4 s^2 + \tau_3 \omega^6 s^4,$$

oder, wenn man die Coefficienten der Glieder mit g, h, i bezeichnet:

$$\text{(XX.)} \quad \theta_c^2 = \Theta_c = g + h s_c^2 + i s_c^4.$$

Zur Bestimmung der Werthe von g, h, i dient alsdann die Gleichung

$$99) \quad \Theta_c = g + h s_c^2 + i s_c^4 = \Theta + A_1 \beta_c + A_2 \gamma_c.$$

Um Θ, A_1, A_2 in s auszudrücken, entnehme man aus (XX.)

$$\Theta = \tfrac{1}{7} S\Theta_a = g + \frac{h}{7} S s_c^2 + \frac{i}{7} S s_c^4$$

$$U' = S'\Theta_a = g + h S' s_c^2 + i S' s_c^4$$

$$U'' = S''\Theta_a = g + h S'' s_c^2 + i S'' s_c^4 \; *).$$

Durch die Substitution dieser Werthe werden die beiden Seiten der Gleichung (99) lineare Funktionen von g, h, i, welche letztere sich nur mit dem Mittel ändern, und deren Coefficienten, da dieselbe von g, h, i unabhängig bestehen mufs, auf beiden Seiten einander gleich sein müssen.

Setzt man in (99) $g = i = 0$ und $h = 1$, und bezeichnet $\frac{1}{7} S s_c^2$, $S' s_c^2$, $S'' s_c^2$ beziehlich durch u_2, u_2', u_2'', so dafs $\Theta = u_2$, $U' = u_2'$, $U'' = u_2''$ und mithin A_1 d. h. $U' - \Theta = u_2' - u_2$, und A_2 d. h. $U'' - \Theta - (U' - \Theta) S''\beta_a = u_2'' - u_2 - (u_2' - u_2) S''\beta_a$ wird, so erhält man (insofern die Gleichung (XX.) übergeht in $\Theta_c = s_c^2$)

$$100) \quad s_c^2 = u_2 + (u_2' - u_2)\beta_c + [u_2'' - u_2 - (u_2' - u_2) S''\beta_a]\gamma_c.$$

Je nachdem man eins, zwei, oder alle drei Glieder

---

*) S', S'', S''' bedeuten Summirungen, analog den (p. 110) für Θ_a aufgeführten.

beibehält, bekommt man für s_c^2 die Näherungswerthe verschiedener Ordnung, welche beziehlich mit $s_c^2 - \Delta s_c^2$, $s_c^2 - \Delta^2 s_c^2$, $s_c - \Delta^3 s_c^2$ bezeichnet sein mögen, so dafs man als streng richtige Gleichungen erhält: $s_c^2 = u_2 + \Delta s_c^2$, $s_c^2 = u_2 + (u_2' - u_2)\beta_c + \Delta^2 s_c^2$, $s_c^2 = u_2 + (u_2' - u_2)\beta_c + [u_2'' - u_2 - (u_2' - u_2) S''\beta_a]\gamma_c + \Delta^2 s_c^2$,
und mithin

$$101)\quad \begin{cases} \Delta s_c^2 = s_c^2 - u_2 \\ \Delta^2 s_c^2 = s_c^2 - u_2 - (u_2' - u_2)\beta_c, \end{cases}$$

woraus sich findet:

$$S'\Delta s_c^2 = S'(s_c - u_2) = S's_c^2 - u_2 = u_2' - u_2,$$

und ebenso

$$102)\quad S''\Delta s_c^2 = u_2'' - u_2 - (u_2' - u_2) S''\beta_a.$$

Dies letztere sind aber die Coefficienten von β_c und γ_c der Gleichungen (100), und reducirt dieselben auf:

$$103)\quad s_c^2 = \tfrac{1}{7} S s_c^2 + \beta_c S'\Delta s_c^2 + \gamma_c S''\Delta^2 s_c^2,$$

während sich u_2, u_2', u_2'', und somit $\frac{1}{7}Ss_c^2$, $S'\Delta s_c^2$, $S''\Delta^2 s_c^2$ aus Tafel XVI. beziehlich gleich 14,7025, —34,6094, 0,540 (eine 1000 Billiontel Secunde als Einheit genommen) findet.

Man hat demnach

$$104)\quad s_c^2 = 14{,}7025 - 34{,}6094\beta_c + 0{,}540\gamma_c.$$

Ebenso erhält man, wenn man in (99) $g = h = 0$ und $i = 1$ setzt, und $\frac{1}{7}Ss_c^4$, $S's_c^4$, $S''s_c^4$ beziehlich mit u_4, u_4', u_4'' bezeichnet:

$$s_c^4 = u_4 + (u_4' - u_4)\beta_c + [u_4'' - u_4 - (u_4' - u_4) S''\beta_a]\gamma_c$$

und

$$105)\quad s_c^4 = \tfrac{1}{7} S s_c^4 + \beta_c S'\Delta s_c^4 + \gamma_c S''\Delta^2 s_c^4,$$

welches, mittelst der Tafel XVI. ausgewerthet, giebt:

$$106)\quad s_c^4 = 248{,}975 - 1091{,}416\beta_c - 152{,}303\gamma_c,$$

welche Gleichung in Verbindung mit (104) liefert:

$$\beta_c = 0{,}40503 - 0{,}025988 s_c^2 - 0{,}0000921 s_c^4$$
$$\gamma_c = -1{,}2677 + 0{,}18623 s_c^2 - 0{,}0059055 s_c^4.$$

Die Werthe von β_c und γ_c in (XX.) substituirt geben:

$$\Theta_c = \Theta + 0{,}40503 A_1 - 1{,}2677 A_2 - [0{,}025988 A_1 - 0{,}18623 A_2] s_c^2 - [0{,}0000921 A_1 + 0{,}0059055 A_2] s_c^4,$$

so dafs die Constanten der Gleichung

$$\Theta_c = g + h s_c^2 + i s_c^4$$

sind:

$$g = \Theta + 0{,}40503\,A_1 - 1{,}2677\,A_2$$
$$h = -0{,}025988\,A_1 + 0{,}18623\,A_2$$
$$i = -0{,}0000921\,A_1 - 0{,}0059055\,A_2.$$

Die Logarithmen der Constanten sind:

$log\,40503 = 6074872$ $\quad$ $log\,18623 = 2700541$
$log\,12677 = 1030305$ $\quad$ $log\,921 = 9644576$
$log\,25988 = 4147729$ $\quad$ $log\,59055 = 7712579$ *).

Die Werthe von s_c^2 und s_c^4 in 1000 Billiontel Secunden, und die Logarithmen von s_c^2 sind:

$c =$	1	2	3	4	5	6	7
sc^2	8,0233	8,8093	10,9508	13,7220	16,1862	20,6208	24,6053
sc^4	64,374	77,604	119,920	188,294	261,992	425,218	605,423
$log\,sc^2$	9043548	9449408	0394456	1374186	2091436	3143056	3910294

Die nach der Formel (XX.) berechneten Brechungsverhältnisse sind indefs schon in der vierten Stelle unsicher.

Anmerkung. Ebenso, wie man oben aus (XVIII.) die Gleichung (98) und somit (XIX.) abgeleitet hatte, läfst sich aus $\Theta_c = \Theta + A_1\beta_c + A_2\gamma_c$ ableiten, z. B.

$$107)\quad \Theta_c = \Theta_1 + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1) + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_5 - \beta_1}.\frac{\gamma_c' - \gamma_3'}{\gamma_5' - \gamma_3'} \times \left[\Theta_5 - \Theta_1 - \frac{\beta_c - \beta_1}{\gamma_3 - \beta_1}(\Theta_3 - \Theta_1)\right],$$

um aus 3 gegebenen Brechungsverhältnissen, wie hier aus Θ_1, Θ_3, Θ_5 die übrigen zu finden.

Bestimmung der Wellenlängen in einem Mittel, wenn einzelne derselben gegeben sind.

Durch Combination der Gleichungen (101 und 102) erhält man

$$s_c^2 = \tfrac{1}{7}Ss_c^2 + \Delta s_c^2$$
$$s_c^2 = \tfrac{1}{7}Ss_c^2 + \beta_c S' \Delta s_c^2 + \Delta^2 s_c^2$$
$$s_c^2 = \tfrac{1}{7}Ss_c^2 + \beta_c S' \Delta s_c^2 + \gamma_c S'' \Delta^2 s_c^2 + \Delta^3 s_c^2,$$

*) Die Logarithmen sind hier deshalb angegeben, weil sie aus den Logarithmen der Zahlen, aus denen die Constanten genommen sind, abgeleitet und deshalb genauer sind, als man sie durch unmittelbare Bestimmung finden würde.

so dafs Δs_c^2, $\Delta^2 s_c^2$, $\Delta^3 s_c^2$ bestimmt sind durch:

$$s_c^2 = \tfrac{1}{7} S s_c^2 + \Delta s_c^2, \quad \Delta s_c^2 = \beta_c S' \Delta s_c^2 + \Delta^2 s_c^2,$$
$$\Delta^2 s_c^2 = \gamma_c S'' \Delta^2 s_c^2 + \Delta^3 s_c^2.$$

Versteht man nun unter Δl_c^{-2}, $\Delta^2 l_c^{-2}$, $\Delta^3 l_c^{-2}$ die durch folgende analoge Gleichungen bestimmten Ausdrücke:

$$l_c^{-2} = \tfrac{1}{7} S l_c^{-2} + \Delta l_c^{-2}, \quad \Delta l_c^{-2} = \beta_c S' \Delta l_c^{-2} + \Delta^2 l_c^{-2},$$
$$\Delta^2 l_c^{-2} = \gamma_c S'' \Delta^2 l_c^{-2} + \Delta^3 l_c^{-2},$$

so ergiebt sich, da $s^2 = (2\pi\omega)^2 l^{-2}$ ist,

$$\Delta l_c^{-2} = (2\pi\omega)^{-2} \Delta s_c^2, \quad \Delta^2 l_c^{-2} = (2\pi\omega)^{-2} \Delta^2 s_c^2,$$
$$\Delta^3 l_c^{-2} = (2\pi\omega)^{-2} \Delta^3 s_c^2,$$

und durch Substitution dieser Werthe in (103),

$$108) \quad l_c^{-2} = \tfrac{1}{7} S l_c^{-2} + \beta_c S' \Delta l_c^{-2} + \gamma_c S'' \Delta^2 l_c^{-2}.$$

Ganz ebenso würde man

$$109) \quad l_c^{-4} = \tfrac{1}{7} S l_c^{-4} + \beta_c S' \Delta l_c^{-4} + \gamma_c S'' \Delta^2 l_c^{-4}$$

erhalten.

Auf demselben Wege, auf welchem man zur Gleichung (107) gelangte, kommt man auf folgende:

$$110) \quad \frac{1}{l_c^2} = \frac{1}{l_1^2} + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}\left(\frac{1}{l_3^2} - \frac{1}{l_1^2}\right) + \frac{\beta_c - \beta_1}{\beta_6 - \beta_1} \frac{\gamma_c' - \gamma_3'}{\gamma_6' - \gamma_3'} \times \left[\frac{1}{l_6^2} - \frac{1}{l_1^2} - \frac{\beta_6 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}\left(\frac{1}{l_3^2} - \frac{1}{l_1^2}\right)\right],$$

mittelst deren man aus drei gegebenen Wellenlängen, wie hier aus l_1, l_3, l_6, die übrigen finden kann.

Die Auswerthung giebt für diesen Fall:

$$l_2^{-2} = 0{,}65735\, l_2^{-2} + 0{,}36384\, l_3^{-2} - 0{,}02119\, l_6^{2}$$
$$l_4^{-2} = -0{,}44208\, l_1^{-2} + 1{,}29516\, l_3^{-2} + 0{,}14692\, l_6^{-2}$$
$$l_5^{-2} = -0{,}55325\, l_1^{-2} + 1{,}19070\, l_3^{-2} + 0{,}36255\, l_6^{-2}$$
$$l_7^{-2} = 1{,}09480\, l_1^{-2} - 1{,}83757\, l_3^{-2} + 1{,}74277\, l_6^{-2}.$$

Anmerkung 1. Wenn man unter $\Delta \varkappa_c^2$, $\Delta^2 \varkappa_c^2$, $\Delta^3 \varkappa_c^2$ die durch folgende Gleichungen gegebenen Ausdrücke versteht: $\varkappa_c = \frac{1}{7} S \varkappa_c^2 + \Delta \varkappa_c^2$, $\Delta \varkappa_c^2 = \beta_c S' \Delta \varkappa_c^2 + \Delta^2 \varkappa_c^2$, $\Delta^2 \varkappa_c^2 = \gamma_c S'' \Delta^2 \varkappa_c^2 + \Delta^3 \varkappa_c^2$ und unter $\Delta \varkappa_c^4$, $\Delta^2 \varkappa_c^4$, $\Delta^3 \varkappa_c^4$ dieselben Ausdrücke, nachdem man die Exponenten 2 durch 4 ersetzt hat, so kommt man (wegen $s_c = \omega \varkappa_c$) auf gleichem Wege zu Gleichungen, welche der (108 und 109) analog sind, nämlich auf:

$$\varkappa_c^2 = \tfrac{1}{7} S \varkappa_c^2 + \beta_c S' \Delta \varkappa_c^2 + \gamma_c S'' \Delta^2 \varkappa_c^2$$

und

$$\varkappa_c^4 = \tfrac{1}{7} S \varkappa_c^4 + \beta_c S' \Delta \varkappa_c^4 + \gamma_c S'' \Delta^2 \varkappa_c^4,$$

und ebeso auf eine der Gleichung (110) vollkommen entsprechende Relation.

Anmerkung 2. Die Gleichung $\frac{s^2}{x^2} = \omega^2 = \sigma_1 + \sigma^2 x^2 + \sigma_3 x^4$ kann man zu einer Bestimmung der Werthe von s benutzen.

Setzt man nämlich $\frac{\omega^2}{g^2} = G$ (ω auf Luft bezogen), so wird, wegen $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}$, $b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}$ und $b_1\omega^2 = g$, $b_2\omega^4 = h$, $b_3\omega^6 = i$,

$$a_1 = gG, \quad a_2 = -ghG^2, \quad a_3 = g(2h^2 - gi)G^3,$$

und daher $\frac{s^2}{x^2} = \omega^2 = gG[1 - hGx^2 + (2h^2 - gi)G^2x^4]$

folglich $s^2 = gG[x^2 - hGx^4 + (2h^2 - gi)G^2x^6]$,

wo g, h, i, G nach dem Obigen berechnet werden kann, und x gegeben ist durch $x = 2\pi l^{-1}$, oder wenn man von der Wellenlänge in der Luft ausgeht, durch $x = 2\pi\theta l^{-1}$.

Die hiernach berechneten genäherten Werthe von $10^{-15}s$ für die 7 Strahlen sind:

2,833 2,968 3,310 3,704 4,024 4,542 4,963;

wo die Werthe von g, h, i, G, x den sich für Kalilösung ergebenden entnommen sind.

Aetherbewegung in unsymmetrisch zweiaxigen Mitteln.

Für homogenes Licht scheinen die unsymmetrisch zweiaxigen Mittel (die Krystalle des hemiprismatischen und tetartoprismatischen Systems) sich bei constanter Temperatur wie die symmetrisch zweiaxigen zu verhalten, so dafs der Unterschied nur darin läge, dafs bei der Temperaturänderung und beim Uebergang von einer Farbe zur andern die Elasticitätsaxen ihre Lage ändern. Die Theorie der Wellenbewegung in ihnen wäre daher vollständig in dem Vorigen enthalten, sobald man annimmt, dafs die Bedingungen der Elasticität (VII.) nicht für ein festes Coordinatensystem, sondern für ein mit der Temperatur und der Natur der Farbe veränderliches stattfinden. Da mit der Tem-

peratur die Lage der Moleküle eine andere wird, so ist es allerdings nicht undenkbar, dafs bei einer solchen Veränderung jene Bedingungsgleichungen in Bezug auf ein anderes bestimmtes Coordinatensystem sich verificiren; schwer dürfte es sich aber vorstellen lassen, dafs die Moleküle bei unveränderter Gleichgewichtslage in Absicht auf ungleich schnelle Schwingungen ein verschiedenes Verhalten zeigen, ohne die Coexistenz der sich vervielfachenden Bedingungs-Gleichungen zu verneinen. Selbst durch Reduction der Bedingungen (VII.) scheint sich die Möglichkeit der erwähnten Veränderung der Elasticitätsaxen nicht analytisch darthun zu lassen.

Höchst wahrscheinlich erfüllt die Elasticität in den hierher gehörigen Mitteln nicht die Bedingungen, dafs im Zustande des Gleichgewichts die Wirkungen auf einen Punkt in genau entgegengesetzten Richtungen einander aufheben, so dafs man bei den analytischen Untersuchungen zu den Gleichungen (II.) zurückkehren mufs.

Jedenfalls bleibt noch durch genaue Versuche festzustellen übrig, wie weit die Uebereinstimmung mit den symmetrisch zweiaxigen Krystallen für homogenes Licht geht.

D. *Wirkung verschiedener Wellensysteme auf einander.*

Die Art, wie die Moleküle sich in einem Wellensystem bewegen, welches auch die Natur des Mittels sei (wenn die Elasticitätskräfte nur so wirken, dafs im Zustande des Gleichgewichts die in geradlinigen und entgegengesetzten Richtungen auf jedes Theilchen wirkenden Kräfte einander das Gleichgewicht halten), spricht sich aus in der Gleichung (IV, a), nämlich in

$$s = s_0 \cos st + s_1 \frac{\sin st}{s}.$$

Denkt man sich die Coordinatenaxen durch die Axen des Ellipsoids gelegt, so dafs man, wie wir gesehen haben, die eine Axe (z. B. die Axe der z) mit der Richtung des Strahls

als zusammenfallend betrachten kann, so wird $s' = \xi$ und $s'' = \eta$, wenn s''' die Verschiebung nach der Richtung des Strahls bedeutet, und die Verschiebungen in den beiden lichterregenden Wellensystemen sind:

$$\xi = \xi_0 \cos st + \xi_1 \frac{\sin st}{s}, \quad \eta = \eta_0 \cos st + \eta_1 \frac{\sin st}{s}.$$

Betrachten wir nur das eine dieser Wellensysteme, und zählen die Zeit von dem Punkt an, wo die Anfangsgeschwindigkeit ξ_1 der Null gleich ist, so ist die Gleichung der Molekularbewegung:

$$\xi = \xi_0 \cos st,$$

oder da $s = 2\pi T^{-1}$ ist,

$$\text{(XXI.)} \quad \xi = \xi_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Verschiebung ξ erreicht daher ihr Maximum, wenn $\cos 2\pi \frac{t}{T} = \pm 1$, d. h. $t = \frac{1}{2} n T$ wird, unter n eine ganze Zahl verstanden, und die absolute Gröſse dieser gröſsten Verschiebung (die Schwingungsweite) ist ξ_0. Die Zeit des Durchganges durch die Gleichgewichtslage, d. h. die Zeit, zu welcher $\xi = 0$, also auch $\cos 2\pi \frac{t}{T} = 0$ wird, ist $t = \frac{1}{4}(2n + 1) T$.

Sind zwei Moleküle desselben Strahls um x von einander entfernt, so gelangt die Bewegung, welche das eine zur Zeit t macht, erst nach der Zeit $t + \frac{x}{\omega}$ zu dem zweiten, wenn ω wiederum die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wird also die Phase von dem Zeitpunkt an gezählt, in welchem die Geschwindigkeit des Molekuls Null (unter welcher Bedingung die Gleichung (XXI.) allein richtig ist), so muſs, wenn in dem Ausdruck für die Phase $2\pi \frac{t}{T}$ in Bezug auf das eine Molekul $t = t$ gesetzt wird, in Bezug auf das andere $t = t - \frac{x}{\omega}$ gesetzt werden. Die gleichzeitigen Phasen der beiden Moleküle sind daher $2\pi \frac{t}{T}$ und

$\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{\omega}\right)=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\omega T}\right)$, oder da $\omega T=l$ ist, $2\pi\frac{t}{T}$ und $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{l}\right)$. Ihre gleichzeitige Verschiebung ist demnach: $\xi=\xi_0 \cos 2\pi\frac{t}{T}$ und $\xi=\xi_0 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{l}\right)$, wo bei bedeutenden Werthen von x, aber ξ_0 in beiden Ausdrücken merklich verschieden ist. Es ist alsdann $2\pi\frac{x}{l}$ der Phasenunterschied beider Moleküle.

Nennt man v die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle sich bewegen, d. h. die Oscillationsgeschwindigkeit, so hat man aus (XXI.)

$$\text{XXII.}\quad v=\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{2\pi}{T}\xi_0 \sin 2\pi\frac{t}{T}=\xi_2 \sin 2\pi\frac{t}{T},$$

wenn man $\frac{2\pi}{T}\xi_0=\xi_2$ setzt.

Wird $\sin 2\pi\frac{t}{T}=0$, also $t=\frac{2n+1}{4}T$, so erreicht die Geschwindigkeit ihr Maximum ξ_2 (Vibrations-Intensität), welche mithin der Schwingungsweite ξ_0 proportional ist. Wird $\sin 2\pi\frac{t}{T}=0$, also $t=\frac{1}{2}nT$, so wird die Geschwindigkeit Null, und das Molekul kehrt zur Gleichgewichtslage zurück.

Wenn zwei oder mehrere homogene Strahlen derselben Farbe, welche von demselben leuchtenden Punkt ausgegangen sind, und welche eine gleiche Schwingungsrichtung und gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit (also auch in correspondirenden Punkten gleiche Phasen) hatten, Störungen erlitten haben, welche die Gleichheit der Phasen oder der Schwingungsrichtung, oder beider zugleich, aufheben, so nehmen die Moleküle in diesen Strahlen eine regelmäfsige zusammengesetzte Bewegung an, sobald die Strahlen ihrer Richtung nach vollkommen oder sehr nahe zusammenfallen, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht verschieden werden. Sind die Schwingungsrichtun-

gen nach der Störung noch gleich, und behalten daher die Strahlen auch die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so ändern sich natürlich die Schwingungsrichtungen durch die Zusammensetzung der Bewegung nicht, und man sagt, die Strahlen interferiren sich.

Aendern sich überdies durch die Störung die Schwingungsrichtungen, so nehmen die Moleküle im Allgemeinen eine elliptische Bewegung an, die in einzelnen Fällen kreisförmig oder geradlinig wird, sobald nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlen nach der Störung gleich bleibt. Die Strahlen heifsen alsdann elliptisch oder kreisförmig polarisirt.

Interferenz linear-polarisirter Strahlen.

Es seien die Phasen eines Molekuls, in Bezug auf zwei sich interferirende (also parallel polarisirte) Lichtstrahlen respective $2\pi\frac{t}{T}$ und $2\pi\left(\frac{t}{T}-m\right)$, also die Oscillationsgeschwindigkeiten beziehlich

$$111)\quad v' = \xi_2' \sin 2\pi\frac{t}{T} \quad \text{und} \quad v'' = \xi_2'' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-m\right),$$

und der Phasenunterschied $2\pi m$. Da das Molekul alsdann vermöge der Bewegung des zweiten Strahls erst nach der Zeit $t+mT$ in die Phase tritt, welche es nach der Zeit t vermöge der Bewegung des ersten Strahls hat, so kann man den zweiten Strahl gegen den ersten als um m Wellenlängen verzögert betrachten. Bezeichnet man $2\pi\frac{t}{T}$ mit α, und $2\pi m$ mit β, so hat man

$$v' = \xi_2' \sin\alpha, \qquad v'' = \xi_2'' \sin(\alpha-\beta),$$

und wenn man die resultirende Geschwindigkeit U nennt, wird

$$U = v'+v'' = \xi_2' \sin\alpha + \xi_2'' \sin(\alpha-\beta)$$
$$= (\xi_2' + \xi_2'' \cos\beta)\sin\alpha - \xi_2'' \sin\beta\cos\alpha.$$

Setzt man nun

$$112)\quad \begin{cases} \xi_2' + \xi_2'' \cos\beta = u\cos\gamma \text{ und} \\ \xi_2'' \sin\beta = u\sin\gamma, \end{cases}$$

so wird $U = u(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma)$, d. h.

$$\text{XXIII.} \quad U = u\sin(\alpha - \gamma),$$

während man aus (112) findet:

$$\text{XXIV.} \quad u^2 = \xi_2'^2 + \xi_2''^2 + 2\xi_2'\xi_2''\cos\beta.$$

$$\text{XXV,} \quad \tang\gamma = \frac{\xi_2''\sin\beta}{\xi_2' + \xi_2''\cos\beta}.$$

Da β, und mithin auch u und γ constant sind, so hat (XXIII.) genau die Form der Gleichungen (111), und es stellt daher die Geschwindigkeit U die Oscillationsgeschwindigkeit eines einfachen Wellensystems vor, dessen Vibrationsintensität u ist, welches gleiche Schwingungsdauer mit den componirenden Strahlen hat, und dessen Phasenunterschied in Bezug auf das erste System γ ist, so daſs es um $\frac{\gamma}{2\pi}$ Wellenlängen gegen dasselbe zurückbleibt.

Aus der Form der Gleichung (XXIV.) geht hervor, daſs die resultirende Vibrations-Intensität u die Länge der Diagonale eines Parallelograms ist, dessen Seiten die Vibrations-Intensitäten ξ_2' und ξ_2'' sind, und dessen Winkel der Phasenunterschied β der componirenden Wellensysteme ist. Die Construction Seite 32 ist somit bewiesen.

Ist $\beta = (n+1)\pi$, beträgt also der Gangunterschied der componirenden Systeme eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen, so wird $u^2 = (\xi_2' - \xi_2'')^2$ und $\tang\gamma = 0$. Ist überdies die Intensität der componirenden Strahlen gleich, also $\xi_2' = \xi_2''$, so wird $u^2 = 0$, und es tritt daher Dunkelheit ein.

Ist $\beta = 2n\pi$, der Gangunterschied beider Systeme daher eine ganze Zahl Wellenlängen, so wird $u^2 = (\xi^{2\prime} + \xi^{2\prime\prime})^2$ und $\tang\gamma = 0$. Die Vibrations-Intensität ist folglich gleich der Summe derer der primitiven Strahlen. Wird zugleich die Intensität der componirenden Strahlen gleich, so wird $u^2 = 4\xi_2'^2$ und $u = 2\xi_2'$. Die Licht-Intensität des resultirenden Strahls wird also vervierfacht, und die Vibrations-Intensität verdoppelt.

Da u^2 für $\beta = 2n\pi$ seinen gröſsten Werth erreicht, so erlangt man für diesen Phasenunterschied die gröſste Licht-

Lichtstärke, welche man durch Interferenz zweier Strahlen von bestimmter Intensität erhalten kann.

Wenn irgend ein Wellensystem $U = u \sin(\alpha - \gamma)$ gegeben ist, so läfst sich dasselbe mittelst der Gleichungen (XXIV. und XXV.) durch zwei andere $v' = \xi_2' \sin\alpha$ und $v'' = \xi_2'' \sin(\alpha - \beta)$ ersetzen, welche dieselbe Wirkung hervorbringen. Da nur zwei Gleichungen zur Bestimmung von ξ_2', ξ_2'', α, β vorhanden sind, so kann man die zu substituirenden Systeme noch besonderen Bedingungen unterwerfen, z. B. dafs sie einen bestimmten Phasenunterschied β haben und dafs ihre Intensitäten in einem bestimmten Verhältnifs stehen. Sollte z. B. der Phasenunterschied $\frac{1}{4}$ Undulation betragen, so erhielte man aus (112) $\xi_2' = u \cos\gamma$ und $\xi_2'' = u \sin\gamma$, und die gesuchten Componenten wären

$$\text{XXIII}, a. \quad v' = u \cos\gamma \sin\alpha, \quad v'' = u \sin\gamma \sin(\alpha - \tfrac{1}{2}\pi).$$

Elliptische und kreisförmige Polarisation.

Die Bewegungen in Wellensystemen, die nach verschiedenen Ebenen polarisirt sind, können sich nur zusammensetzen, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieselben sind, also nur in einfachbrechenden Mitteln; in doppelbrechenden Mitteln wird es blofs in den Richtungen der optischen Axen möglich, da in jeder andern Richtung die Geschwindigkeit von der Polarisationsrichtung abhängt.

Um die Bewegung eines Molekuls zu bestimmen, welches an der Bewegung zweier verschieden polarisirter Wellensysteme Theil hat, beziehe man die Schwingungsrichtungen auf die Axen der x und der y, die auf den Strahl senkrecht gedacht werden mögen. Es seien A und B die primitiven, a und b die nach der Axe der x, a' und b' die nach der Axe der y zerlegten Vibrations-Intensitäten, ferner δ und ε die Winkel, welche die Schwingungsrichtungen beziehlich mit der Axe der x bilden. Man hat alsdann

$$113) \quad a = A \cos\delta \qquad 115) \quad b = B \cos\varepsilon$$

$$114) \quad a' = A \sin\delta \qquad 116) \quad b' = B \sin\varepsilon,$$

als Bewegungen, welche vier Wellensystemen entsprechen, und zwar haben die Systeme (113 und 114) mit dem einen

primitiven Systeme gleiche Phasen, welche gleich α seien, und die Systeme (115 und 116) gleiche Phasen mit dem andern System, welche gleich $\alpha-\beta$ seien. Die zu (113 und 115) gehörenden Strahlen, welche gleich polarisirt sind, lassen sich wiederum zu einem System zusammensetzen, welches nach (XXIII.) bestimmt ist durch:

$$U = u\cos(\alpha-\gamma), \quad u^2 = a^2+b^2+2ab\cos\beta,$$
$$\tan\gamma = \frac{b\sin\beta}{a+b\cos\beta};$$

ebenso die zu (114 und 116) gehörenden Systeme zu dem einzigen, welches bestimmt ist durch:

$$U' = u'\cos(\alpha-\gamma'), \quad u'^2 = a'^2+b'^2+2a'b'\cos\beta,$$
$$\tan\gamma' = \frac{b'\sin\beta}{a'+b'\cos\beta}.$$

Man hat also statt der primitiven Systeme zwei auf einander senkrecht polarisirte, deren Phasenunterschied $\gamma-\gamma'$ ist.

Die Schwingungsweite in ihnen ist, da $\xi_2 = \frac{2\pi}{T}\xi_0$ ist, respective $\frac{T}{2\pi}u$ und $\frac{T}{2\pi}u'$. Bezeichnet man dieselben beziehlich mit N und N', und die Verschiebungen mit x und y, so hat man

$$x = N\cos(\alpha-\gamma) \quad \text{und} \quad y = N'\cos(\alpha-\gamma').$$

Die Elimination von t aus diesen beiden Gleichungen, oder, was dasselbe ist, die Elimination von α, welches allein t enthält, giebt die Gleichung der Bahn des betreffenden Molekuls. Man findet zuvörderst:

$$arc\left(\cos = \frac{x}{N}\right) = \alpha-\gamma \quad \text{und} \quad arc\left(\cos = \frac{y}{N'}\right) = \alpha-\gamma',$$

und erhält somit durch Subtraction:

$$\gamma-\gamma' = arc\left(\cos = \frac{x}{N}\right) - arc\left(\cos = \frac{y}{N'}\right),$$

oder, wenn man auf jeder Seite die Cosinus nimmt:

$$\cos(\gamma-\gamma') = \frac{x}{N}\cdot\frac{y}{N'} - \sqrt{1-\frac{x^2}{N^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{N'^2}}, \text{ folglich:}$$

$$\text{XXVI.} \quad \left(\frac{x}{N}\right)^2 + \left(\frac{y}{N'}\right)^2 - 2\frac{x}{N}\cdot\frac{y}{N'}\cos(\gamma-\gamma') = \sin^2(\gamma-\gamma'),$$

welches die Gleichung einer Ellipse ist.

Vergleicht man, um die Gröfse und die Lage der Axen dieser Ellipse zu bestimmen, die Coefficienten mit denen der allgemeinen Gleichung der Ellipse, deren Halb-Axen m und n sind, und deren eine mit der Axe der x den Winkel φ bildet, nämlich mit den Coefficienten der Gleichung: $(m^2 \sin^2\varphi + n^2 \cos^2\varphi)x^2 + (n^2 \sin^2\varphi + m^2 \cos^2\varphi)y^2$
$$+2(m^2-n^2)\sin\varphi\cos\varphi \cdot xy = a^2b^2,$$
so findet man:

$$N^2 = n^2 \sin^2\varphi + m^2 \cos^2\varphi$$
$$N'^2 = m^2 \sin^2\varphi + n^2 \cos^2\varphi$$
$$NN' \cos(\gamma-\gamma') = \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\sin 2\varphi$$
$$N^2 N'^2 \sin^2(\gamma-\gamma') = a^2b^2.$$

Die Addition und Subtraction der beiden ersten Gleichungen giebt: $m^2+n^2 = N^2+N'^2$
$$m^2-n^2 = \frac{N^2-N'^2}{\cos 2\varphi},$$
folglich: $\cos 2\varphi = \dfrac{N^2-N'^2}{m^2-n^2},$

während aus der dritten jener Gleichungen folgt:
$$\sin 2\varphi = \frac{2NN'\cos(\gamma-\gamma')}{m^2-n^2}.$$

Es ist mithin
$$\text{XXVII.} \quad \tan 2\varphi = \frac{2NN'\cos(\gamma-\gamma')}{N^2-N'^2}.$$

Zur Bestimmung der Gröfse der Axen hat man:
$$m^2-n^2 = \frac{N^2-N'^2}{\cos^2\varphi} = (N^2-N'^2)\sqrt{1+\tan^2 2\varphi}$$
$$= \sqrt{(N^2-N'^2)^2+4N^2N'^2\cos^2(\gamma-\gamma')},$$
welche Gleichung in Verbindung mit: $m^2+n^2 = N^2+N'^2$ sogleich liefert:
$$m^2 = \tfrac{1}{2}(N^2+N'^2)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(N^2-N'^2)^2+4N^2N'^2\cos^2(\gamma-\gamma')}$$
$$n^2 = \tfrac{1}{2}(N^2+N'^2)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(N^2-N'^2)^2+4N^2N'^2\cos^2(\gamma-\gamma')}.$$

Den Phasenunterschied $\gamma-\gamma'$ findet man in β, δ, ε ausgedrückt, wenn man bemerkt, dafs nach (112)
$$u\cos\gamma = a+b\cos\beta \quad \text{und} \quad u'\sin\gamma' = b'\sin\beta,$$
also $uu' \cdot \cos\gamma\sin\gamma' = b'\sin\beta(a+b\cos\beta),$

und ebenso $u'\cos\gamma' = a'+b'\cos\beta$ und $u\sin\gamma = b\sin\beta,$

also $uu' \cdot \cos\gamma' \sin\gamma = b \sin\beta (a' + b' \cos\beta)$ ist.
Es wird daher $uu' \cdot \sin(\gamma - \gamma') = (a'b - b'a) \sin\beta)$,
oder wenn man für a, a', b, b' ihre Werthe setzt:

$$\sin(\gamma - \gamma') = \frac{AB}{uu'} \sin(\varepsilon - \delta) \sin\beta.$$

Die Ellipse (XXVI.) geht durch das Verschwinden der kleinen Axe n in eine gerade Linie über, und der Strahl ist geradlinig polarisirt, wenn $\cos^2(\gamma - \gamma') = 1$, also $\gamma - \gamma' = n\pi$ wird, d. h. wenn der Gangunterschied der auf einander senkrecht polarisirten Strahlen eine ganze Zahl halber Wellenlängen beträgt. Die Gleichung (XXVI.) wird nämlich alsdann

$$N'^2 x^2 \pm 2 N N' xy + N^2 y^2 = (N' x \pm N y)^2 = 0,$$

und die Polarisationsrichtung ist gegeben durch

$$tang\, 2\varphi = \pm \frac{2NN'}{N^2 - N'^2} \quad \text{oder} \quad tang\, 2\varphi = \frac{N}{N'},$$

während $m^2 = N^2 + N'^2$ und $n = 0$ wird.

Für $N = N'$, d. h. bei gleicher Intensität der Componenten, ist $tang\, 2\varphi = 1$, also $\varphi = 45^0$ oder $= 135^0$.

Wenn die Gangverschiedenheit der beiden Componenten eine ungerade Anzahl Viertel-Wellenlängen, also $\gamma - \gamma' = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ ist, so geht die Gleichung der Schwingungsbahn (XXVI.) über in:

$$N'^2 x + N^2 y = N^2 N'^2;$$

die Axen der Ellipse werden daher N und N', und fallen mit den primitiven (auf einander senkrechten) Schwingungsrichtungen zusammen.

Wird gleichzeitig $N = N'$, die Gleichung der Bahn also $x^2 + y^2 = N^2$, so wird diese Bahn ein Kreis, dessen Radius N ist. Die circulare Polarisation erfordert also zwei gleich intensive auf einander senkrecht polarisirte Strahlen, die um eine ungerade Anzahl Viertel-Undulationen von einander abweichen. Die Bewegung in der kreisförmigen Bahn ist nach der einen oder der andern Richtung gewendet, und der Strahl heifst demzufolge rechts oder links drehend polarisirt, je nachdem der voraneilende Strahl dem andern um $\frac{1}{4}(4n+1)$ oder $\frac{1}{4}(4n+3)$ Undulationen voraus ist.

Sind endlich die Intensitäten der componirenden Strahlen gleich, ohne dafs $\gamma - \gamma' = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ ist, so wird die Gleichung der Schwingungsbahn

$$x^2 - 2\cos(\gamma - \gamma') \cdot xy + y^2 = \sin^2(\gamma - \gamma')$$

und $\tan 2\varphi = \infty$, also $\varphi = 45^0$ oder $= 135^0$, während die Axen der Ellipse

$$m = \sqrt{1 + \cos(\gamma - \gamma')} \text{ und } n = \sqrt{1 - \cos(\gamma - \gamma')}$$

sind. Die Richtung der Axen der Ellipse ist also alsdann unabhängig vom Phasenunterschied.

Dafs bei der gegenseitigen Einwirkung zweier verschieden linear-polarisirten Strahlen die Bewegungen sich nie aufheben können, also nie Dunkelheit entstehen kann, versteht sich von selbst, und ist auch in der Unmöglichkeit des gleichzeitigen Verschwindens der Werthe von m und n sichtbar.

Zweiter Abschnitt.

Gesetze der Bewegung des Lichts beim Uebergange aus einem Mittel in ein anderes.

Erste Abtheilung.

Uebersichtliche Darstellung der Erscheinungen und ihrer Gesetze.

A. *Verhalten der einfachbrechenden Mittel.*

Wenn das Licht aus einem (durchsichtigen) Mittel in ein anderes übergeht, so nehmen die Aethertheilchen an der Grenze beider Mittel sowohl Theil an den Bewegungen in dem ersten, als an denen in dem zweiten Mittel. Diese modificirte Bewegung der Grenztheilchen giebt 1) zur Entstehung neuer Wellensysteme Anlafs, welche sich in dem ersten Mittel verbreiten, 2) zu Modificationen der in das zweite Mittel eindringenden Lichtbewegung. Das in das erste Medium zurückkehrende Licht heifst reflektirtes, das in das zweite Medium eindringende gebrochenes Licht, während man das ursprüngliche Licht einfallendes nennt. Die Rückkehr des Lichts in das erste Mittel heifst Reflexion, das Eindringen in das zweite Mittel — Brechung oder Refraction.

Bleibt das Licht in einem und demselben (homogenen) Mittel, so ist den im vorigen Abschnitt enthaltenen Untersuchungen zufolge die Schwingungsrichtung in den Lichtwellen, wenn die Strahlen nicht der Richtung einer der optischen Axen folgen, in doppelbrechenden Mitteln von der Richtung der primitiven Schwingungen unabhängig, das

Licht also allemal polarisirt. In einfachbrechenden Mitteln dagegen (und in doppelbrechenden Mitteln in der Richtung der optischen Axen) ist die Polarisationsrichtung der Richtung der primitiven Schwingungen parallel; das Licht ist in ihnen also gleichfalls polarisirt, so lange diese ursprüngliche Richtung sich nicht ändert. Die Erfahrung lehrt aber, dafs das Licht, welches unmittelbar von der Sonne und den Fixsternen ausgeht, so wie das Flammenlicht vollkommen unpolarisirt ist, d. h. dafs keine Spuren einer vorherrschenden Schwingungsrichtung vorhanden sind; man mufs daher annehmen, dafs die aufeinanderfolgenden lichterregenden Schwingungen jener Körper ihre Richtung stetig wechseln, in der Art, dafs keine vor der andern einen Vorzug behält *).

Trifft indefs das Licht auf ein zweites Mittel, so kann die modificirte Bewegung der Grenztheilchen die Vibrationen der reflektirten Wellensysteme reguliren, und eine vollständige oder theilweise Polarisation in denselben hervorbringen, so wie auf gleiche Weise im gebrochenen Licht ähnliche Veränderungen erzeugen.

Ferner geschieht die Fortpflanzung des Lichts, wenn es in einem homogenen Mittel bleibt, stets in geraden, vom leuchtenden Punkt ausgehenden Richtungen, wie es auch die Erfahrung bestätigt, indem sich die Verbreitung des jenen Punkt sichtbar machenden Lichts bis zum Auge durch jeden noch so kleinen undurchsichtigen (d. h. dem Licht keinen Durchgang gestattenden) Körper hemmen läfst, welcher die vom Lichtpunkt zum Auge gehend gedachte Gerade durchschneidet.

*) Es ist eine Thatsache, dafs dasjenige Licht, welches von glühenden Körpern ausgeht, theilweise polarisirt ist. Sind es die Theilchen der leuchtenden Körper, nicht der in ihnen enthaltene Aether, welche durch die Wärme unmittelbar in die den Impuls gebenden Vibrationen versetzt werden, so läfst sich die verschiedene Wirkung der glühenden und der mit Flamme brennenden Körper vielleicht dadurch erklären, dafs man annimmt, es leuchte nicht blofs die Oberfläche der glühenden Körper, sondern auch die zunächst darunterliegende Schicht, so dafs ein Theil des Lichts dieselbe gleichsam als primäres durchsichtiges Mittel zu durchlaufen habe.

ndlichen in Schwingungen versetzten Aether-
wie von selbstständig schwingenden Punk-
ellen c_1, d_1 etc. (Elementar-Wellen ge-
n einhüllende Fläche in dem ersten Mit-
enfläche der reflektirten Strahlen bildet. Be-
wir die Wellenfläche zu einer Zeit t, in welcher
icht in B anlangt, so hat, da $SB = SC + aB$ und
$B = SD + bB$ ist, der Strahl SC einen Weg $SC + aB$,
der Strahl SD einen Weg $SD + bB$ zur Zeit t gemacht,
die Bewegung im ersten Strahl (SC) wird also in einer
Kugel liegen, dessen Radius aB ($= Cc$) und die Bewe-
gung im zweiten Strahl (SD) in einer Kugelfläche, dessen
Radius bB ($= Dd$) ist.

Sind nun c_1, d_1, B die Punkte, in welche die Strah-
len SC, SD, SB zur Zeit t anlangen würden, wenn das
zweite Mittel nicht vorhanden wäre, so würde die Kugel-
fläche Ac_1d_1B die Gesammt-Wellenfläche sein, welche die
Elementarwellen in c_1, d_1 etc. berührt, also die Kugel-
fläche $AcdB$, welche mit dem Radius $sc = Sc_1$ beschrie-
ben ist, die Gesammt-Wellenfläche der reflektirten Strah-
len, welche die elementaren reflektirten Wellen in c, d etc.
berührt. Die reflektirten Strahlen, welche von C, D etc.
ausgehen, treffen die Gesammt-Wellenfläche in den Be-
rührungspunkten c, d etc., also sind Cc, Dd etc. die Rich-
tungen derselben, und es ist z. B. für den Einfallsstrahl
SD wegen $CS = Cs$, $\angle dDB = \angle CDs = \angle SDC$. Da
aber SDC das Complement des Einfallswinkels, dDB das
Complement des Reflexionswinkels ist, so ist der Einfalls-
winkel dem Reflexionswinkel gleich, und beide liegen in
derselben Ebene.

Man sieht, dafs der Beweis noch gültig bleibt, wel-
cher Art auch das zweite Mittel sei, sobald nur das erste
Mittel einfachbrechend ist.

Die genaueste Bestätigung erhält dies Gesets dadurch,
dafs der Winkel zwischen den beiden Richtungen, welche
vom Auge nach einem Stern und nach dessen von einer
horizontalen spiegelnden Fläche (einer Wasser- oder Queck-

silberfläche) abgespiegelten Bilde gehen, genau doppelt so grofs ist, als der Winkel, welchen die nach dem Stern gehende Gesichtslinie mit dem Horizont bildet. Ist nämlich ***AB*** Fig. 20. die spiegelnde Fläche, ***SC*** ein von einem Stern kommender in ***C*** nach dem in ***O*** befindlichen Auge reflektirter Lichtstrahl, so sieht man in der Richtung ***Os*** das Bild des Sterns, und in der Richtung ***OS***, welche wegen der grofsen Entfernung der Lichtquelle parallel ***CS*** ist, den Stern selbst. Wenn nun $\angle SOs$, oder, was dasselbe ist, $\angle SCs = 2SCA$ ist, so mufs $\angle SCA = \angle OCB$, und mithin der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel sein.

Das Grundgesetz der Refraction (nach seinem Entdekker Descartes das Cartesische Gesetz genannt) ist:

Sind beide Mittel einfachbrechend, so fällt die Brechungs-Ebene mit der Einfalls-Ebene zusammen, und das Verhältnifs des Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels ist constant.

Der Werth dieses Verhältnisses heifst das relative Brechungsverhältnifs oder der relative Brechungsindex beider Substanzen, und ist dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts, oder, was dasselbe ist, dem Verhältnisse der Wellenlängen in beiden Mitteln gleich. Da ferner jede Farbe eine eigene Geschwindigkeit und mithin eine eigene Wellenlänge hat, so ist das Brechungsverhältnifs für verschiedene Farbenstrahlen verschieden.

Ein elementarer Beweis dieses Grundgesetzes ist folgender:

Es sei (Fig. 21.) ***AB*** die brechende Fläche; ferner seien ***SD*** und ***SB*** zwei von einem leuchtenden Punkt ***S*** ausgehende Strahlen, die einen sehr kleinen Winkel ***DSB*** mit einander bilden, und ***Dg***, ***Bc*** die Richtungen der entsprechenden gebrochenen Strahlen. Zieht man ***Dd*** senkrecht auf ***SB***, und ***Bb*** senkrecht auf ***Dg***, so liegt wegen der Nähe der beiden Strahlen, ***Dd*** nahe in der durch ***D*** gehenden Wellenfläche im ersten Mittel, und ***Bb*** nahe in

der durch B gehenden Wellenfläche im zweiten Mittel; das Licht langt also gleichzeitig in D und d an, und während dasselbe in dem Strahl SB von d nach B fortschreitet, geht das Licht des Strahls SD von D nach b, so dafs sich dB und Db wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit verhalten. Ferner verhalten sich dB und Db wie die Sinus der Winkel dDB und DBb, also hat man, wenn ω die Geschwindigkeit des Lichts im ersten Mittel, und ω' dieselbe im zweiten Mittel ist, $dB : Db = \sin dDB : \sin DBb = \omega : \omega'$. Ist aber mn das Einfallsloth des Strahls SB, so ist $\angle mBd = \angle dDB$ der Einfallswinkel, und $\angle nBc = \angle DBb$ der Brechungswinkel, folglich, wenn man jenen durch α, diesen durch α' bezeichnet,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\omega}{\omega'} = \text{Brechungsindex.}$$

Ist DB so grofs, dafs dB der Wellenlänge im ersten Mittel (l), also Db der Wellenlänge im zweiten Mittel (l') gleich ist, so sind Dd und bB die Grenzen zweier aufeinanderfolgenden Wellen, und man hat

$$dB : Db = l : l' = \omega : \omega' \text{ *}).$$

*) Die einfachen und instructiven Beweise, welche Fresnel für das Reflexions- und Refractions-Gesetz gab, sind folgende: 1) Für die Reflexion: Es sei Fig. 22. AB die Grenz-Ebene beider Mittel, und Sa, Sb, Sc, Sd etc. seien von einem sehr fernen leuchtenden Punkt S kommende und deshalb parallele Strahlen, und as, bs, cs, ds u. s. w. parallele Radien der reflectirten von a, b, c, d etc. ausgehenden Elementarwellen. Ferner möge $ab = bc = cd$ etc. sein und am senkrecht auf Sb stehen, also in der durch a gehenden Wellenfläche des einfallenden Lichtes liegen. Endlich mögen bn, co, dp senkrecht auf as, bs, cs stehen, und die letztgenannten Radien so liegen, dafs $an = mb$, also $\Delta amb \cong \Delta anb$ und mithin $\angle nab = \angle SaA$ wird. Alsdann haben die Radien as, bs, cs etc. die Lage, welche oben den reflectirten Strahlen zugeschrieben wurde, und es kommt wegen $Sa = Sm$ und $Sa + an = Sm + mb$ das Licht in b und n gleichzeitig und in gleicher Phase an, so dafs sich die Strahlen as und bs, wenn ab sehr klein ist, verstärken. Ebenso ist es mit jedem benachbarten der folgenden Strahlen cs, ds etc. Wäre dagegen $an \lessgtr bm$, so käme das Licht in b und n wegen der Verschiedenheit der durchlaufenen Wege in ungleichen Phasen an. Alsdann läfst sich $ab = bc = cd = de$ so denken, dafs

Ist das erste Mittel der leere Raum, und nimmt man die Geschwindigkeit ω in demselben zur Einheit, so ist das Brechungsverhältnifs $\frac{1}{\omega'}$, welches man alsdann **absolutes Brechungsverhältnifs**, oder schlechthin **Brechungsverhältnifs** nennt, dem umgekehrten Werthe der Geschwindigkeit des Lichts in demselben gleich. — Die Geschwindigkeit des Lichts ist im leeren Raum am gröfsten,

---

$\pm(bm - an)$ einer halben Wellenlänge gleich ist, so dafs die Strahlen *as* und *bs* in *n* und *b* um eine halbe Undulation verschieden sind, und ihre Wirkungen sich demnach aufheben. Man kann also schliefsen, dafs die eine Hälfte der Wellenbewegung im Strahl *bs* durch Interferenz von der von der einen Hälfte der Wellenbewegung im Strahl *as*, die andere Hälfte von der Hälfte der Wellenbewegung im Strahl *cs* aufgehoben wird. Ebenso wird die Bewegung in *cs* aufgehoben von den Hälften der Bewegungen in *bs* und *ds* etc., so dafs in den Richtungen *as*, *bs*, *cs*, *ds* etc. jede Lichtwirkung vernichtet wird, und nur, wenn die Ebene *AB* begrenzt ist, an den Grenzen *A* und *B* ein geringer unzerstörter Antheil übrig bleibt. Auf dieselbe Weise wird das Licht in den aus der Einfalls-Ebene heraustretenden Richtungen zerstört. Es bleibt somit nur eine Wirkung in den oben als Reflexionsrichtung angegebenen Richtungen möglich.

2) Für die Refraction: Es seien in der vorigen Figur *ar*, *br*, *cr*, *dr* einander parallele Radien der von *a*, *b*, *c*, *d* ausgehenden gebrochenen Elementarwellen, und *bv*, *cu*, *dt* auf denselben senkrecht. Ferner mögen diese Radien in der Einfalls-Ebene sich befinden und eine solche Lage haben, dafs die Strecken *mb* und *av* vom Licht in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, so dafs also $mb : av = \omega : \omega'$ ist, und mithin *ar*, *br*, *cr*, *dr* die Richtungen haben, welche dem Cartesischen Gesetze zufolge die gebrochenen Strahlen haben sollen. Alsdann kommt die sich längs *Sa* fortpflanzende Lichtbewegung zu derselben Zeit in *v* an, wenn die sich längs *Sb* fortpflanzende Bewegung in *b* anlangt. Die Punkte in *b* und *v*, und somit auch die in den Richtungen *br* und *vr* respective von *b* und *v* gleichweit entfernten Theilchen befinden sich demnach während der ganzen Dauer der Lichtbewegung in gleichen Phasen und die Lichteffekte müssen sich verstärken. Werden aber die Strecken *mb* und *av* in ungleichen Zeiten zurückgelegt, so kann man sich die Entfernungen *ab*, *bc*, *cd* so grofs denken, dafs der Zeitunterschied eine halbe Schwingungsdauer beträgt, und mithin die Bewegungen sich in den Richtungen *ar*, *br*, *cr*, *dr* nach der Art, wie es vorher bei der Reflexion angedeutet wurde, vernichten. Es wird folglich nur in denjenigen Richtungen Lichtwirkung übrig bleiben, welche das oben aufgestellte Refractionsgesetz befolgen.

und in den Gasarten wiederum größser, als in den flüssigen und festen Körpern. Da der Brechungswinkel um so mehr von dem Einfallswinkel abweicht, die Richtung des gebrochenen Strahls also um so mehr von der des einfallenden verschieden ist, je mehr sich $\frac{\omega}{\omega'}$ von der Einheit entfernt: so nennt man, wenn man ω auf den leeren Raum oder die Luft bezieht, das zweite Mittel um so stärker brechend, je mehr $\omega' < \omega$ ist. — Die am stärksten brechende durchsichtige Substanz ist das chromsaure Blei, für welches $\frac{\omega}{\omega'}$ nahe 3 ist.

Insofern die lebendige Kraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, drückt $\omega^2 - \omega'^2$ den Verlust derselben beim Eintritt in das zweite Mittel aus. Sein Verhältniſs zu ω'^2, d. h. $\frac{\omega^2 - \omega'^2}{\omega'^2}$ oder, wenn man das Brechungsverhältniſs $\frac{\omega}{\omega'}$ durch n bezeichnet, $n^2 - 1$, nennt man das Brechungsvermögen oder die brechende Kraft des zweiten Mittels, und das Verhältniſs desselben zur Dichte d der Substanz, nämlich $\frac{n^2-1}{d}$ heiſst das specifische Brechungsvermögen derselben.

Bei Gasarten, so wie bei Dünsten in einiger Entfernung vom Maximum ihrer Spannkraft, ist die brechende Kraft genau der Dichte proportional, und ändert sich bei constanter Dichte nicht mit der Temperatur. In der Nähe jenes Maximums wächst indeſs die brechende Kraft schneller als die Dichte. Das Brechungsvermögen gemengter Gasarten läſst sich aus den brechenden Kräften der einzelnen berechnen.

Aus der Gleichung $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\omega}{\omega'} = n$ folgt, daſs $\sin\alpha' = \frac{\omega'}{\omega}\sin\alpha$ gröſser als 1 wird, also α' keinen möglichen Werth hat, wenn $\omega' > \omega$ und zugleich $\sin\alpha > \frac{\omega}{\omega'}$ wird, d. h.

wenn das zweite Mittel schwächer brechend als das erste, und der Sinus des Einfallswinkels gröfser als das Brechungsverhältnifs ist. Die Brechung hört alsdann ganz auf, und es wird alles Licht reflektirt. Diese Erscheinung führt den Namen Totalreflexion, während man die mit Brechung verbundene Reflexion partiell nennt. Der Winkel α, für welchen in jenem Fall $\sin\alpha = n$ wird, und für den daher $\sin\alpha' = 1$ wird, heifst die erste Grenze der totalen Reflexion.

Wird $\alpha = 0$, d. h. steht der einfallende Strahl senkrecht auf der brechenden Fläche, so wird auch $\sin\alpha' = \frac{\omega'}{\omega}\sin\alpha = 0$, d. h. der gebrochene Strahl steht gleichfalls auf der brechenden Ebene perpendicular, und hat somit gleiche Richtung mit dem einfallenden (und zugleich mit dem reflektirten).

Der Umstand, dafs die Lichtstrahlen durch die Brechung ihre Richtung ändern, ist der Grund mannigfaltiger Erscheinungen, die aber alle darauf hinaus kommen, dafs wir die Gegenstände an einem anderen Orte sehen, als an welchem sie sich wirklich befinden, insofern wir dieselben in derjenigen Richtung befindlich glauben, in welcher die von ihnen ausgehenden Strahlen unser Auge treffen. Daher sehen wir Objekte, die in einer Flüssigkeit (welche das Licht stärker als Luft bricht) liegen, von oben herabsehend, der Oberfläche derselben näher gerückt; das in Wasser eingetauchte Ende eines Stabes liegt scheinbar der Oberfläche näher, und der Stab erscheint gebrochen. Ein in einem durchsichtigen mit Wasser gefüllten Gefäfse liegender Gegenstand erscheint doppelt, wenn wir ihn zugleich durch die Wände des Gefäfses und durch die Oberfläche hindurch sehen.

Ist nämlich (Fig. 23.) s irgend ein im Gefäfs A befindlicher Körper, und befindet sich das Auge in o, so sehen wir denselben, insofern ein Lichtstrahl sao dasselbe trifft, in der Richtung os_2, und insofern ein anderer Strahl auf dem Weg sbo zu uns gelangt, ein zweites Mal in der

Richtung oe_1. — Da die Differenz $\sin\alpha - \sin\alpha' = \sin\alpha\,(1-n)$ ist, und daher der Winkel zwischen dem einfallenden und gebrochenen Strahl $(\alpha - \alpha')$ um so gröfser wird, je gröfser α ist, so vermehrt sich die Abweichung des gebrochenen Strahls von dem einfallenden mit dem Wachsen des Einfallswinkels. Daher erscheinen die aufserhalb der Atmosphäre liegenden Gestirne um so weiter von ihrer wahren Lage entfernt, je schiefer ihr Licht auf die Oberfläche der Atmosphäre auffällt, d. h. je näher sie dem Horizont liegen. Sie erscheinen nämlich dem Zenith näher, und nur die im Zenith befindlichen zeigen sich an ihrer wahren Stelle, da die senkrecht auffallenden Strahlen ihre Richtung durch die Brechung nicht ändern. Daher erscheint auch die Scheibe des aufgehenden Mondes und der aufgehenden Sonne an ihrem unteren Rande etwas abgeplattet.

Dieselben Erscheinungen sind für ein unter Wasser befindliches Auge wegen der viel stärkeren Brechbarkeit des letzteren noch auffallender. Ist Fig. 24. AB eine Wasserfläche und befindet sich in o das Auge, so sieht dasselbe die in h, g, f, e befindlichen Punkte etwa beziehlich in h', g', f', e'; und sind die Winkel omB und onA dem Complement der Grenze der totalen Reflexion gleich, so gehen die von o aus auf die Wellenfläche zwischen m und A und zwischen n und B gehenden Strahlen in das Wasser zurück, so dafs jene Flächen die im Wasser befindlichen Gegenstände abspiegeln. Da $\angle mon$ ungefähr 96^0 ist, so sehen wir die aufserhalb des Wassers liegenden Dinge in einen Kreis zusammengedrängt, dessen Durchmesser 96^0 ist, und rings umher eine glänzende Spiegelfläche. Diese spiegelnde Fläche ist von der durchsichtigen Kreisfläche durch einen regenbogenartigen Farbenbogen getrennt, dessen Existenz darauf beruht, dafs für die verschiedenen Farbenstrahlen die Grenze der Totalreflexion verschieden ist, insofern n mit der Farbe variirt. — Das Undurchsichtigwerden einer durchsichtigen Substanz durch totale Reflexion, so wie den Farbenbogen zwischen dem spiegelnden total-reflektirenden Theil einer Fläche und dem das Licht den Durch-

gang gestattenden Theil sieht man am bequemsten, wenn man durch die eine Fläche eines dreiseitigen Glas-Prisma's hinlänglich schief auf eine der beiden andern Flächen sieht. Drückt man einen mit einer Flüssigkeit benetzten Gegenstand gegen den reflektirenden Theil der spiegelnden Fläche, so verliert die benetzte Stelle ganz oder zum Theil ihre Undurchsichtigkeit, weil die Grenze der Totalreflexion dadurch, daſs das Brechungsverhältniſs dort nicht mehr das zwischen Glas und Luft, sondern das viel kleinere zwischen Glas und der Flüssigkeit ist, bedeutend weiter gerückt wird.

Dispersion.

Leitet man einen einfachen Lichtstrahl *Sa* (Fig. 25.) auf die Seitenfläche eines dreiseitigen Prisma's, dessen Durchschnitt *BAC* sei, so würde derselbe etwa in der Richtung *ab* das Prisma durchlaufen, und, in *bd* wiederum heraustretend, auf einer in *d* befindlichen Fläche *EF* einen Lichtpunkt erzeugen, sobald alles übrige Licht ausgeschlossen ist, also wenn z. B. das Prisma sich in einem dunklen Zimmer befindet, und das Licht nur durch eine so kleine Oeffnung von auſsen Zugang erhält, daſs nicht mehr als ein Lichtstrahl eindringen kann. Ist aber der Lichtstrahl nicht einfach, sondern besteht derselbe, wie es beim Sonnenlichte der Fall ist, aus verschiedenen Strahlen, welche in jedem nicht gasförmigen Mittel verschiedene Geschwindigkeiten haben, so wird in *a* jeder derselben unter einem andern Winkel gebrochen. Bei der zweiten Brechung in *AC* wird diese Divergenz der Strahlen noch stärker, so daſs auf der Fläche *EF* eine Reihe von so vielen Lichtpunkten entsteht, als Strahlen verschiedener Geschwindigkeit im Strahle *Sa* vorhanden sind. Die Erfahrung lehrt, daſs deren eine unendliche Menge vorhanden sind, daſs aber die Geschwindigkeitsunterschiede derselben zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen sind, so daſs eine ununter-

bro-

brochene, aber begrenzte Lichtlinie *dg* entsteht. Ferner zeigt jeder Punkt dieser Lichtlinie eine besondere Farbe. Der schnellste Strahl, welcher die Richtung *acg* einschlägt, giebt einen violetten Punkt; der langsamste, welcher in der Richtung *abd* sich fortpflanzt, giebt einen rothen Punkt. Die zwischen *d* und *g* liegenden übrigen Farbenpunkte gehen nach der Reihe durch alle Nüancen des Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau und Indigo ins Violette über, so aber, dafs nirgend eine scharfe Grenze je zwei aufeinanderfolgender Punkte bemerkbar ist.

Liefse man, statt eines einzelnen Strahls *Sa*, eine Reihe Strahlen auf das Prisma fallen, und zwar durch eine unendlich feine Spalte, welche der Kante *A* des Prisma's parallel ist, so würde, wenn die Einfalls-Ebene senkrecht auf dieser Kante steht, jeder Farbenpunkt sich in eine gleichfarbige Lichtlinie verwandeln, und statt der Linie *dg* ein breiter Streifen von der Länge *dg* erscheinen, welcher von *d* nach *g* zu dieselbe Farbenfolge, wie die eben erwähnte Farbenlinie, zeigte. Da man aber weder einen einzelnen Lichtstrahl, noch eine Reihe einzelner neben-einander liegender Strahlen isoliren kann, um sie auf das Prisma zu führen, so werden diese Farbenbilder, Farbenspektra genannt, mehr oder weniger modificirt erscheinen. Leitet man nämlich das Licht eines einzelnen Lichtpunktes durch eine noch so kleine Oeffnung, so finden doch eine unendliche Menge Strahlen durch dieselbe ihren Durchgang, und es fällt nicht ein Lichtstrahl auf das Prisma, sondern ein Lichtkegel, dessen Basis die Oeffnung, und dessen Scheitel der Lichtpunkt ist. Es erzeugt also jeder Strahlenbündel gleicher Farbe auf der Tafel *EF* einen Lichtkreis statt eines Lichtpunktes. Die den verschiedenen, angrenzenden Farben angehörigen Kreise überdekken sich zum Theil, und die Farben erscheinen nicht vollkommen rein, während überhaupt statt einer Farbenlinie, ein Farbenstreif erscheint, dessen Breite der Durchmesser der einzelnen Farbenkreise ist, und dessen Enden abgerundet sind. Aehnliches geschieht, wenn man das Licht durch eine noch so feine Spalte leitet.

Uebrigens läfst sich das Licht, wenigstens wenn man direktes Sonnen-, Tages-, oder Kerzenlicht anwendet, nicht von einem einzelnen Lichtpunkte isoliren. Leitet man z. B. das Sonnenlicht direkt durch eine kleine Oeffnung, so schickt jeder Punkt der Sonnenscheibe einen Lichtkegel durch dieselbe und erzeugt auf der Tafel *EF* einen Lichtkreis, so dafs die Lichtkreise, die sämmtlichen Lichtpunkten der Sonne ihr Entstehen verdanken, sich zu einem gröfseren Kreise, einem Bilde der Sonne vereinigen. (Eine Kerzenflamme giebt ein verkehrtes Bild der Flamme, da die Anordnung der einzelnen zusammensetzenden Lichtkreise von der Gestalt des lichtgebenden Körpers abhängt.) Der Farbenstreif auf der Tafel hat somit in der Wirklichkeit die constante Breite der Sonnenbilder.

Ein dritter Umstand, welcher verhindert, dafs das Farbenspectrum als ein aus gleichfarbigen genau geraden Lichtlinien bestehendes Rechteck erscheint, ist, dafs viele Substanzen, wie besonders die Gläser, selten homogen genug sind, um dem Lichte einen regelmäfsigen (stets dieselbe gerade Richtung bewahrenden) Durchgang zu gestatten. Man pflegt daher die Strahlen der Kante des Prisma's so nahe wie möglich auffallen zu lassen, um den Weg im Innern desselben abzukürzen.

Den Einflufs, den die Gröfse des leuchtenden Körpers ausübt, kann man dadurch verringern, dafs man z. B. statt der Sonne ein durch eine Linse von sehr kurzer Brennweite *) erzeugtes sehr verkleinertes Bild derselben anwendet. Der Nachtheil, welchen die Divergenz der von einem einzigen Lichtpunkt ausgehenden Lichtbündel, so wie derjenige, welchen die Ausdehnung des Lichtkörpers erzeugt

*) Unter Linse versteht man ein von zwei sphärischen Flächensegmenten begrenztes Stück einer durchsichtigen Substanz. Eine solche hat die Eigenschaft, Lichtstrahlen, welche von einem Punkt ausgehen, durch Brechung nach ihrem Durchgang um so näher nach einem einzigen Punkt hin zu lenken, je näher dem Mittelpunkt der Linse dieselben auffallen. Die Entfernung dieses Punktes von der Linse, wenn die auffallenden Strahlen parallel auffallen, heifst die Brennweite derselben.

läfst sich grofsentheils dadurch beseitigen, dafs man dicht hinter dem Prisma das aus demselben heraustretende Licht mit einer Linse von gröfserer Brennweite auffängt, welche die parallel auffallenden Strahlen derselben Farbe sehr nahe nach demselben Punkt hinlenkt. Eine möglichst ebene weifse Tafel an dem Orte, wo diese Strahlenvereinigung stattfindet, aufgestellt, zeigt alsdann ein Spektrum, welches um so vollkommner ist, je vollkommner die letzterwähnte Linse, die Homogeneïtät des Prisma's, und je schmäler die das Licht durchlassende (am besten strichförmige) Oeffnung ist. Mit Hilfe eines sehr vollkommenen Glas-Prisma's und einer sehr vollkommenen Linse entdeckte Fraunhofer in dem Sonnenspektrum eine sehr grofse Menge dunkler Linien, welche der Kante des Prisma's und der schmalen das Licht durchlassenden Oeffnung parallel waren. Dabei fand derselbe, dafs die Zahl und Anordnung dieser Linien sich nicht mit der Substanz änderte, sobald nur (direktes oder indirektes) Sonnenlicht angewendet wird; dafs nur die schwächeren Linien bei schwachem Lichte oder bei etwas gröfserer Unvollkommenheit des Apparats verschwinden; und dafs endlich die relative Entfernung dieser Linien mit der Natur des Mittels variire, während dieselben Linien durchgängig in allen Mitteln in derselben Farbe liegen.

Von den hervorstechendsten Linien (oder Liniengruppen) wählte Fraunhofer 7 aus, um in den verschiedenen Substanzen die Spektra und die, verschiedenen Farbenstrahlen zugehörigen, Brechungsverhältnisse mit einander zu vergleichen. Da sich nämlich ihr Ort mit der gröfsten Genauigkeit bestimmen läfst, so liefern die Messungen zugleich die Brechungsverhältnisse der diesen Linien zunächst liegenden Strahlen. Die Lage dieser Linien, welche mit *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* bezeichnet werden, und deren im vorigen Abschnitte schon Erwähnung geschehen ist, stellt die Figur 26. dar. *B* liegt ungefähr am Ende des Roth und besteht aus zwei sehr nahen Linien, von denen die äufserste am dunkelsten erscheint. *C* liegt nahe an der Grenze des Roth und Orange und ist einfach. *D* liegt im

Orange, dem Gelb sehr nahe und besteht aus zwei gleich starken sehr nahen Linien. *E* liegt im Gelb, nahe dem Grün und besteht aus 7—8 sehr nahen Linien. *F* liegt fast in der Mitte des Grün und besteht aus drei gleich starken gleich von einander entfernten Linien. *G* liegt im Blau, dem Indigo nahe und besteht aus zwei durch eine sehr helle Linie getrennten Liniengruppen. *H* liegt im Violett und besteht aus einer Gruppe nach dem Ende des Spektrums zu sich mehr und mehr verengernder Linien.

Zwischen *B* und *C* befinden sich 9 sehr feine Linien, zwischen *C* und *D* etwa 30, zwischen *D* und *E* etwa 84 von verschiedener Stärke, zwischen *E* und *F* etwa 79, zwischen *F* und *G* 185, zwischen *G* und *H* 190, und zahlreiche Linien zwischen *H* und dem Ende des Spektrums, so daſs der Raum zwischen *B* und *H* ungefähr 574 Linien enthält. Die Intensität des Lichtes in den verschiedenen Farben ist durch die Ordinaten der über dem Spektrum stehenden Curve vorgestellt. Nach Fraunhofer ist, wenn die Lichtstärke im hellsten Gelb $= 1$ gesetzt ist, im äuſsersten Roth 0,032, in dessen Mitte 0,094, im Orange 0,640, im Grün 0,480, im Hellblau 0,170, an der Grenze des Blau und Violett 0,031, in der Mitte des Violett 0,0056.

Die Spektra der verschiedenen Substanzen unterscheiden sich unter übrigens gleichen Umständen nicht nur durch ihre Ausdehnung, sondern auch durch die relative Entfernung der dunklen Linien und mithin durch die relative Ausdehnung der Farben.

Durch das Brechungsverhältniſs eines Strahls, welches einer jener Linien entspricht, ist daher nicht das der übrigen Strahlen bestimmt. Dennoch ist ein Zusammenhang zwischen denselben vorhanden, der in dem vorigen Abschnitt, unabhängig von dem hier behandelten Phänomen der Aeuſserung der verschiedenen Brechbarkeit verschiedener Strahlen, näher erörtert worden ist.

Ist dn der Unterschied der Brechungsverhältnisse der äuſsersten (rothen und violetten) Strahlen, und n der Werth von $\frac{\omega}{\omega'}$ für die mittleren (gelben) Strahlen, so ist $\frac{dn}{n-1}$

dasjenige, was man **Zerstreuungsverhältnifs** der Substanz nennt.

Wenn man den Einfallswinkel eines unzerlegten Sonnenstrahls durch α, die Brechungswinkel des äufsersten rothen, des mittleren gelben und des äufsersten violetten mit α_1', α_4', α_7' bezeichnet, so ist $\alpha_1' - \alpha_7'$ der Unterschied des gröfsten und kleinsten Brechungswinkels, für den man wegen seiner Kleinheit näherungsweise $\sin\alpha_1' - \sin\alpha_7'$ setzen kann. Ebenso stellt $\sin\alpha_4' - \sin\alpha$ näherungsweise die Ablenkung der mittleren Strahlen von der Richtung des einfallenden vor, so dafs $\frac{\sin\alpha_1' - \sin\alpha_7'}{\sin\alpha_4' - \sin\alpha}$ das Verhältnifs des Ablenkungsunterschiedes der äufsersten Strahlen (d. h. der Farbenzerstreuung) zur Ablenkung der mittleren Strahlen ausdrückt, für welches man, wenn n_1, n_7, n_4 die Brechungsverhältnisse der erwähnten Strahlen bedeuten, $\frac{(n_1 - n_7)\sin\alpha}{(n_4 - 1)\sin\alpha}$ oder $\frac{n_1 - n_7}{n_4 - 1}$ setzen kann, welches der vorhergegebene Ausdruck für das Zerstreuungsvermögen ist.

Die Zahl und Lage der dunklen Linien im Spektrum variirt mit der Lichtquelle. Das von den Planeten, den Wolken etc. reflektirte Sonnenlicht verhält sich wie das direkte. Was das Licht der Fixsterne betrifft, so finden sich z. B. im Licht des Sirius drei breite Streifen, von denen einer im Grün und zwei im Blau liegen; ähnlich verhält sich das Licht des Castor; Pollux und Beteigeuze zeigen viele schwache Linien; Procyon sehr wenige etc. Das Kerzenlicht zeigt einen sehr hellen Streifen zwischen Roth und Gelb, und einen weniger scharf begrenzten im Grün. Die Flammen der verschiedenen brennbaren Mittel, das Licht glühender fester Körper, das Licht des elektrischen Funken zeigen die gröfste Mannigfaltigkeit in der Lage der Linien und in der Ausdehnung der Farben; viele geben sogar Lücken im Spektrum, oder fast ganz homogenes Licht, wie die Flamme des verdünnten Alkohols und des Kochsalz aufgelöst enthaltenden Weingeistes, welche beide ein fast reines Gelb geben.

Um sich homogenes Licht zu verschaffen, kann man entweder eine nur homogenes Licht erzeugende Flamme anwenden, oder das Spektrum durch einen mit einer hinreichend kleinen Oeffnung versehenen Schirm auffangen, so dafs die Oeffnung nur das Licht einer Farbe hindurch läfst. Davon, dafs dieses hindurchgelassene Licht homogen ist, dafs also nicht mehrere Farben an der Erzeugung einer bestimmten Stelle des Spektrums Antheil haben, kann man sich dadurch überzeugen, dafs durch ein zweites Prisma der isolirte Lichtbüschel nicht mehr ein längliches Spektrum, sondern einen einfarbigen Farbenkreis erzeugt.

Bringt man einzelne durch Prismen erzeugte homogene Farbenstellen (also verschiedene Stellen desselben Spektrums oder verschiedener Spektra) zur Deckung, so erscheint eine gemischte Farbe, die sich durch folgende, von Newton aufgestellte, empirische und durch die Erfahrung bewährte Regel bestimmen läfst. Man theile eine Kreislinie (Fig. 27.) in 7 ungleiche Theile, und trage in jeden Theil derselben eine der 7 Farben des Spektrums ein, so dafs die dem Roth, Grün und Violett entsprechenden Bögen 60° 45′ 34″, die dem Orange und Indigo entsprechenden 34° 10′ 38″, die dem Gelb und Blau entsprechenden 54° 41′ 1″ betragen, und zwar dergestalt, dafs jeder Sektor dieselben Nüancirungen erhält, welche die entsprechenden Farben im Spektrum zeigen. Denkt man nun in dem Schwerpunkt derjenigen Bögen, welche zu den zusammenzusetzenden Farben gehören, Massen befindlich, welche den respectiven Intensitäten oder Farben proportional sind, bestimmt den Schwerpunkt dieser Massen und verbindet den letzteren mit dem Mittelpunkt des Kreises, so zeigt diese Verbindungslinie auf den Ort des Spektrums, welchem die Mischungsfarbe entspricht.

Fällt der letztgenannte Schwerpunkt in den Mittelpunkt, so wird die Richtung unbestimmt, und das resultirende Licht ist weifs. Dies geschieht für die einander gegenüberliegenden Farben bei einem gewissen Intensitätsverhältnifs, und man nennt je zwei solche Farben, wie das Roth und Grün,

das Blau und Orange, das Gelb und Violett, **complementare Farben.** Je näher der resultirende Schwerpunkt dem Centrum zu liegen kommt, desto mehr Weifs enthält die Mischungsfarbe. Am lebhaftesten wird daher die Farbe, wenn derselbe der Peripherie sehr nahe liegt.

Die experimentellen Beweise, dafs das weifse Licht die verschiedenen prismatischen Farben schon in sich enthalte, und durch das Zusammenwirken aller dieser entstehe, beruhen auf der Wiedervereinigung der Farbenstrahlen zu weifsem Licht. Einer derselben ist folgender: Man stellt zwei Prismen aus derselben Substanz *ABC*, *DEF* (Fig. 28), welche bei *A* und *D* gleiche Winkel haben, so auf, dafs die Kanten *A* und *D* eine entgegengesetzte Lage haben, und die Flächen *AC* und *ED* einander parallel sind, und leitet auf die Fläche *BA* weifses Licht. Das aus der Fläche *DF* austretende Licht zeigt sich alsdann wiederum weifs. Das erste Prisma dient dazu, die im weifsen Licht enthaltenen Farbenstrahlen zu trennen; das zweite sie wiederum zu weifsem Licht zu vereinigen. Denkt man sich nämlich *Sa* zuvörderst als einen homogenen auf die Fläche *AB* fallenden Lichtstrahl, so nimmt derselbe einen solchen Weg *Sabcds*, dafs die Richtung nach dem Austritt aus dem zweiten Prisma, *ds*, dem einfallenden Strahl *Sa* parallel ist. Denn da man den Strahl *bc* als einen auf beide Prismen einfallenden Strahl betrachten kann, und die respectiven Complemente der Einfallswinkel *cbC* und *bcE* einander gleich sind, so sind auch die Complemente der Brechungswinkel *abA* und *Dcd* einander gleich, also mufs $ab \nparallel cd$, und somit, da auch $AB \nparallel DF$ ist, $\angle baA = \angle cdD$ sein. Die diesen Winkeln entsprechenden Complemente der Brechungswinkel *SaB* und *sdF* sind demnach gleichfalls einander gleich, d. h. es ist $Sa \nparallel ds$. Da dieser letzte Parallelismus von dem Brechungsverhältnifs unabhängig ist, so müssen sämmtliche Farbenstrahlen, die aus dem ersten Prisma heraustreten, wenn *Sa* ein Strahl weifsen Lichtes ist, aus dem zweiten Prisma parallel heraustreten, und sich demnach wie weifses Licht verhalten, wenn durch Vereinigung der Farbenstrahlen dasselbe erzeugt werden kann.

Zu den Erscheinungen, welche in der Farbenzerstreuung ihren Grund haben, gehört z. B., dafs nicht zu schmale weifse Objekte auf dunklem Grunde, durch ein Prisma gesehen, farbige Säume zeigen. Die Farbenstrahlen nämlich, in welche sich das von den mittleren Theilen derselben ausgehende Licht zerlegt, vereinigen sich durch Deckung zu weifsem Licht, und nur die äufsersten Enden der Spektra, die von dem von den Rändern herkommenden Licht gebildet werden, bleiben unüberdeckt, so dafs der Rand, welcher der Kante des Prisma's zugekehrt ist, blau und violett, der andere gelb-roth gesäumt erscheint. Die Farben der Ränder dunkler Objecte auf hellem Grnnde sind die umgekehrten. Diese letzten Farben werden von dem Licht gebildet, welches von den Theilen des hellen Grundes ausgesendet wird, welche dem dunklen Körper nächst anliegen.

Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichts. Polarisationswinkel. Ablenkung der Polarisations-Ebene.

Wenn das einfallende Licht senkrecht auf der Einfalls-Ebene polarisirt ist, so mufs es auch das reflektirte und gebrochene sein, und es läfst sich nachweisen, dafs, wenn P^2 die Intensität des einfallenden, R_p^2 die des reflektirten, und I_p^2 die des gebrochenen Lichtes ist,

$$R_p^2 = \frac{tang^2(\alpha - \alpha')}{tang^2(\alpha + \alpha')} P^2, \quad I_p^2 = \frac{sin\,2\alpha\, sin\,2\alpha'}{sin^2(\alpha + \alpha')\,cos^2(\alpha + \alpha')} P^2$$

wird.

Ist das einfallende Licht der Einfalls-Ebene parallel polarisirt, so ist es auch das reflektirte und gebrochene, und wenn man die Intensität des einfallenden durch S^2, die des reflektirten durch R_s^2, und die des gebrochenen durch I_s^2 bezeichnet, so ist

$$R_s^2 = \frac{sin^2(\alpha - \alpha')}{sin^2(\alpha + \alpha')} S^2, \qquad I_s^2 = \frac{sin\,2\alpha . sin\,\alpha'}{sin^2(\alpha + \alpha')} S^2.$$

Ist dagegen das einfallende Licht nach einer beliebigen Ebene polarisirt, so kann man sich die Schwingungen nach der Einfalls-Ebene und senkrecht darauf zerlegt

denken, und die Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichts ist dann der Summe der aus diesen Componenten sich ergebenden gleich. Die Polarisations-Ebene ist in den drei Wellensystemen verschieden, und zwar so, dafs, wenn das Azimuth der Polarisations-Ebene (so nennt man nämlich den Winkel dieser Ebene mit der Einfalls-Ebene) in dem einfallenden, reflektirten und gebrochenen Strahl beziehlich φ, φ', φ'' ist,

$$tang\,\varphi' = \frac{cos(\alpha+\alpha')}{cos(\alpha-\alpha')} tang\,\varphi, \quad tang\,\varphi'' = \frac{1}{cos(\alpha-\alpha')} tang\,\varphi$$

wird.

Aus den obigen Formeln folgt, dafs von den Intensitäten R_p^2, R_s^2, I_p^2, I_s^2, unabhängig von der Stärke des einfallenden Lichts P^2 und S^2, nur R_p^2 verschwinden kann. Es ist demnach nur ein Verschwinden des senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirten reflektirten Strahls möglich, und zwar tritt dieses ein, wenn $\alpha+\alpha' = 90^0$ ist, also der gebrochene Strahl auf dem reflektirten senkrecht steht.

Da das unpolarisirte Licht als nach allen Richtungen mit gleicher Intensität polarisirt betrachtet, und jede Schwingung nach der Einfalls-Ebene und senkrecht darauf zerlegt gedacht werden kann, so verschwinden demzufolge bei unpolarisirtem Einfallslichte alle senkrecht auf der Einfalls-Ebene polarisirten Lichtantheile, sobald $\alpha+\alpha' = 90^0$ ist, und es ist somit alles reflektirte Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt. Man nennt den Einfallswinkel, bei welchen dieses eintritt, deswegen den Polarisationswinkel.

Derselbe ist, da er durch $\alpha+\alpha' = 90^0$ bestimmt ist, für jedes Mittel ein anderer, und da für diesen Fall $sin\,\alpha = n\,sin\,\alpha'$ übergeht in $sin\,\alpha = n\,cos\,\alpha$, so ist $tang\,\alpha = n$, d. h. die Tangente des Polarisationswinkels ist dem Brechungsverhältnifs gleich.

Für das Glas, welches Malus, der Entdecker der Polarisation durch Reflexion, anwendete, war $n = 1{,}406$, also der Polarisationswinkel desselben $54^0\ 35'$. Für Tafelglas, für welches n zwischen 1,50 und 1,52 liegt, würde dieser

Winkel zwischen 56° 18′ und 56° 40′ liegen; für den Diamant, dessen Brechungsverhältniſs 2,477 ist, würde er 68° 1′; für Luft 45° 0′ 32″ betragen (Arago fand ihn zwischen 44° und 47° liegend).

Man kann sich also polarisirtes Licht verschaffen, wenn man natürliches (d. h. unpolarisirtes) Licht von irgend einer einfachbrechenden Substanz unter deren Polarisationswinkel reflektiren läſst. Läſst man dasselbe nach der Reflexion auf eine zweite spiegelnde Platte unter deren Polarisationswinkel auffallen, und zwar so, daſs die neue Einfalls-Ebene senkrecht auf der ersten Reflexions-Ebene steht, so wird aus dem obigen Grunde gar kein Licht reflektirt, da das einfallende Licht alsdann senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist.

Verbindet man zwei Glasplatten (*A* und *B* Fig. 29.), welche man auf der Rückseite geschwärzt hat, um die störende Reflexion an der Hinterseite derselben zu verhüten *)), mit einem Rohr *CD* so, daſs der Winkel zwischen dessen Axe und den Platten dem Complement des Polarisationswinkels gleich ist, so gehen durch dies Rohr längs der Axe nur solche Strahlen *bc*, welche unter dem Polarisationswinkel auf *A* gefallen sind, und treffen die Platte *B* unter demselben Winkel. Läſst sich nun der Spiegel *B* so drehen, daſs er mit der Axe des Rohrs stets denselben Winkel macht (indem man denselben z. B. an einem Reif *g*, welcher sich um *CD* herumdrehen läſst, befestigt), so erscheint der Spiegel wegen des Verschwindens des reflectirten Lichtes dunkel, wenn man *B* so dreht, daſs die Einfalls-Ebene der Strahlen *ab* und *bc* auf einander senkrecht stehen; man sieht dagegen ein Bild der Oeffnung des Rohrs in *e*, wenn man *B* aus dieser Lage herausdreht, und es erlangt dasselbe seine gröſste Helligkeit, wenn die Drehung 90° beträgt. Man pflegt bei diesem Versuch das Licht wei-

*) Vollkommen schwarze Flächen reflektiren nämlich gar kein Licht, oder vielmehr: ein Körper erscheint nur deshalb schwarz, weil er gar kein Licht zurückstrahlt.

ſser Wolken zu benutzen, weil dasselbe ganz unpolarisirt ist, während das Licht des blauen Himmels, theilweis schon polarisirt, zum Theil (nämlich der senkrecht gegen die Reflexions-Ebene polarisirte Antheil) nicht vom Spiegel reflektirt wird, das auf *B* fallende Licht also schon vor der zweiten Reflexion geschwächt wird.

Der Polarisationswinkel ist zwar wegen seiner Abhängigkeit vom Brechungsverhältniſs für jeden Farbenstrahl verschieden, allein da R_p^2 nur wenig von Null verschieden ist, wenn $\alpha + \alpha'$ nicht ganz genau 90° beträgt, so wird, sobald man den Polarisationswinkel der mittleren Strahlen zum Grunde legt, die Unvollkommenheit des Verschwindens des Lichtes nur dann merklicher, wenn die reflektirende Substanz ein starkes Zerstreuungsvermögen hat. Bei Flintglas, welches für die rothen Strahlen $n = 1{,}628$, und für die violetten $n = 1{,}671$ giebt, sind die respectiven Polarisationswinkel 58° 27′ und 59° 6′, also bedeutend genug, um eine merkliche Störung hervorzubringen.

Geschehen die Reflexionen unter dem Polarisationswinkel der mittleren (gelben) Strahlen, so werden die rothen und blauen, wenngleich mit schwacher Intensität, noch reflektirt, und das Bild der Oeffnung erscheint schwach purpur. Nimmt man die Einfallswinkel ein weniger kleiner, so daſs sie etwa dem Polarisationswinkel der rothen Strahlen entsprechen, so wird noch etwas Gelb und Blau reflektirt, und das Bild erscheint mehr oder weniger lebhaft Grün. Nimmt man die Einfallswinkel dagegen etwas gröſser, so verschwindet nur das Blau, und die übrigen Strahlen geben ein lebhaftes Roth mit einer Beimischung von Gelb.

Bezeichnet man den Polarisationswinkel der mittleren Strahlen für den ersten Spiegel durch p, für den zweiten durch p', den ersten Einfallswinkel durch α, den zweiten durch α_1, so ist die Färbung des Bildes *) folgende:

$\alpha < p$	$\alpha_1 < p'$	intensiv grün
	für einen Mittelwerth	weiſs
	$\alpha_1 > p'$	blaſs- oder amethystroth

*) Siehe Herschel: *Traité de la lumière, traduit p. Quetelet*, §. 832.

$\alpha = p$	$\alpha_1 < p'$	lebhaft grünlich-blau
	$\alpha_1 = p'$	schwach purpur
	$\alpha_1 > p'$	lebhaft pflaumenroth
$\alpha > p$	$\alpha_1 < p'$	blafs grünlich-blau
	für einen Mittelwerth	weifs
	$\alpha_1 > p'$	lebhaft roth.

Fällt das Licht auf eine durchsichtige Platte mit parallelen Flächen unter dem Polarisationswinkel, so ist der Einfallswinkel an der zweiten Fläche der Polarisationswinkel der Luft in Bezug auf die Substanz der Platte, und mithin ist auch das von der zweiten Fläche reflektirte Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt. Denn wegen der Parallelität der brechenden Flächen ist der Brechungswinkel α' an der ersten zugleich der Einfallswinkel an der zweiten, also wenn man α'' den Brechungswinkel an der zweiten Fläche nennt, $\alpha'' = \alpha$, so dafs $tang\,\alpha' = \frac{1}{n}$ ist, der einfallende Strahl mithin auf dem gebrochenen senkrecht steht.

Was den Intensitätswechsel bei der Drehung des zweiten Spiegels betrifft, so beachte man, dafs die Lichtstärke des reflektirten Lichts, für den Fall, dafs das einfallende im Azimuthe φ polarisirt ist, ausgedrückt werden kann durch

$$I^2 = R_p^2 \sin^2\varphi + R_s^2 \cos^2\varphi,$$

wenn R_p^2, R_s^2 die oben aufgestellten Ausdrücke bedeuten, und die Intensität des einfallenden Lichtes $P^2 = S^2$ ist *).

Da nun bei der Reflexion am zweiten Spiegel $R_p^2 = 0$ ist, so bleibt $I^2 = R_s^2 \cos^2\varphi$.

Bei der Drehung bleiben α und α', also auch R_s ungeändert, und φ durchläuft alle Werthe von 0^0 bis 360^0; es tritt daher bei jeder vollständigen Drehung zweimal Dunkelheit ein (indem $I^2 = 0$ wird), nämlich für $\varphi = 90^0$ und $\varphi = 270^0$, also nach jeder halben Drehung. Die Helligkeit wird ein Maximum für $\cos^2\varphi = 1$, d. h. für $\varphi = 0$

---

*) Die Intensität des nach der Einfalls-Ebene polarisirten Antheils des einfallenden Lichts ist nämlich alsdann $S^2 \cos^2\varphi$, und dies des senkrecht darauf polarisirten Antheils: $P^2 \sin^2\varphi$.

und für $\varphi = 180$, also für die auf den vorigen Stellungen senkrechten Drehungen; während in den Zwischenstellungen des Spiegels die Helligkeit mit $cos^2\varphi$, also mit der Drehung stetig ab- oder zunimmt.

Zur Bestätigung der Intensitätsformeln des reflektirten Lichts mögen einige der Messungen Arago's hier folgen, welcher Einfallswinkel und Azimuthe der Polarisations-Ebenen bestimmte, für welche das reflektirte Licht gleiche Intensität besafs. Die Spalte R^2 enthält die dazu nach der Formel berechneten Intensitäten, die des einfallenden zur Einheit genommen.

	α	φ	R^2
Glas als refl. Mittel	{82° 48′	37° 23′	0,2572
	{24° 18′	37° 21′	0,2637
	{82° 5′	36° 47′	0,2828
	{26° 6′	36° 0′	0,3090
	{78° 20′	32° 38′	0,4186
	{29° 42′	33° 1′	0,4064
Wasser als refl. Mittel . .	{86° 31′	41° 54′	0,1080
	{16° 12′	41° 27′	0,1286

Betrachtet man jeden unpolarisirt auf ein brechendes Mittel auffallenden Lichtstrahl, als bestehend aus zwei gleich intensiven senkrecht auf einander in den Azimuthen +45° und −45° polarisirten Strahlen (d. h. so, dafs ihre Polarisations-Ebene zu beiden Seiten der Einfalls-Ebene liegen und mit derselben einen Winkel von 45° bilden), so läfst sich leicht das polarische Verhalten des reflektirten und gebrochenen Lichtes aus den obigen Formeln bestimmen.

Das Azimuth des reflektirten Strahls ist nämlich, wie man aus den oben angegebenen Formeln ersieht, stets kleiner, und das des gebrochenen stets gröfser, als das des einfallenden (polarisirten) Strahls. Die durch Reflexion und Refraction unpolarisirten Lichts entstehenden Strahlen verhalten sich daher wie Strahlenpaare, deren Polarisations-Ebene schief gegen einander geneigt sind. Man nennt solches Licht partiell polarisirt.

Läfst man daher unpolarisirtes Licht mehrere Reflexionen erleiden, in der Art, dafs die Reflexions-Ebenen parallel bleiben, so nähern sich von Reflexion zu Reflexion die fingirten Polarisations-Ebenen der reflektirten Strahlen, so, dafs sie bald so nahe sind, dafs sie vollkommen nach derselben Ebene polarisirt scheinen. Nach n Reflexionen unter demselben Winkel α, an Platten derselben Substanz, bei Einerleiheit der Reflexions-Ebene ist das letzte Azimuth φ_n' gegeben durch die Gleichung

$$tang\,\varphi_n' = \pm\frac{cos^n(\alpha+\alpha')}{cos^n(\alpha-\alpha')}.$$

Die scheinbar vollkommene Polarisation tritt daher um so früher ein, d. h. der letztgenannte Quotient steht für einen um so kleinern Werth von n der Null sehr nahe, je näher $\alpha+\alpha'=90^0$, d. h. je näher α dem Polarisationswinkel ist.

Die Richtigkeit dieser Formel ist durch Brewster's Versuche bestätigt. Derselbe fand z. B., dafs Glas das Licht fast vollkommen nach zwei Reflexionen unter einem Winkel von 61° 3′ und unter 60° 28′ polarisirte, wofür die Rechnung beziehlich $\varphi_2' = 0^0\ 47'$ und $\varphi_2' = 0^0\ 33'$ giebt (so dafs die Menge des unpolarisirt bleibenden Lichts nur 0,00037 und 0,00018 des einfallenden Lichts beträgt), und dafs 5 Reflexionen unter 70° zur fast vollkommenen Polarisation hinreichen, wofür die Rechnung $\varphi_5' = 0^0\ 22'$ und als Menge des unpolarisirten Lichts 0,00008 giebt.

Die Vollkommenheit der Polarisation wird an dem Verschwinden des Lichts erkannt, wenn man dasselbe unter dem Polarisationswinkel von einer Glasplatte so reflektiren läfst, dafs die letzte Reflexions-Ebene auf der neuen Einfalls-Ebene senkrecht steht.

Ganz Aehnliches folgt für die Brechung, mit dem Unterschiede, dafs das gebrochene Licht unter keinem Einfallswinkel ganz verschwindet.

Da das Azimuth der Polarisations-Ebene des gebrochenen Strahls vergröfsert wird, so nähert sich dasselbe durch vervielfältigte Brechung bei derselben Brechungs-Ebene (also wenn die brechenden Platten z. B. parallel

sind), dem rechten Winkel, und das Licht scheint nach hinreichend wiederholter Brechung senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt. Natürliches Licht wird daher um so vollkommner nach dieser Ebene polarisirt, je gröfser die Zahl der Platten ist.

Das Azimuth φ_n'' nach n Refractionen ist gegeben durch $tang\,\varphi_n'' = \pm \frac{1}{cos^n(\alpha - \alpha')} tang\,\varphi$. Es wird also eine um so geringere Zahl Brechungen erfordert (d. h. φ_n'' wird um so früher nahe 90°), je gröfser $\alpha - \alpha'$, d. h. je gröfser der Einfallswinkel, je stärker das Brechungsvermögen des Mittels ist und — da der noch unpolarisirt bleibende Antheil bei intensiver auffallendem Licht gröfser ist — je geringere Intensität das letztere besitzt.

So wurde z. B. gefunden, dafs bei dem Licht einer Wachskerze, welche 10—12' von der nachstehenden Zahl paralleler Kronglas-Platten unter den danebenstehenden Einfallswinkeln als vollkommen polarisirt erschien.

Plattenzahl	α	Plattenzahl	α
8	79° 11'	27	57° 10'
12	74° 0'	31	53° 28'
26	69° 4'	35	50° 5'
21	63° 21'	41	45° 35'
24	60° 8'	47	41° 41'.

Bringt man Systeme paralleler Glasplatten in Fassungen, und bringt zwei solche Systeme in eine parallele Lage übereinander, so dafs auf das zweite System Licht fällt, welches fast gänzlich senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist, und macht man den Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich, so würde kein Licht vom zweiten System reflektirt werden, und das gebrochene Licht ganz ungeschwächt hindurchgehen, wie grofs auch die Plattenzahl sein mag, wenn es möglich wäre, die Platten vollkommen eben zu schleifen, und wenn die Platten vollkommen durchsichtig wären, d. h. wenn nicht ein Theil des Lichts beim Durchgange durch Absorption verloren ginge. Dreht man das zweite System so um den Strahl, dafs der Einfalls-

winkel sich nicht ändert, so nimmt wegen Zunahme der Reflexion die Intensität des durchgehenden Lichtes ab, und erreicht ihr Minimum bei einer Drehung von 90°, d. h. wenn die Einfalls-Ebenen beider Systeme sich senkrecht kreuzen. Bei hinreichend grofser Plattenzahl wird in dieser Stellung das Licht so schwach, dafs die Schicht undurchsichtig erscheint.

Eine solche Combination paralleler Platten giebt daher ein Mittel an die Hand, die Polarisations-Ebene eines polarisirten Strahls zu bestimmen.

Polarisation durch Totalreflexion.

Die Erfahrung hat gelehrt, dafs es zur Erklärung der Reflexions-Erscheinungen nöthig sei anzunehmen, dafs senkrecht und parallel gegen die Einfalls-Ebene polarisirte Strahlen nicht gleichzeitig reflektirt werden, sondern dafs die einen gegen die andern um einen Bruchtheil einer Undulation verzögert werden, sobald das reflektirende Mittel ein stärker brechendes, das relative Brechungsverhältnifs n also <1 ist, und dabei $\sin\alpha > n$, also α' (gegeben durch $\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n}$) imaginär wird, d. h. eine totale Reflexion eintritt. Das reflektirte Licht bleibt der Einfalls-Ebene parallel oder senkrecht darauf polarisirt, wenn das einfallende Licht nach diesen Richtungen polarisirt war. Ist das letztere dagegen in irgend einem Azimuth φ polarisirt, so kann man sich die Schwingungen des reflektirten parallel und senkrecht gegen die Einfalls-Ebene zerlegt denken, und beide differiren um einen gewissen Theil einer Undulation, so dafs eine elliptische Oscillation entsteht. An den Grenzen der totalen Reflexion, d. h. für den kleinsten Einfallswinkel, $\alpha = arc(\sin = n)$, bei welchem dieselbe eintritt, und für den gröfsten Einfallswinkel, $\alpha = 90°$, wird der Gangunterschied 0, und das Licht bleibt linear-polarisirt; zwischen beiden liegt ein Winkel α, welcher durch

$$\sin^2\alpha = \frac{2n^2}{1+n^2}$$

be-

bestimmt ist, für welchen der Gangunterschied ein gröfster wird. Erreicht dieser gröfste Werth eine Viertel-Undulation, so wird eine kreisförmige Polarisation möglich, und zwar tritt dieselbe ein, wenn die reflektirten Strahlentheile gleiche Intensität haben (siehe Seite 35.). Eine gleiche Intensität wird dadurch erreicht, dafs man polarisirtes Licht unter einem Azimuth von $+45^0$ oder -45^0 einfallen läfst.

Der Cosinus des gröfsten Phasenunterschiedes ist

$$\frac{8n^2}{(1+n^2)^2}-1;$$

wenn daher der Unterschied eine Viertel-Undulation betragen soll, so mufs $n \gtrless 0{,}4142$, also das Brechungsverhältnifs in Bezug auf Luft $\geq 2{,}4142$ sein.

Wollte man durch schwächer brechende Substanzen Circular-Polarisation hervorbringen, so müfste man z. B. das Licht zweimal total reflektiren lassen unter Einfallswinkeln, deren jeder eine Verzögerung einer Achtel-Wellenlänge hervorbrächte, oder man müfste 3, 4 etc. Reflexionen bewerkstelligen, deren jede beziehlich die Strahlen um $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$ etc. Undulationen verzögerte.

Das Brechungsverhältnifs der Glasart, deren sich Fresnel zu seinen Versuchen bediente, war 1,51, der gröfstmögliche Phasenunterschied für dieselbe betrug demnach 45^0 56,5′, also wenig mehr als $\frac{1}{8}$ Undulation, und diesem entspricht ein Einfallswinkel von 51^0 $20\frac{1}{3}$′. Da der Phasenunterschied von seinem Maximum nach beiden Grenzen der Totalreflexion abnimmt, so giebt es zwei Einfallswinkel, für welche er genau 45^0 wird. Die beiden zugehörigen Einfallswinkel für die obige Glasart finden sich 48^0 37,5′ und 54^0 37,3,′ und daher erhält man durch zwei Reflexionen unter einem dieser Winkel circular-polarisirtes Licht, sobald nur das einfallende in einem Azimuth von 45^0 polarisirt ist.

Da der Phasenunterschied von der Brechbarkeit der Strahlen abhängt, so wird bei Anwendung weifsen Lichts nur ein Strahl circular, die übrigen elliptisch polarisirt. Man nimmt daher den zu den mittleren Strahlen gehörigen

Einfallswinkel, um die Differenzen möglichst klein zu machen. Liegt der eine Einfallswinkel der ersten Grenze der Totalreflexion sehr nahe, so erreicht man die vollständigste Circular-Polarisation des weifsen Lichts, wenn man den von der Grenze entfernteren wählt. Fresnel nahm zu diesen Versuchen ein Glasparallelepiped von der Form *abcd* (Fig. 30.), in welchem der Winkel *dab* = 48° 37,5′ war, so dafs ein senkrecht auf *ab*, und deshalb ungebrochen durchgehender Strahl *pq* unter jenem Winkel auf *ad* fällt, und in *r* zum zweiten Mal unter diesem Winkel reflektirt senkrecht aus *dc* heraustrat.

Für drei Reflexionen mufs das Parallelepiped die Form *abcd* (Fig. 31.) haben, so dafs $\angle a = \angle d$ dem berechneten Winkel (für die obige Glassorte 69° 12′) gleich wird.

Fresnel machte auf Grund seiner Rechnung Versuche nicht nur mit 2, 3 und 4 Reflexion an der Berührungsfläche von Glas und Luft, sondern auch mit Combinationen von totalen Reflexionen am Contakt von Glas und Wasser, und am Contakt von Glas und Luft, weil die Reflexionen zwischen Glas und Wasser allein ein zu langes Glasprisma erfordert hätten, und fand die genügendste Bestätigung.

Leitet man einen durch ein Glasprisma (z. B. mittelst 2 Reflexionen) kreisförmig polarisirten Strahl durch ein gleiches Prisma so, dafs die correspondirenden Flächen beider einander parallel sind, so wird der Phasenunterschied der Componenten durch 2 neue Reflexionen verdoppelt, und gleich 180°, so dafs das Licht linear-polarisirt heraustritt, jedoch so, dafs die Polarisations-Ebenen des ersten einfallenden und des zuletzt austretenden Strahls auf einander senkrecht stehen. Ist jener Strahl also im Azimuth +45° polarisirt, so ist es dieser im Azimuth —45°.

Die eben beschriebenen Erscheinungen sind geeignet, uns erkennen zu lassen, ob ein Strahl kreisförmig polarisirt ist. Von linear-polarisirtem Licht unterscheidet sich nämlich das circular-polarisirte Licht dadurch, dafs seine Intensität unverändert bleibt, wenn man es unter dem Polari-

sationswinkel reflektiren läfst, und die reflektirenden Spiegel um den Strahl (bei verändertem Einfallswinkel) herumdreht, während, wie oben erörtert wurde, bei linear-polarisirtem Lichte die Intensität bei jeder Drehung von 90° von 0 bis zum Maximum zunimmt, oder vom Maximum bis 0 abnimmt.

Von unpolarisirtem Lichte unterscheidet es sich dadurch, dafs es durch 2 oder mehr totale Reflexionen in einem Glasprima unter schicklichem Einfallswinkel, welcher gewöhnliches Licht circular polarisiren würde, in linear-polarisirtes Licht verwandelt.

Das elliptisch polarisirte Licht erkennt man an dem Wechsel der Intensität bei der Reflexion unter dem Polarisationswinkel, während der Drehung des Spiegels, nur dafs dieselbe da blofs ein Minimum wird, wo linear-polarisirtes ganz verschwindet, nämlich in den Punkten, wo die grofse Axe der elliptischen Bahn auf der Einfalls-Ebene senkrecht steht.

B. *Verhalten der einaxigen Krystalle.*

Richtung der gebrochenen Strahlen.

Fällt ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche eines einaxigen Krystalls, so erregen die Vibrationen des im Einfallspunkte befindlichen Aethertheilchens in demselben, dem im vorigen Abschnitt Gesagten zufolge, zwei Wellensysteme, ein gewöhnliches und ein ungewöhnliches, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit verbreiten; der ursprünglich einfache Strahl theilt sich daher in zwei andere, welche verschiedene Richtungen verfolgen. Gehört das einfallende Licht einem ebenen Wellensystem an, so findet man auf demselben Wege, wie bei einfachbrechenden Mitteln, dafs die Normalen beider gebrochenen Well-Ebenen in der Einfalls-Ebene liegen müssen, und dafs, wenn α der Einfallswinkel, α' der Brechungswinkel des gewöhnlichen, α'' der des

ungewöhnlichen Wellensystems ist, und wenn o die Geschwindigkeit des gewöhnlichen, e die des ungewöhnlichen Systems bedeutet:

$$\sin\alpha = \frac{1}{o}\sin\alpha' \text{ und } \sin\alpha = \frac{1}{e}\sin\alpha''$$

ist. Beide Brechungswinkel sind daher für jeden Einfallswinkel bekannt, sobald die Geschwindigkeiten o und e bestimmt sind. Die erste ist für jede Strahlenrichtung dieselbe, und, wenn wir die Bezeichnung des vorigen Abschnitts beibehalten, für positive Krystalle π, für negative μ, welche durch Messungen ein für allemal bestimmt werden können. Die Geschwindigkeit e ist dagegen nach der Lage des Wellensystems gegen die Axe veränderlich, und zwar für positive Krystalle (vergl. Seite 15. u. Seite 82.) $\sqrt{\mu^2-(\mu^2-\pi^2)\delta''^2}$, für negative: $\sqrt{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta''^2}$, wenn δ'' den Cosinus des Winkels zwischen der Normale des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems und der Axe ist.

Es ist somit für positive Krystalle:

$$\sin^2\alpha' = \pi^2\sin^2\alpha \text{ und } \sin^2\alpha'' = [\mu^2-(\mu^2-\pi^2)\delta''^2]\sin^2\alpha.$$

und für negative Krystalle:

$$\sin^2\alpha' = \mu^2\sin^2\alpha \text{ und } \sin^2\alpha'' = [\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta''^2]\sin^2\alpha$$

– Hauptschnitt wurde oben jede durch die optische Axe gehende Ebene genannt. **Der zu einem einfallenden Strahl gehörige Hauptschnitt**, oder **Hauptschnitt** schlechthin, möge bei einaxigen Krystallen der durch das Einfallsloth gehende Hauptschnitt heifsen. Ist die Lage der Einfalls-Ebene gegen diesen Hauptschnitt, und die Lage der brechenden Ebene gegen die optische Axe gegeben, so ist auch die Lage des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems bestimmbar.

Bildet man nämlich (Fig. 32.) aus dem Einfallsloth OL, der optischen Axe OZ, und der Normale des ungewöhnlichen Wellensystems ON ein körperliches Dreieck, bezeichnet den Cosinus des Winkels LOZ mit D, dessen Sinus mit B, und die Neigung der Brechungs-Ebene LON gegen den Hauptschnitt ZOL (**Azimuth der Einfalls-Ebene** genannt) mit a, so findet man unmittelbar, da

$LON = \alpha''$ und $\cos ZON = \delta''$ ist,

$$\delta'' = D \cos \alpha'' + B \sin \alpha'' \cos a.$$

Dieser Werth von δ'' in den obigen Ausdruck für $\sin^2 \alpha''$ gesetzt, giebt eine Gleichung, welche den Brechungswinkel α'' liefert.

Es ist demnach die Lage des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems völlig bestimmt, sobald man aufser dem Einfallswinkel die Lage der brechenden Fläche gegen die Axe und das Azimuth der Einfalls-Ebene kennt.

Ist die einfallende Welle sphärisch, so fällt der gewöhnliche Strahl, da die ihm zugehörige Wellenfläche eine Kugel ist, mit der Normale der ebenen Wellen zusammen. Was dagegen die Lage des ungewöhnlichen Strahls betrifft, so bildet derselbe mit seiner Normale einen Winkel q, welcher bestimmt ist durch

$$\operatorname{tang} q = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\,\delta'' \sqrt{1 - \delta''^2}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\,\delta''^2}.$$

Er fällt daher mit seiner Normale nur zusammen: 1) wenn er der optischen Axe parallel ist, wo er dann mit dem gewöhnlichen Strahl gleiche Geschwindigkeit hat; 2) wenn er senkrecht gegen die optische Axe gerichtet ist, wo er bei positiven Krystallen seine kleinste, bei negativen Krystallen seine gröfste Geschwindigkeit hat. In den übrigen Richtungen entfernt sich der Strahl von seiner Normale um so weiter, je gröfser die doppelbrechende Kraft, d. h. je gröfser $\pi^2 - \mu^2$ ist.

Der ungewöhnliche Strahl tritt ferner im Allgemeinen aus der Einfalls-Ebene heraus, und zwar bildet die durch denselben und seine Normale gehende Ebene einen Winkel ψ mit der Einfalls-Ebene, welcher bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos \psi = + \frac{D \sin \alpha'' - B \cos \alpha'' \cos a}{\sqrt{1 - \delta''^2}}.$$

Dreht man den Krystall bei unveränderter Lage des Einfallslothes um dasselbe herum, während der einfallende Strahl seine Richtung beibehält, so bleibt auch die Einfalls-Ebene ungeändert, während der Hauptschnitt sich herum-

dreht, und somit das Azimuth der Einfalls-Ebene a alle Werthe von 0^0 bis 360^0 durchläuft.

Für $a = 0$ wird auch $\psi = 0$, und für $a = 180$, wird auch $\psi = 180$, wenn man beide Winkel von derselben Seite der Einfalls-Ebene an rechnet, d. h. in den beiden Stellungen, in welchen die Einfalls-Ebene mit dem Hauptschnitt zusammenfällt, liegt auch der Strahl in der Einfalls-Ebene. Das eine Mal liegt dabei der Strahl zwischen der Normale und dem Einfallsloth; das andere Mal die Normale zwischen dem Strahl und dem Einfallsloth. Bei der Drehung dreht sich daher der Strahl um seine (sich selbst in der Einfalls-Ebene etwas bewegende) Normale.

Für die Folge ist angenommen, dafs das Azimuth des Strahls, ψ, so wie das Azimuth des Hauptschnittes a, von der Seite der Einfalls-Ebene an gezählt wird, welche den spitzen Winkel zwischen der Normale und der brechenden Ebene enthält.

Geometrisch läfst sich die Lage des ungewöhnlichen Strahls durch folgende von Huyghen angegebene Construction bestimmen:

Ist (Fig. 33.) Sa ein in a auf die Fläche AdB eines einaxigen Krystalls fallender Lichstrahl, und $\mu a \mu$ die Richtung der durch a gehenden optischen Axe, so mache man, wenn der Krystall beispielsweise negativ ist, $a\mu = \mu$, und beschreibe um $\mu\mu$ als Rotationsaxe ein Revolutions-Ellipsoid, dessen halbe Aequatorialaxe $a\pi = \pi$ ist, und welches somit die Wellenfläche des von a ausgehenden gewöhnlichen Strahls ist, zu welcher das Licht von a aus anlangt, in einer Zeit, welche dasselbe braucht, um im leeren Raum, oder was nahe dasselbe ist, in der Luft einen der Einheit gleichen Raum zurückzulegen. Man ziehe ferner ab in der Einfalls-Ebene und ad in der brechenden Ebene senkrecht auf Sa, so dafs bad die dem Strahl Sa entsprechende durch a gehende Wellen-Ebene ist; nehme alsdann $ah = 1$, ziehe $bh \# AB$ (letztere Linie als Durchschnittslinie der Einfalls-Ebene mit der brechenden Ebene gedacht), ferner $bc \# Sa$ (so dafs also bc gleichfalls gleich 1 ist), und $cg \# ad$. Die

Wellen Ebene *bad* bewegt sich nun längs *bc*, und geht durch *cg* zu der Zeit, in welcher die ungewöhnlich gebrochene ellipsoidische Welle die Oberfläche des construirten Ellipsoids erreicht. Da die Linie *cg* in der brechenden Ebene liegt, so geht durch dieselbe nicht blofs die einfallende Well-Ebene zu der erwähnten Zeit, sondern auch die ungewöhnlich gebrochene Well-Ebene. Der Endpunkt des Strahls ist daher der Punkt, in welchem eine durch *cg* gehende Ebene das Ellipsoid berührt. Ist a'' dieser Punkt, so ist aa'' der ungewöhnliche Strahl. Derselbe liegt allemal in der Ebene, welche durch die Axe und die Normale der ihm zugehörigen Well-Ebene geht.

Beschreibt man überdies über $\mu\mu$ eine Kugelfläche (die correspondirende Wellenfläche des gewöhnlichen Strahls) und legt durch *cg* eine Berührungs-Ebene an dieselbe, so ist die nach dem Berührungspunkt a' gehende Linie aa' die Richtung des gewöhnlichen Strahls. Der Punkt a', und somit der Strahl aa' mufs, wie man sieht, in der Ebene *ABS*, d. h. in der Einfalls-Ebene liegen, während der Strahl aa'' aufserhalb derselben liegt, und nur in dieselbe fällt, wenn die Axe $\mu\mu$ in derselben liegt, d. h. wenn Hauptschnitt und Einfalls-Ebene zusammenfallen. In letzterem Fall ist nämlich der Endpunkt des Strahls aa'' der Punkt, in welchem eine von *c* ausgehende Linie die Ellipse $A\pi B$ berührt.

Dreht man den Krystall in seiner Ebene um den unveränderten Strahl *Sa*, so dafs also in der Figur *cg* und *Sa* seine Lage behält, und die Kugel und das Ellipsoid sich um *aE* als Axe drehen, so behält auch a' seine Lage, während der Berührungspunkt a'' sowohl seine Lage auf der Ellipsoidsfläche, als seine Lage im Raum ändert, also eine geschlossene Curve beschreibt und die correspondirenden ungewöhnlichen Strahlen in einer Kegelfläche liegen.

Sieht man daher durch einen einaxigen Krystall auf einen kleinen Gegenstand, so sieht man denselben doppelt, und dreht man den Krystall in seiner Ebene, so dreht sich das vom ungewöhnlichen Strahl erzeugte Bild um das fest stehende vom gewöhnlichen Strahl herrührende.

Ist nämlich (Fig. 34.) ***ABDC*** etwa ein etwas dickes Stück Kalkspath, dessen Flächen ***AB*** und ***CB*** parallel sind, und *S* z. B. ein auf Papier gezeichneter Punkt, so theilen sich die von *S* nach *a* und *b* hingehenden Strahlen in die gewöhnlich gebrochenen *ac* und *be*, und in die ungewöhnlich gebrochenen *ad* und *bf*. Alsdann sind die austretenden Strahlen *cg* und *dO* parallel *Sa*, und die Strahlen *eO* und *fh* parallel *Sb*, weil die Einfallswinkel bei *c* und *d* gleich den Brechungswinkeln bei *a*, und die Einfallswinkel bei *e* und *f* gleich den Brechungswinkeln bei *b* sind, während die Brechungsverhältnisse bei ***AB***, $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n'}$ sind, wenn dieselben bei ***CD***, *n* und *n'* waren. *ad* und *bf*, so wie *dO* und *fh* liegen zwar im Allgemeinen nicht in einer Ebene mit *ac*, *cg*, *be* und *eo* (von denen die beiden ersten mit *Sa*, die beiden letzten mit *Sb* stets in einer Ebene liegen), allein es läfst sich *b* so wählen, dafs *dO* und *eO* einander treffen. Befindet sich nun in *O* ein Auge, so sieht dasselbe ein Bild des Punktes *S* in den Richtungen *Os'* und *Os''*, von denen das erste das gewöhnliche, das zweite das ungewöhnliche Bild heifst. Dreht man alsdann den Krystall um das Einfallsloth *am* als Axe, so bleibt *be* und *eo*, also die Lage des Bildes *s'* unverändert, während der Strahl *dO* aus dem Auge rückt, und andere von *S* ausgehende Strahlen durch den Punkt *O* gehen, die gleichsam zu einem beweglichen Einfallspunkt *a* gehören, so dafs das ungewöhnliche Bild *s''* sich um das unbewegliche *s'* nach der einen Richtung herumbewegt, während die entsprechenden Einfallspunkte *a* sich nach entgegengesetzter Richtung herumbewegen.

Wenn der einfallende Strahl senkrecht auf der brechenden Fläche steht, also die Richtung *Ea* (Fig. 33.) hat, so ist die einfallende Wellen-Ebene, also auch die gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochene, deren Durchschnitte mit der Ebene der Figur mit ***CD*** und ***FG*** parallel seien, dieser Fläche (***AdB***) parallel; der gewöhnliche Strahl *ac* liegt in der Verlängerung von *Ea*, der ungewöhnliche bildet mit

demselben einen Winkel FaC, so dafs bei der Umdrehung des Krystalls der Endpunkt F des ungewöhnlichen Strahls einen Kreis um die Richtung aC beschreibt.

Fällt $a\mu$ in aE, d. h. ist der Krystall senkrecht gegen die Axe geschnitten, so werden beide Zweige der Wellenfläche von den Well-Ebenen in demselben Punkte berührt, und das Licht geht ungetheilt durch den Krystall. Fällt die Axe $a\mu$ in die brechende Fläche AdB, so liegt der Scheitelpunkt π des elliptischen Durchschnittes, welcher alsdann der Endpunkt des ungewöhnlichen Strahls wird, in der Richtung des Einfallslothes. Beide Strahlen fallen daher dann der Richtung nach zusammen und unterscheiden sich nur durch ihre ungleiche Geschwindigkeit.

Durchläuft das Licht zwei übereinandergelegte Krystallstücke, so theilt sich jeder der beiden aus dem ersten Stück tretenden Strahlen von neuem beim Eintritt in das zweite, so dafs man durch dieselben von jedem Punkte vier Bilder sieht.

Läfst man durch ein Prisma, welches aus einem einaxigen Krystall geschnitten ist, unpolarisirtes Licht (oder so polarisirtes, dafs keiner der Strahlen verschwindet) gehen, so entstehen zwei Farbenspektra von im Allgemeinen ungleicher Ausdehnung, deren eines, das gewöhnliche, in der Einfalls-Ebene liegt; das andere, ungewöhnliche, dagegen nur dann, wenn das Licht in der Ebene des Hauptschnittes einfällt. Wendet man daher Prismen an, deren Kante senkrecht gegen die Axe geschnitten ist, und läfst das Licht in einer gegen die Kante senkrechten Ebene einfallen, so kann man umgekehrt aus der Genauigkeit, mit der das eine Spektrum in die Verlängerung des anderen fällt, auf die Genauigkeit schliefsen, mit der die Prismen gearbeitet sind.

Reflexion des unpolarisirten Lichtes an einaxigen Krystallen.

Unpolarisirtes Licht wird durch Reflexion von einen einaxigen Krystall bei einem bestimmten Einfallswinkel vollständig polarisirt. Man nennt diesen Einfallswinkel den Polarisationswinkel des Krystalls in Bezug auf das umgebende Mittel, und schlechthin Polarisationswinkel, wenn das umgebende Mittel die Luft ist. Die Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls ist aber im Allgemeinen nicht, wie bei der Reflexion an einfachbrechenden Mitteln, die Einfalls-Ebene, sondern bildet mit ihr einen Winkel, den man die Ablenkung der Polarisations-Ebene nennt.

Die Gröfse des Polarisationswinkels hängt sowohl von der Lage der reflektirenden Krystallfläche gegen die optische Axe, als von der Lage der Einfalls-Ebene gegen den Hauptschnitt (d. h. von dem Azimuth der Einfalls-Ebene) ab. Für den Fall, dafs das Licht in der Ebene des Hauptschnittes einfällt, ist dieselbe gegeben durch die Gleichung

$$\sin^2\alpha = \frac{(1-\mu^2)B^2+(1-\pi^2)D^2}{1-\mu^2\pi^2},$$

wo α den Polarisationswinkel, B den Sinus, und D den Cosinus des Winkels zwischen dem Einfallsloth und der optischen Axe vorstellt, und wo die Geschwindigkeit des Lichts (also auch das Brechungsverhältnifs) im umgebenden Mittel $=1$ vorausgesetzt ist.

Für den Fall, dafs die reflektirende Ebene der Axe parallel ist, wird $\tang\alpha = \frac{1}{\mu}$; der gewöhnlich gebrochene Strahl steht alsdann auf den reflektirten senkrecht, und der Polarisationswinkel ist daher dem an einfachbrechenden Mitteln gleich, deren Brechungsverhältnifs das des gewöhnlichen Strahls des Krystalls ist.

Für den Fall, dafs die reflektirende Ebene auf der optischen Axe senkrecht steht, ist $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cotg\alpha''\sin^2\alpha'$, wo α' der Brechungswinkel des gewöhnlichen Strahls, und

α'' der Brechungswinkel des zum ungewöhnlichen Strahl gehörenden ebenen Wellensystems ist.

Im Allgemeinen giebt es für jede Lage der reflektirenden Fläche 4 Lagen der Einfalls-Ebene, in denen die Polarisationswinkel einander gleich sind, nämlich in je zwei Ebenen, welche, zu beiden Seiten des Hauptschnitts liegend, mit demselben gleiche Winkel machen, und zwar auf beiden Seiten des Einfallslothes. Dreht man daher den Krystall bei unveränderter Lage des auffallenden Strahls und des Einfallslothes, so ist während einer vollständigen Umdrehung das reflektirte Licht 4 Mal vollkommen polarisirt, und zwar so, dafs, wenn das Azimuth der Einfalls-Ebene das eine Mal a ist, die Polarisation von Neuem vollständig wird in den Azimuthen $180-a$, $180+a$ und $360-a$.

Ist das umgebende Mittel Luft, oder sonst ein Mittel, dessen Brechungsverhältnifs stark von denen des Krystalls abweicht, so ist der Polarisationswinkel nahe dem eines unkrystallinischen Mediums gleich, dessen Brechungsverhältnifs dem des gewöhnlichen Strahls gleich ist, d. h. der gebrochene Strahl steht nahe auf dem reflektirten senkrecht.

Die Uebereinstimmung ist vollkommen in 4 Azimuthen der Einfalls-Ebene, welche bestimmt sind durch die Gleichung $\cos a = \pm \frac{D}{B} \mu$.

Es haben dieselben eine solche Beziehung zu den gebrochenen Strahlen, dafs bei zweien dieser Azimuthe die Schwingungen in dem ungewöhnlichen Strahl senkrecht gegen die Einfalls-Ebene gerichtet sind, während bei den zwei anderen die Axe senkrecht steht auf einer Linie in der Einfalls-Ebene, welche mit dem Einfallsloth den Winkel $90-\alpha'$ bildet (unter α' den Brechungswinkel des gewöhnlichen Strahls verstanden).

Was die Ablenkung der Polarisations-Ebene betrifft, so ist die Tangente derselben gleich dem Produkt aus der Tangente des Azimuths der Polarisations-Ebene des gewöhnlich gebrochenen Strahls und dem Cosinus der Summe

des Reflexions- und des Brechungswinkels des gewöhnlichen Strahls, d. h. wenn φ die Ablenkung, und $90-\varepsilon'$ das eben genannte Azimuth bedeutet,

$$tg\,\varphi = cotg\,\varepsilon' \cos(\alpha+\alpha').$$

Steht die reflektirende Fläche auf der optischen Axe senkrecht, so findet gar keine Ablenkung statt. Auf jeder anders liegenden Fläche giebt es im Allgemeinen 4 Richtungen der Einfalls-Ebene, in denen keine Ablenkung erfolgt, nämlich 1) wenn das Licht in der Ebene des Hauptschnittes einfällt, diesseits oder jenseits des Einfallslothes; 2) in den beiden Richtungen für die $\cos a = -\frac{D}{B}\mu$ ist, welches eintritt, wenn die Axe lothrecht auf derjenigen Linie in der Einfalls-Ebene steht, welche mit dem Einfallsloth einen Winkel $90-\alpha'$ bildet.

Die beiden letzteren Richtungen der Einfalls-Ebene fallen in eine zusammen, indem sie sich gegen den Hauptschnitt senkrecht stellen, wenn die reflektirende Fläche der Axe parallel ist. Mit zunehmender Neigung der Fläche gegen die Axe nähern sich die beiden Richtungen dem Hauptschnitt; und sie fallen endlich mit demselben zusammen, so dafs es nur eine einzige Richtung ohne Ablenkung giebt, sobald jene Neigung eine bestimmte Gröfse überschreitet, nämlich von da ab, wo die Tangente derselben $\left(\frac{D}{B}\right)$ gleich $\frac{1}{\mu}$ wird.

Es sei $egbh$ (Fig. 35.) die reflektirende Ebene, eb der Durchschnitt des Hauptschnittes; die Axe liege so, dafs sie mit einer durch b gehenden und mit be einen spitzen Winkel bildenden unterhalb der Fläche liegenden Linie bx parallel ist. Alsdann ist $\cos ebx = B$, $\sin ebx = D$. Ferner möge a der Einfallspunkt sein, und die Azimuthe der Einfalls-Ebene (welche wie z. B. am, ag, ad durch a gehen) mögen von b nach g herum gezählt, positiv heifsen, von b nach h herum gezählt negativ. Endlich sei $\cos bad = -\frac{D}{B}\mu$,

ter μ die Geschwindigkeit des gewöhnlichen Strahls verunden, und $\angle dab = \angle cab$. Alsdann sind *ab*, *ad*, *ae*, *ac* e Richtungen ohne Ablenkung.

Liegt die Einfalls-Ebene zwischen *ab* und *ad*, so gehieht die Ablenkung immer nach der einen Seite, zwischen *d* und *ae* dagegen nach der entgegengesetzten Seite hin.

Es giebt daher zwischen *ab* und *ad*, und zwischen *ad* nd *ae* eine Richtung der gröfsten Ablenkung; die erste ei *am*, die zweite *as*. Ist nun $ebx = 0$, also *eb* die Axe elbst, so fällt *ad* in eine Richtung *ag*, welche auf *eb* senkecht steht, es wird $\angle mab = 45^0$, $\angle sab = 135^0$, und wähnd $\angle ebx$ von 0^0 bis 90^0 wächst, wandert *am* nach *ag*, nd *as* nach *ae* hin. In *ae* selbst verschwindet dasselbe, ı *ae* eine Richtung ohne Ablenkung ist. Ist $\frac{B}{D} = \mu$, so t $mab = 60^0$, *ad* fällt in *ae*, und es giebt nur die eine ichtung *eb* ohne Ablenkung, und eine Richtung *am* gröfsr Ablenkung. Ist $\frac{B}{D} < \mu$, wächst also $\angle ebx$ noch weiter, ı bleibt *be* die einzige Richtung ohne Ablenkung und *am* ht der Grenze *ag* zu.

Jedenfalls beträgt aber die Ablenkung stets nur wenige rade, wenn das umgebende Mittel Luft oder eine Subanz ist, deren Brechungsverhältnifs stark von denen des rystalls abweicht. Ist dagegen der Unterschied der breıenden Kräfte nur gering, so nehmen nicht nur die Unrschiede der Ablenkung stark zu, sondern auch die Unrschiede der Polarisationswinkel. Liegt das Brechungsrhältnifs des umgebenden Mittels (welches *n* heifsen möge) vischen dem des gewöhnlichen und dem des gegen die ce senkrecht gerichteten ungewöhnlichen Strahls (d. h. zwihen $\frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{\pi}$), so giebt es auf vielen Flächen und in elen Azimuthen gar keinen Polarisationswinkel. Liegt z. B. gerade in der Mitte zwischen $\frac{1}{\pi}$ und $\frac{1}{\mu}$, so giebt es auf len denjenigen Flächen keinen Polarisationswinkel, für

welche (Fig. 35.) $\angle ebx$ zwischen 45° und 90° liegt; und auf den übrigen Flächen giebt es deren nur für Azimuthe welche zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sind. Ist die Fläche z. B. der Axe parallel, so ist durch Reflexion keine vollständige Polarisation möglich für die Azimuthe von 0° bis zu einem nahe an 45° betragenden. In dem Azimuthe 0° giebt es nur Polarisationswinkel an den Flächen für welche $B^2 - D^2 < 1 - n^2 \pi^2$, während in den verschiedenen Lagen dieser begrenzten Flächenzahl derselbe alle Werthe von 0° bis 90° durchläuft.

Ist n genau gleich $\frac{1}{\mu}$, so wird das Licht für jeden Einfallswinkel und in jedem Azimuth vollständig polarisirt.

Reflexion des polarisirten Lichtes an einaxigen Krystallen.

Fällt schon polarisirtes Licht auf den Krystall, so ist das reflektirte Licht im Allgemeinen nach einer andern Ebene polarisirt, als das einfallende. Der Winkel zwischen beiden Polarisations-Ebenen heifst die Drehung der Polarisations-Ebene.

Es findet keine Drehung statt: 1) auf der gegen die optische Axe senkrechten Fläche, 2) wenn das Licht in der Ebene des Hauptschnitts einfällt, 3) für einen bestimmten Einfallswinkel auf jeder andern Fläche und in einem jeden anderen Azimuth.

Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, so findet das letztere bei demjenigen Einfallswinkel statt, für welchen $tang\,\alpha' = \frac{B}{D} cos\,a$ ist; ist es nach der Einfalls-Ebene polarisirt, so findet es für $tang\,\alpha' = -\frac{B}{D} cos\,a$ statt. Diese Einfallswinkel sind daher in den Azimuthen gleich, welche sich zu 180° ergänzen.

Wenn das Licht unter dem Polarisationswinkel einfällt, so ergänzt die Drehung, welche die Polarisations-

Ebene erleidet, wenn dasselbe nach den Einfalls-Ebenen polarisirt war, diejenige Drehung zu 90°, welche senkrecht auf die Einfalls-Ebene polarisirtem Einfallslicht entspricht.

Endlich giebt es jederzeit eine Ebene, nach welcher unter dem Polarisationswinkel einfallendes Licht polarisirt sein mufs, wenn gar kein Licht reflektirt werden soll.

Intensität der durch die Doppelbrechung einaxiger Krystalle erzeugten Bilder.

In dem vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dafs in einaxigen Krystallen die Polarisations-Ebene der gewöhnlichen Well-Ebene durch deren Normale und die Axe geht, die der ungewöhnlichen Well-Ebene dagegen senkrecht auf der durch die Axe und der durch die Normale der letztern gehenden Ebene steht. Da nun beide Normalen in der Brechungs-Ebene liegen, so stehen die beiden Polarisations-Ebenen nur dann genau auf einander senkrecht, wenn die Axe in der Brechungs-Ebene liegt, d. h. wenn die Einfalls-Ebene mit dem Hauptschnitt zusammenfällt. In diesem Fall stehen auch die Polarisations-Ebenen beider Strahlen auf einander lothrecht, da der gewöhnliche Strahl mit seiner Normale zusammenfällt, und der ungewöhnliche Strahl mit seiner Normale und der Axe sich in einer Ebene befindet.

Ferner wurde gezeigt, dafs in doppelbrechenden Mitteln statt der zwei Lichtwellensysteme, welche im Allgemeinen durch Störung des Gleichgewichts des Aethers entstehen, nur dann ein einziges System sich bildet, wenn die anfängliche Schwingung (welche bei der Brechung die im Einfallspunkt ausgeführte Vibration ist) einer der Polarisationsrichtungen derselben parallel ist, oder insofern die nach der Richtung des Strahls gerichteten Schwingungen als unwirksam angenommen sind, wenn die ursprünglichen Vibrationen in der Polarisations-Ebene eines der beiden Systeme geschehen.

Da man nun die natürlichen (unpolarisirten) Lichtstrahlen als solche ansehen kann, in denen die (schnell aufeinanderfolgenden) Schwingungen nach allen Richtungen hin ohne Unterschied geschehen, so kann nie einer der beiden gebrochenen Strahlen verschwinden, wenn unpolarisirtes Licht auf ein doppelbrechendes Medium fällt. Da aber bei der Brechung an einfachbrechenden Mitteln der gebrochene Strahl eine Disposition zeigt, sich senkrecht gegen die Einfalls-Ebene zu polarisiren, so könnte man schliefsen, dafs sich die Schwingungen bei der Brechung an doppelbrechenden Krystallen nicht ganz gleichmäfsig in dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen Wellensysteme vertheilen, und dafs dies nur dann geschehen dürfte, wenn die Einfalls-Ebene den Winkel zwischen beiden Polarisations-Ebenen halbirt. Dies wird auch durch die Rechnung bestätigt; allein die Differenzen zwischen den Intensitäten beider Strahlen, also auch zwischen den Intensitäten des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Bildes, sind so gering, dafs es nicht auffallen kann, wenn sie der Beobachtung entgehen.

Ein äufseres Kennzeichen des unpolarisirten Lichts ist daher die gleiche Intensität der durch einen doppelbrechenden Krystall gesehenen Bilder.

Ist dagegen das einfallende Licht polarisirt, und zwar so, dafs die Schwingungen im Einfallspunkt einer der Polarisations-Ebenen der gebrochenen Wellensysteme parallel ist, so verschwindet der eine Strahl, und es bleibt beim Hindurchsehen durch einen solchen Krystall nur e i n Bild sichtbar.

Dieser Fall tritt ein: 1) falls das Licht in der Ebene des Hauptschnittes einfällt, wenn dasselbe nach der Einfalls-Ebene oder senkrecht darauf polarisirt ist, da alsdann das gewöhnliche Wellensystem nach dem Hauptschnitt, das ungewöhnliche senkrecht darauf polarisirt ist. Es verschwindet daher das ungewöhnliche Bild, wenn das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene, das gewöhnliche Bild, wenn dasselbe senkrecht auf diese Ebene polarisirt ist. 2) Falls

das

as Licht senkrecht auf die brechende Ebene fällt, wenn s nach dem Hauptschnitt oder senkrecht darauf polarisirt st; in jenem Falle verschwindet das ungewöhnliche, in diesem Falle das gewöhnliche Bild. 3) Falls das Licht schief und nicht in der Ebene des Hauptschnittes einfällt, giebt es stets zwei sich um 180° von einander unterscheidende Azimuthe der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls, für welche der ungewöhnliche, und zwei ebensolche, für welche der gewöhnliche Strahl verschwindet.

Dreht sich daher die Polarisations-Ebene des Einfallsstrahls, während derselbe eine unveränderte Richtung gegen die Krystallfläche behält, so sieht man während einer vollständigen Drehung, wenn man der Farbenzerstreuung wegen die Austrittsfläche der Eintrittsfläche parallel nimmt, in vier Stellungen nur ein Bild, und beim Uebergang aus einer dieser Stellungen in die andere die Helligkeit des in der zweiten Stellung verschwindenden Bildes abnehmen, die des anderen Bildes bis zu ihrem Maximum zunehmen.

Bei senkrechter Incidenz läfst sich dies dadurch bewerkstelligen, dafs man den Krystall um den einfallenden polarisirten Strahl dreht. Da in dem letzten Fall die Polarisations-Ebenen beider Strahlen auf einander senkrecht stehen, so beträgt der Drehungswinkel vom Verschwinden des einen Bildes bis zum Verschwinden des andern genau 90°. Man kann diesen Wechsel der Intensität beider Bilder während der Drehung des Krystalls benutzen, um zu untersuchen, ob Licht polarisirt oder unpolarisirt ist.

Legt man zwei von parallelen Flächen begrenzte Krystallstücke über einander, so dafs auf das zweite zwei senkrecht auf einander polarisirte Strahlen lothrecht auffallen, so sieht man im Allgemeinen vier durch die Theilung eines jeden derselben erzeugte Bilder von (paarweise) verschiedener Intensität, welche sich auf zwei reduciren: 1) wenn die Hauptschnitte beider Stücke parallel sind (weil wegen der Parallelität der Polarisations-Ebenen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen unter sich der gewöhnliche Strahl nur gewöhnlich, der ungewöhnliche Strahl nur un-

gewöhnlich gebrochen wird); 2) wenn die Hauptschnitte sich senkrecht kreuzen, weil sich alsdann auch die correspondirenden Polarisations-Ebenen senkrecht kreuzen, und daher der gewöhnliche Strahl nur ungewöhnlich, der ungewöhnliche nur gewöhnlich gebrochen wird.

Die Polarisirung des Lichts durch Brechung in einem doppelbrechenden Krystall benutzt man, um sich einen einzelnen polarisirten Lichtbündel zu verschaffen, indem man auf folgende Weise den zweiten Lichtbündel am Durchgange hindert. Man bildet ein Parallelepiped *abdc* (Fig. 36.) aus zwei nach bestimmten Richtungen geschnittenen Kalkspathstücken *abc* und *bdc*, welche in der Fläche *cb* durch Canada-Balsam, dessen Brechungsverhältnifs zwischen dem des gewöhnlichen und dem Hauptbrechungsverhältnifs des ungewöhnlichen Strahls des Krystalls liegt, zusammengekittet sind. Den Flächen *ab* und *bc* giebt man eine solche Lage gegen die Axe, dafs von den beiden Strahlen, in welche ein auf *ab* parallel mit der Axe des Parallelepipeds auffallender Strahl getheilt wird, der gewöhnliche, in *cb* vermöge der schwächeren Brechungskraft des Balsams total reflektirt, nicht in die zweite Hälfte *cbd* dringt, während dadurch, dafs man die Hauptschnitte beider Hälften parallel nimmt, eine Doppelbrechung des anderen Strahls an *cd* verhindert wird *). Eine solche Vorrichtung heifst nach ihrem Erfinder Nicol'sches Prisma.

Man kann mittelst desselben die oben angeführte Erscheinung des Intensitätswechsels der Bilder eines doppelbrechenden Krystalls bei schiefer Incidenz untersuchen, indem man das Licht vor dem Eintritt in denselben durch das Prisma gehen läfst, und durch Umdrehung des letzteren um den Strahl der Polarisations-Ebene jede beliebige Richtung giebt.

Hält man in die Richtung eines Lichtstrahls zwei Nicol'sche Prismen hinter einander so, dafs sich ihre Hauptschnitte senkrecht kreuzen, so wird der ungewöhnliche Licht-

*) Man sehe das Nähere darüber im Anhang.

strahl *), welcher allein das erste durchdringen kann, weil er im zweiten gewöhnlich gebrochen wird, in diesem letzteren total reflektirt, und die Prismen erscheinen für ein dahinter befindliches Auge undurchsichtig.

Das Prisma liefert ferner ein sehr bequemes Mittel, die Polarisations-Ebene eines Lichtstrahls zu bestimmen. Leitet man nämlich das zu untersuchende Licht durch dasselbe, und dreht es bis es undurchsichtig erscheint, so ist die Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls dem Hauptschnitt des Prisma's parallel.

Unregelmäfsige Bilderzahl.

Wenn in durchsichtigen Krystallen Schichten einer fremden Substanz oder derselben Substanz, aber mit anders liegender Axe, sich befinden, so kann durch die hinzutretenden Brechungen und Reflexionen im Innern in gewissen Fällen eines der Bilder scheinbar verschwinden, in andern Fällen die Zahl der Bilder vermehrt werden.

Denken wir uns zuvörderst einen Krystall von einer Schicht einer unkrystallinischen Substanz durchzogen, welche von parallelen Ebenen begrenzt ist, und gleiches Brechungsvermögen mit dem gewöhnlichen Strahl des Krystalls hat, so wird bei dem Durchgange des Lichts der gewöhnliche Strahl weder von seiner Bahn abgelenkt, noch merklich geschwächt, sobald nur die fremde Substanz vollkommen durchsichtig ist; der ungewöhnliche Strahl wird dagegen nicht sowohl abgelenkt, als durch partielle Reflexion an den beiden Grenzen der Schicht geschwächt, und zwar um so mehr, je schiefer die Incidenz ist. Befinden sich mehr solcher Schichten in dem Krystall, so wird der Lichtverlust des ungewöhnlichen Bildes noch bedeutender und kann unter ungünstigen Umständen fast ganz verschwinden. Ein

*) Die Prismen sind nämlich so geschnitten, dafs ihre Axe (die in der Figur parallel ac ist) in dem Hauptschnitt liegt, das Licht also in der Ebene des Hauptschnittes einfällt.

solcher Fall tritt beim Achat ein, der von einer grofsen Zahl sehr dünner Lamellen durchzogen ist, welche sich mit einer Loupe leicht wahrnehmen lassen, und welche nicht von Ebenen, sondern von wellenförmigen Flächen begrenzt sind — ein Umstand, welcher durch die zahlreichen unregelmäfsigen Reflexionen unter allen möglichen Incidenzen, statt des ungewöhnlichen Bildes, z. B. einer Lichtflamme, einen Lichtnebel erzeugt, welcher das gewöhnliche Bild umgiebt. Davon, dafs dieser Lichtschein der Ueberrest des ungewöhnlichen Bildes ist, überzeugt man sich, wenn man denselben durch ein in einer solchen Stellung gehaltenes Nicol'sches Prisma betrachtet, in welcher das gewöhnliche Bild seine gröfste Helligkeit hat. Der Nebel ist alsdann verschwunden, und enthält, da die Polarisations-Ebene des Nicols alsdann der des gewöhnlichen Bildes der Flamme parallel ist, nur senkrecht gegen die letztgenannte Ebene polarisirtes Licht. Dreht man das Nicol um 90°, so verschwindet das scharf begrenzte gewöhnliche Bild, während das verworrene ungewöhnliche Licht seine gröfste Stärke erlangt. — Diese Eigenschaft, das eine Bild fast gänzlich zu vernichten, macht den Achat geeignet, die Stelle eines Nicol'schen Prisma's zu vertreten.

Ist die eingewachsene Lamelle von der Substanz des Hauptkrystalls, unterscheidet sie sich aber von demselben durch die Lage der Axe, so wird jeder der beiden gebrochenen Strahlen, in welche sich das einfallende Licht theilt, beim Eintritt in die Lamelle von neuem doppelt gebrochen. Ist aber die Lamelle sehr dünn, so ist die Divergenz dieser von Neuem getheilten Strahlen so gering, dafs man sie als zwei einfache betrachten kann, welche aus Theilen bestehen, die nach verschiedenen Ebenen polarisirt sind. Beim Austritt aus der Lamelle trennt sich aber jeder dieser Doppelstrahlen vermöge der Verschiedenheit der Polarisations-Ebenen in zwei andere, so dafs der übrige Theil des Krystalls von zwei gewöhnlich und von zwei ungewöhnlich gebrochenen Strahlen durchlaufen wird. Nennt man den beim Eintritt in den Krystall gewöhnlich gebrochenen Strahl *O*,

den ungewöhnlichen *E*; nennt man ferner von den beiden Strahlen, in welche *O* beim Austritt aus der Lamelle getheilt wird, *OO* den gewöhnlichen, *OE* den ungewöhnlichen; und ebenso *EO* den gewöhnlichen, *EE* den ungewöhnlichen der beiden aus *E* entspringenden Strahlen: so mufs *OO* parallel mit *O*, und *EE* parallel mit *E* sein, und es werden daher sowohl *OO* als *EE* nach dem Austritt aus dem Krystall dem einfallenden Strahl parallel. Ist der Krystall nicht sehr dick, so werden sich aus diesem Grunde, namentlich wenn die Strahlen den Krystall in der Nähe der Axe durchlaufen, *OO* und *EE* zu einem einzigen Bilde vereinigen. Die Strahlen *OE* und *EO* dagegen verlassen den Krystall in abweichenden Richtungen und geben zwei Bilder, welche zu beiden Seiten des vorbenannten Doppelbildes liegen. Je mehr man den Krystall gegen den einfallenden Strahl neigt, desto mehr werden sich die Seitenbilder von dem Centralbilde entfernen. — Ein solcher Fall tritt nicht selten beim Kalkspath ein, welcher zuweilen von Lamellen durchzogen wird, die derjenigen Ebene parallel sind, welche durch die längeren Diagonalen *) zweier gegenüberstehenden Rhomboëderflächen gehen. Von den drei Bildern, welche durch das Dazwischentreten einer einzigen Lamelle gebildet werden, ist das mittlere allemal das intensivste. Betrachtet man die Bilder durch ein Nicol'sches Prisma, so findet man, dafs in einer Stellung desselben das eine Seitenbild, in der darauf senkrechten Stellung das andere Seitenbild verschwindet, während die übrigbleibenden zwei Bilder fast gleich intensiv werden — ganz so, wie es der obigen Erklärung zufolge eintreten mufs.

---

*) Eine der gewöhnlichsten Formen, in denen der Kalkspath vorkommt, ist die eines stumpfen Rhomboëders, d. h. eines Parallelepipeds, welches von Rhomben begrenzt ist, und in welchem in zwei gegenüberstehenden Ecken alle drei Kanten in (gleichen) stumpfen Winkeln zusammenstofsen. Die optische Axe ist der Verbindungslinie dieser beiden Ecken parallel. In Fig. 37. stellt *cadb* das Rhomboëder vor, in welchem, wenn *a* und *b* die stumpfen Ecken sind, die Lamellendurchgänge der Ebene *cedf* parallel sind.

Eigenthümlichkeit des Bergkrystalls und der circular-polarisirenden Flüssigkeiten.

Von dem Gesetz, dafs in einem senkrecht gegen die Axe geschnittenen einaxigen Krystall bei senkrecht auffallendem Lichte der gewöhnliche und ungewöhnliche Strahl mit gleicher Geschwindigkeit die Richtung der Axe durchläuft, und demnach einfach und mit unveränderter Polarisations-Ebene heraustritt, macht der Bergkrystall eine Ausnahme, indem das austretende Licht mehr oder weniger seine Polarisations-Ebene geändert hat. Das Licht verhält sich also so, als ob es in der Richtung der Axe sich in zwei kreisförmig polarisirte Strahlen theile, welche sich mit ungleicher Geschwindigkeit, aber so bewegen, dafs der Gangunterschied der auf einander senkrechten Componenten beim Austritt eine halbe Wellenlänge beträgt.

Einige Individuen drehen die Polarisations-Ebene nach der einen, andere nach der andern Seite. Nach dieser Verschiedenheit, welche sich auch in der Krystallgestalt kund giebt *), theilt man diese Krystalle in rechtsdrehende und linksdrehende.

Die Zerlegung des Lichts in zwei kreisförmig polarisirte Strahlen läfst sich auf folgende Art denken:

Man stelle sich den einfallenden linear-polarisirten Strahl, dessen Intensität I^2 sei, als aus zwei senkrecht auf einander polarisirten, in gleicher Phase befindlichen Strahlen entstanden vor, welche von gleicher Intensität, $\frac{1}{2}I^2$, sind, mithin in der Art, dafs der Winkel zwischen den Polarisations-Ebenen von der primitiven Polarisations-Ebene halbirt wird. Jede der Componenten denke man sich wiederum in zwei andere nach derselben Ebene polarisirte Strahlen zerlegt, deren Intensität $\frac{1}{4}I^2$ ist, und von denen der eine um $\frac{1}{8}$ Wellenlänge vor der betreffenden Componente voraus, der andere um $\frac{1}{8}$ Wellenlänge zurück ist **).

---

*) Man sehe darüber den Anhang.

**) Die Richtigkeit dieser Zerlegung ergiebt sich aus Abschn. I, p. 144. Setzt man nämlich in (XXIV.) $\xi_1'^2 = \xi_2''^2 = \frac{1}{4}I^2$, und den Phasenunter-

Nennt man die zwei voraneilenden Wellensysteme mit den auf einander senkrechten Polarisations-Ebenen A_1 und A_2, und die nachfolgenden, um $\frac{1}{4}$ Undulation gegen dieselben zurückbleibenden B_1 und B_2, so werden die Wellensysteme A_1, B_1, A_2, B_2 bleibend einen einzigen linearpolarisirten Strahl bilden, so lange dieselben gleiche Geschwindigkeit behalten. Bekommen aber beim Eintritt in den Krystall A_1 und B_2 eine andere Geschwindigkeit als A_2 und B_1, so trennen sich die Componenten und bilden zwei Strahlen, in der Art, dafs A_1 und B_2 (die um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge von einander abweichen) auf der einen Seite, und A_2 und B_1 auf der andern Seite einen kreisförmig polarisirten Strahl bilden (siehe p. 35.). Diese beiden Strahlen sind von entgegengesetzter Drehung, d, h. wenn in dem einen die Moleküle ihre Gleichgewichtslage von rechts nach links umkreisen, umkreisen sie in dem andern Strahl dieselbe von links nach rechts *). Nach dem Austritt, wo

schied β der Componenten, wie er oben vorausgesetzt ist, gleich $\frac{1}{2}\pi$, so findet man $u^2 = \frac{1}{2}I^2$, und aus (XXV.) für den Phasenunterschied γ der Resultanten $tang\gamma = 1$, also $\frac{1}{8}$ Undulation.

*) Um sich diese links- und rechts-drehende circulare Bewegung zu veranschaulichen, denke man sich (Fig. 38.) die Schlangenlinie AB, welche in einer horizontalen Ebene sich befinden mag, als den Ort der Moleküle des Strahls BA zur Zeit t, vermöge der Bewegung des Systems A_1, und die Schlangenlinie CD (welche in der verticalen Ebene so liege, dafs die stark punktirten Theile oberhalb, die schwach punktirten unterhalb der gedachten Horizontal-Ebene sich befinden), als den Ort der Moleküle vermöge der Bewegung im Systeme B_2. Das während der Ruhe in a' befindliche Theilchen befindet sich alsdann, wenn die Bewegungen beider Systeme gleichzeitig wirken, da es vermöge der Bewegung in B_2 in a' bleibt, in a, also für ein von B nach A hinsehendes Auge in seiner gröfsten Ausweichung nach rechts. Aus gleichem Grunde befindet sich das Theilchen b' in seiner gröfsten Ausweichung nach oben, nämlich in b; das Theilchen c' in c in seiner gröfsten Ausweichung nach links; und das Theilchen d' in d in seiner tiefsten Lage. Man sieht sogleich, dafs die zwischen a' und b', b' und c', c' und d' etc. liegenden Theilchen zwischen a und b, b und c, c und d etc. auf der Oberfläche eines Cylinders sich befinden werden, dessen Axe AB, und dessen Radius $a'a$ ist, so dafs die Theilchen, welche im Zustande der Ruhe in einer geraden Linie lagen, in einer rechts ge-

die Geschwindigkeiten wiederum gleich werden, vereinigen sich die Systeme A_1 und B_1, und A_2 und B_2 zu zwei auf einander senkrecht polarisirten, und diese wiederum zu einem einzigen, dessen Polarisations-Ebene sich nach dem

---

wundenen Spirale liegen. Läſst man die Zeit wachsen, so wendet sich, wenn die Bewegung des Lichts von B nach A hingeht, a nach oben, und c nach unten, und die übrigen Punkte gerade so, als ob die Spirale für ein in B befindliches Auge nach links hin herumgedreht wird (d. h. so wie sich die Spirale eines Korkziehers bewegt, wenn man denselben aus einem Kork zurückdreht). Die Theilchen bewegen sich also von oben rechts nach unten links, und das Licht ist, wie man sich ausdrückt, links circular polarisirt. Man sieht, daſs die Bedingung der links-circularen Polarisation ist, daſs sich die Theilchen vermöge des horizontal-polarisirten Wellensystems nach rechts hin von der Axe AB zu entfernen, während sie sich vermöge des vertikal-polarisirten Wellensystems von oben nach unten dieser Axe zu nähern streben. Rechts circular wird daher die Polarisation, wenn sie sich dabei vermöge des letzteren Systems von oben nach unten von dieser Axe entfernen wollen (also wenn man sich die schwach punktirten Bogen der Figur nach oben, die stark punktirten nach unten sich gewendet denkt).

Denkt man sich die Bewegungen wie vorher, d. h. liegen die stark punktirten Theile nach oben, so geht die linksdrehende Bewegung in eine rechtsdrehende über: 1) wenn der Punkt a' des vertikalen Systems nach c' zurückgerückt wird, d. h. wenn der Gangunterschied nicht mehr $\frac{1}{4}$, sondern $\frac{3}{4}$ Wellenlängen ist; 2) wenn der Punkt c' desselben Systems nach a' hinrückt, d. h. wenn dieses System, statt $\frac{1}{4}$ Undulation zurück zu sein, $\frac{1}{4}$ Undulation voraus ist. Letzteres ist der Fall bei dem zweiten kreisförmig polarisirten Strahl, welcher von den Systemen A_2 und B_1 gebildet wird. Man bezeichne durch pA_1, pA_2, rB_1, rB_2 (Fig. 39.) beziehlich die Ankunftsörter der Systeme A_1, A_2, B_1, B_2 (von denen A_2 und B_2 vertikal polarisirt sein mögen) zur Zeit des Eintritts in den Krystall, so daſs also pr eine Viertel-Wellenlänge ist. Im Krystall erhalten die Systeme A_1 und B_2 eine andere Geschwindigkeit als A_2 und B_1; sind jene die schnelleren, so können die relativen Ankunftsörter der Systeme A_1, A_2, B_1, B_2 zu irgend einer Zeit in dem Krystall etwa beziehlich oA_1', pA_2, rB_1, qB_2' sein. Das horizontal-polarisirte System A_1 des schnelleren kreisförmig polarisirten Strahls ist alsdann dem vertikalen (qB_2') voraus; das horizontale rB_1 des langsameren kreisförmig polarisirten Strahls dagegen ist gegen das vertikale qB_2' zurück.

Den Unterschied zwischen entgegengesetzt drehenden Bergkrystall-Individuen kann man sich demnach als darin bestehend vorstellen, daſs man in den einen sich den rechts-circularen Strahl als den schnelleren, in den andern als den langsameren denkt.

Phasenunterschiede der Componenten richtet *), und rechts oder links von der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls liegt, je nachdem das voraneilende System rechts oder links drehend circular polarisirt ist.

Dafs die in der Richtung der Axe sich bewegenden (gewöhnlichen und ungewöhnlichen) Strahlen ungleiche Geschwindigkeit besitzen, bewies Fresnel durch folgenden Fundamental-Versuch.

Er verband ein dreiseitiges aus Bergkrystall geschnittenes Prisma *dbe* (Fig. 40.), dessen brechender Winkel 152° war, mit zwei anderen von entgegengesetzter Dre-

---

*) Dafs der austretende Strahl linear-polarisirt sein, d. h. dafs der Gangunterschied der auf einander senkrechten Componenten eine ganze Zahl halber Wellenlängen betragen mufs, läfst sich so beweisen:

Es sei der aus A_1 und B_2 sich bildende kreisförmig polarisirte Strahl der schnellere, und dem anderen beim Austritt um $\frac{x}{2\pi}$ Wellenlängen vorausgeeilt. Alsdann ist $90+x$ der Phasenunterschied der Systeme A_1 und B_1, und $90-x$ der von A_2 und B_2; und wenn γ' der Phasenunterschied des Systems B_1 und des aus A_1 und B_1 resultirenden Systems, und γ'' der Phasenunterschied des Systems B_2 und des aus A_2 und B_2 resultirenden Systems ist, so hat man nach Abschn. I, XXV:

$$tg\gamma' = \frac{\cos x}{1-\sin x} \text{ und } tg\gamma'' = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

Sind ferner C_1^2 und C_2^2 die Intensitäten der Systeme A_1+B_1 und A_2+B_2, so ist, wenn man den Verlust an bewegender Kraft durch die partielle Reflexion vernachlässigt, nach Abschn. I, XXIV $C_1^2 = \frac{1}{2}I^2(1-\sin x)$ und $C_2^2 = \frac{1}{2}I^2(1+\sin x)$. Der Phasenunterschied der Systeme C_1 und C_2 ist aber $\gamma'-\gamma''-x$, folglich da $tg(\gamma'-\gamma'') = tang\, x$ ist, $\gamma'-\gamma'' = a\pi+x$ und $\gamma'-\gamma''-x = a\pi$, d. h. der Phasenunterschied der auf einander senkrechten Componenten beim Austritt ist einer ganzen Zahl halber Undulationen gleich und das resultirende System ist linear polarisirt.

Ist φ der Winkel zwischen der Polarisations-Ebene des austretenden Lichts und der des Systems C_1, so ist

$$tg\varphi = \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = tg(45+\tfrac{1}{2}x),$$

also wenn man den Winkel, um welchen die Polarisations-Ebene des einfallenden Lichts bei dem Austritt gedreht worden ist, p nennt, so hat man da $p = 45^0-\varphi$ ist, $tgp = tg\frac{1}{2}x$, d. h. die Drehung ist dem halben Phasenunterschiede gleich.

hung *abd* und *bce* zu einem rechtwinkligen Parallelepiped dergestalt, dafs in allen drei Prismen die Axe der Kante *de* des Parallelepipeds parallel ist; leitete senkrecht auf die Fläche *ad* das Licht, so dafs, wenn es die Richtung *op* hat, ungetheilt und ohne die Richtung zu ändern in *q* anlangt, in *q* sich aber wegen der schiefen Incidenz, wenn Verschiedenheit in der Geschwindigkeit existirte, spalten mufste. In diesem Fall mufste der langsamere Strahl, welcher im entgegengesetzt drehenden Prisma *abd* der schnellere war, abwärts etwa nach *r* hin; der schnellere, welcher vorher der langsamere war, aufwärts etwa nach *s* hin gebrochen werden. An der zweiten schiefen Fläche *be* mufste der beschleunigte Strahl *qs* an Geschwindigkeit verlieren, und demnach noch mehr aufwärts etwa nach *t* hin, der andere *qr* an Geschwindigkeit gewinnend, noch mehr abwärts etwa nach *u* hin gebrochen werden; dergestalt, dafs auch bei ursprünglich schwacher Divergenz, eine merkliche Trennung der Bilder möglich wurde. Es traten in der That zwei Strahlen heraus, welche sich entgegengesetzt circular polarisirt zeigten, indem der eine nach einer doppelten Totalreflexion in einem Glasparallelepiped im Azimuth $+45^0$, der andere im Azimuth -45^0 linear polarisirt hervortrat. Bei der geringsten Abweichung von der Parallelität der Axen vervielfältigten sich die Bilder. Läfst man circular polarisirtes Licht auffallen, so kann keine Theilung des Lichts eintreten, und es erscheint daher nur ein Bild.

Die Drehung der Polarisations-Ebene ist dem halben Phasenunterschiede der beiden kreisförmig polarisirten Strahlen gleich. Wären nun die Geschwindigkeitsunterschiede derselben für die verschiedenen Farben der Wellenlänge proportional, so müfste die Drehung für alle Strahlen dieselbe sein, und eine Bergkrystallplatte müfste undurchsichtig erscheinen, wenn man weifses linear polarisirtes Licht auf dieselbe leitete, und dasselbe nach dem Austritt mit einem Nicol'schen Prisma auffinge, dessen Durchgangs-Ebene, wenn *p* der Drehungswinkel ist, mit der ursprünglichen Polarisations-Ebene einen Winkel $90^0 + p$ oder

$90^\circ - p$ bildet, je nachdem der Krystall rechts oder links drehend ist.

Wären dagegen die Geschwindigkeitsunterschiede der circular polarisirten Strahlen für alle Farben einander gleich, so müſsten sich die Drehungen umgekehrt wie die Wellenlängen verhalten. Sie verhalten sich aber nach einem Gesetz, welches Biot aus seinen Messungen abstrahirte, umgekehrt wie die Quadrate der Wellenlängen; also müssen die Geschwindigkeitsunterschiede, falls dieses Gesetz streng richtig ist, in umgekehrtem Verhältniſs der Wellenlängen stehen. Da ferner die Phasenunterschiede beim Austritt aus dem Krystall, sich wie die Länge der Wege, also wie die Dicken der Platten verhalten, so muſs die Drehung für ein und dieselbe Farbe mit der Dicke des Krystalls in demselben Verhältniſs wachsen, wie es auch die Erfahrung bestätigt. Ist daher p die Drehung für eine Farbe, deren Wellenlänge l ist, durch eine Bergkrystallplatte von der Dicke d, so ist $p = \frac{kd}{l^2}$, wo k eine Constante ist, deren Werth von Biot auf $\frac{18^\circ,414}{(6,18614)^2}$ angegeben wurde, wenn d in Millimetern ausgedrückt ist. Die von Biot gefundenen Werthe von p für $d = 1$ sind folgende:

Homogenes Licht.	Drehung.
Aeuſserstes Roth	17°,4964
Grenze zwischen Roth und Orange	20 ,4798
» » Orange und Gelb	22 ,3138
» » Gelb und Grün	25 ,6752
» » Grün und Blau	30 ,0460
» » Blau und Indigo	34 ,5717
» » Indigo und Violett	37 ,6829
Aeuſserstes Violett	44 ,0827

Sieht man daher durch ein Nicol'sches Prisma auf eine Bergkrystallplatte, durch welche linear polarisirtes weiſses Licht in der Richtung der Axe gegangen ist, und hält dadurch, daſs man dieselbe mit einer undurchsichtigen und

einer mäfsigen Oeffnung versehenen Platte bedeckt, die schief gegen die Axe einfallenden Strahlen ab, so erscheint die Oeffnung gefärbt, da von den Farbenstrahlen nur diejenigen fast ungeschwächt ins Auge kommen, deren Polarisations-Ebene mit der Polarisations-Ebene des Prisma's nahe zusammenfallen, und von den übrigen um so weniger durchgelassen wird, je näher ihre Polarisations-Ebene die darauf senkrechte Lage hat. Dreht man daher das Prisma, so ändert sich die Farbe, und geht, wenn sie in der ersten Stellung roth war, durch das Orange und Gelb hindurch ins Blau über.

Nimmt man statt des Prisma's ein Kalkspath-Rhomboëder, so sieht man zwei Bilder der Oeffnung, die einander complementar gefärbt sind, da das Licht des einen Bildes senkrecht gegen das des andern polarisirt ist, also dasjenige Licht enthält, welches dem andern Bilde durch die Zerlegung in gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenes entzogen wurde.

Läfst man circular polarisirtes Licht statt des linear polarisirten einfallen, so mufs dasselbe auch circular polarisirt heraustreten. Das homogene Licht kann daher alsdann in keiner Stellung des Nicols verschwinden; die einzige Oeffnung, welche man durch ein Kalkspath-Rhomboëder sieht, bleibt daher ungefärbt.

Cauchy's Untersuchungen zufolge ist das Licht längs der Axe des Quarzes zwar nicht genau circular, sondern schwach elliptisch polarisirt; die Abweichung ist indefs so unbedeutend, dafs ihr Einflufs in der Anwendung ganz vernachlässigt werden kann.

Was die Strahlen betrifft, welche der Axe nicht parallel sind, so scheinen die gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen elliptisch und zwar entgegengesetzt drehend polarisirt zu sein, in der Art, dafs die Excentricität der Schwingungsbahn mit der Neigung des Strahls gegen die Axe zunimmt, so dafs von einer bestimmten Neigung ab die Abweichung von der linearen Polarisation unmerklich wird. Dabei scheint die Lage der grofsen Axe das Gesetz

r Lage der linearen Schwingungsrichtung in den norma-
ı Krystallen zu befolgen.

Dasselbe Verhalten, welches der Bergkrystall gegen
ıs in der Richtung seiner Axe sich bewegende Licht zeigt,
igen auch einige Flüssigkeiten, denen man demnach gleich-
lls eine doppelbrechende Kraft zuschreiben mufs. Zu den
chts-drehenden Flüssigkeiten gehören z. B. das Terpen-
inöl (sowohl in flüssigem als in gasförmigem Zustande),
ıs Lorbeeröl, in Alkohol aufgelöster künstlich bereiteter
ampher, Traubenzuckerlösung vor der Erstarrung; zu den
nks-drehenden Flüssigkeiten: Citronenöl, in Alkohol auf-
löster natürlicher Kampher, Rohrzucker, Traubenzucker-
sung, welche schon einmal fest gewesen war, Dextrin
lurch schwache Säuren löslich oder blofs schwebend ge-
achtes Stärkemehl), Runkelrübensaft.

Um die Drehung dieser Flüssigkeiten zu messen, bringt
an dieselben in eine cylindrische Röhre, die mit Glas-
atten geschlossen ist, und setzt sie linear polarisirtem Lichte
ıs. Sie ist bedeutend schwächer als beim Bergkrystall.
eim Citronenöl ist sie z. B. bei 1^{mm} Dicke —0°,436; bei
ncentrirtem Zuckersyrup —0,554; bei einer Lösung von
753 Theilen künstlichem Kampher in 17359 Theilen Al-
hol +0°,018, beim Terpenthinöl +0°,271; bei einer
ırch wiederholte Destillation gereinigten Probe desselben
ar sie 0°,286 etc.

Wird zu einer solchen doppelbrechenden Flüssigkeit
Vasser oder ein anderes einfachbrechendes Fluidum ge-
tzt, so ändert sich trotz der zunehmenden Dicke der
hicht der Drehungswinkel nicht, und mischt man mehrere
ppelbrechende Flüssigkeiten mit einander, so ist die Dre-
ıng der algebraischen Summe der Drehungen gleich, wel-
e jede Flüssigkeit bei der nach der entsprechenden Menge
h richtenden Dicke für sich hervorbringen würde. Biot
hreibt diese drehende Eigenschaft einer den Molekular-
uppen inwohnenden Kraft zu, da dieselbe einen Dre-
ıngswinkel veranlafste, welcher von der Distanz dieser
uppen unabhängig ist.

Jene Kraft, welche er die Drehkraft nennt, und deren für jede Substanz constante Intensität durch die Drehung einer Schicht von bestimmter Dicke und Dichtigkeit gemessen wird, ändert sich demnach nur mit der innern Constitution der Molekulargruppen, durch chemische Umwandlung. So wird die Drehkraft des Dextrins, wenn man es durch eine Säure unter Einwirkung von Wärme in Zukker verwandelt, schwächer ohne die Richtung zu ändern; und Gummi, durch denselben Procefs in Zucker verwandelt, wird entgegengesetzt drehend. Ebenso kehrt sich die Drehkraft des Rohrzuckers unter Einwirkung einer Säure und durch gesteigerte Wärme um, so dafs die Aenderung der Drehkraft ein Ausdruck sonst zuweilen nicht auf eine andere Weise wahrnehmbarer chemischer Aenderungen wird.

Die circular polarisirenden Flüssigkeiten befolgen mit Ausnahme der Weinsäure ein und dasselbe Drehungsgesetz, und selbst die Salze jener Säure schliefsen sich der allgemeinen Regel an.

Vergleicht man bei einer bestimmten Temperatur in homogenem Licht die Drehkraft einer Weinsäurelösung in dem concentrirtesten Zustande, welcher bei jener Temperatur möglich ist, mit denen verdünnterer Lösungen, so findet man, dafs die Drehkraft genau im Verhältnifs der zugesetzten Wassermenge wächst, so dafs sich der Gang der Drehkraft durch eine gerade Linie versinnlichen läfst, deren Abscissen die Quantitäten des zugesetzten Wassers repräsentiren. Die Drehkraft wächst mit der Temperatur, jedoch so, dafs die ihr entsprechende Gerade sich parallel bleibt. Von Farbe zu Farbe ändert sich die Neigung und der Ursprung dieser Geraden, so dafs im weifsen Licht die seltsamsten Erscheinungen auftreten, indem zuweilen das Violett eben so stark als das Roth abgelenkt wird. **Biot** schliefst hieraus auf eine Art des Chemismus bei der Verbindung der Säure mit Wasser, welche sich dem Gesetz der chemischen Proportionen entzieht. Mit den Auflösungen der Weinsäure in Alkohol und Holzgeist verhält es sich ähnlich; auch sie zeigen scheinbare Anomalien im weifsen

Licht. So lenkte eine alkoholische Lösung, die 0,84 reinen Alkohol enthielt, bei 5° C. das Roth, Orange und Gelb nach rechts, das Blau, Indigo und Violett nach links ab.

C. *Verhalten der zweiaxigen Krystalle.*

Richtung der gebrochenen Strahlen.

Wie bei der Brechung durch einfachbrechende und einaxige krystallinische Mittel verhalten sich auch hier die Sinus der Einfalls- und Brechungswinkel, wie die Geschwindigkeit des einfallenden zu der des gebrochenen Lichts, wenn dasselbe durch ebene Wellen erregt wird, und die Normalen der gebrochenen Wellensysteme liegen in der Einfalls-Ebene *). Der Unterschied liegt nur darin, dafs die Gröfse der Geschwindigkeit in beiden gebrochenen Systemen veränderlich ist.

Sind nämlich u und u' die Winkel, welche die Normale des gewöhnlichen (ebenen) Wellensystems mit denjenigen optischen Halbaxen bildet, welche zu beiden Seiten der Elasticitätsaxe π liegen, und w und w' die Winkel der Normale des ungewöhnlichen Systems mit denselben Halbaxen, so ist die Geschwindigkeit o des ersten, und die Geschwindigkeit e des zweiten Systems gegeben durch die Gleichungen

$$o^2 = \tfrac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)-\tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\cos(u-u')$$
$$e^2 = \tfrac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)-\tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\cos(w+w'),$$

wenn man bei positiven Krystallen unter π die kleinste, und unter μ die gröfste; bei negativen Krystallen unter π die gröfste, und unter μ die kleinste der in ihnen vorkommenden Geschwindigkeiten versteht. Die Brechungswinkel α' und α'' (von denen der erste wiederum dem gewöhnlichen, der zweite dem ungewöhnlichen System ange-

---

*) Der Beweis für diesen Satz, wie er oben für einfachbrechende Mittel gegeben ist, ist nämlich auch für doppelbrechende Mittel gültig.

hören möge) sind alsdann gegeben durch

$$\sin^2 \alpha' = o^2 \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha'' = e^2 \sin^2 \alpha,$$

wenn man die Geschwindigkeit des umgebenden Mittels zur Einheit nimmt.

Die gebrochenen Strahlen liegen dagegen im Allgemeinen nicht in der Einfalls-Ebene. Der gewöhnliche Strahl nämlich liegt in derjenigen Ebene, die durch seine Normale geht und den Winkel halbirt, welchen die durch diese Normale und die Schenkel des stumpfen Winkels der optischen Axen gehenden Ebenen bilden; der ungewöhnliche Strahl dagegen liegt in der Ebene, die durch seine Normale geht und den Winkel halbirt, welchen die durch diese Normale und die Schenkel des spitzen Winkels der optischen Axen gehenden Ebenen bilden.

Die Winkel, welche der gewöhnliche und ungewöhnliche Strahl mit seiner Normale macht, sind, wenn man dieselben resp. durch q' und q'' bezeichnet, bestimmt durch

$$tang\, q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2o^2} \sin(u - u') \sin \varphi'$$

$$tang\, q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2e^2} \sin(w + w') \cos \varphi'',$$

wo φ' und φ'' die Hälften der Winkel sind, welche von denjenigen Ebenen eingeschlossen werden, die durch die respective Normale und die Schenkel des spitzen Winkels der optischen Axen gehen.

Die Richtung der gebrochenen Strahlen ändert sich also bei demselben Krystall und bei einem gegebenen Einfallswinkel: 1) mit der Lage der brechenden Fläche gegen die optischen Axen, 2) mit der Lage der Einfalls-Ebene gegen die optischen Axen.

Dreht man daher einen Krystall in seiner Ebene, d. h. um das als unverändert gedachte Einfallsloth, bei unveränderter Lage eines einfallenden Strahls, so dafs also die Einfalls-Ebene ungeändert bleibt; so bewegen sich die Strahlen um ihre Normalen, während diese selbst ihre eigene Bewegung haben, die aber um so geringer ist, je schwächer die doppelbrechende Kraft des krystallinischen Mittels ist.

Aus

Aus diesem Grunde bewegen sich die **beiden** Bilder eines Gegenstandes, nach welchem man durch einen von parallelen Flächen begrenzten zweiaxigen Krystall sieht, in geschlossenen krummen Linien, wenn man den letzteren herumdreht.

Fällt das Licht senkrecht auf den Krystall, so fallen die Normalen beider gebrochenen Wellensysteme zusammen und zwar in die Richtung des Einfallslothes. Die beiden Strahlen liegen alsdann in auf einander senkrechten, durch das Einfallsloth gehenden Ebenen; sie liegen beide in Hauptschnitten, wenn der Krystall senkrecht auf eine der Elasticitätsaxen geschnitten ist. Aufserdem haben die Normalen beider Strahlen nur dann gleiche Richtungen, wenn $o^2 = e^2$ wird, also wenn die eine derselben der Richtung einer optischen Axe folgt.

Der gewöhnliche Strahl fällt nur dann mit seiner Normale zusammen: 1) wenn das Licht in dem Hauptschnitt einfällt, welcher, durch die mittlere Elasticitätsaxe gehend, den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt; 2) wenn es in der Ebene der optischen Axen einfällt, und das Einfallsloth in dem stumpfen Winkel derselben liegt.

Der ungewöhnliche Strahl fällt nur dann mit seiner Normale zusammen: 1) wenn das Licht in dem Hauptschnitt einfällt, welcher, durch die mittlere Elasticitätsaxe gehend, den stumpfen Winkel der optischen Axen halbirt; 2) wenn es in der Ebene der optischen Axen einfällt, und das Einfallsloth in dem spitzen Winkel derselben liegt.

Beide Strahlen fallen nur dann zusammen: 1) wenn der Krystall senkrecht gegen eine der Elasticitätsaxen geschnitten ist, und das Licht lothrecht einfällt; 2) wenn die gebrochenen Strahlen in die Richtung einer der scheinbaren optischen Axen fallen, in welchem Fall beim Austritt des Lichts aus dem Krystall noch besondere Erscheinungen eintreten.

Geometrisch läfst sich die Richtung beider Strahlen durch eine Verallgemeinerung der **Huyghen**'schen Construction bestimmen. Man darf nämlich nur statt der Kugel-

und Ellipsoidsfläche die Wellenfläche des zweiaxigen stalls um den Einfallspunkt so construiren, dafs deren den Elasticitätsaxen desselben parallel sind. Die B rungspunkte der auf die Huyghen'sche Weise gel Tangential-Ebenen sind dann die Endpunkte der be Strahlen.

Wenn die Normalen der gebrochenen Wellensys einer der wahren optischen Axen parallel werden, so rührt die genannte Tangential-Ebene die Wellenfläch einem Kreise und es bildet sich ein Strahlenkegel. l man daher einen Strahl auf einen von parallelen Flä begrenzten zweiaxigen Krystall in solcher Richtung a len, dafs diese Spaltung in einen Strahlenkegel eintritt werden sämmtliche Strahlen desselben nach ihrem Au dem einfallenden Strahl parallel, und es bildet sich Strahlencylinder. Um diese Erscheinung hervorzubrin darf man nur das Licht in der Ebene einfallen lassen, che durch das Einfallsloth und der einen optischen geht, und zwar unter einem Einfallswinkel, welcher aus der Gleichung $\sin\alpha = \frac{1}{v}\sin\alpha'$ findet, wenn man α' den Winkel setzt, welchen das Einfallsloth mit de nen der optischen Axen bildet.

Lloyd, welcher zuerst, nachdem Hamilton d die Betrachtung der Wellenfläche auf diese Erschei gekommen war, Versuche hierüber anstellte, leitete Licht einer Lampe, um einen möglichst feinen Licht del zu erhalten, durch zwei kleine Oeffnungen, von d die eine in einem dicht vor jener angebrachten Schirm findlich war, die zweite in einer dünnen Metallplatte, che an der Vorderfläche eines gegen die Axe n senkr geschnittenen Arragonits befestigt war. Unter dem für mittleren Strahlen (Fraunhofers E) berechneten Ein winkel erschien dem Auge, das der gröfseren Deutlic wegen mit einer Loupe bewaffnet war, ein weifser L kreis, welcher bei einer geringen Abweichung von der hörigen Lage des Krystalls in 4 gefärbte Quadraten

ie zwei gegenüberstehende die Comple-
dern beiden zeigten, und die sich bei
eichung in zwei Lichtpunkte (die bei-
der Oeffnung) auflösten.
m aufgefangen, geben die Strahlen ei-
lessen Durchmesser sich mit der Ent-
nicht ändert.
nfallswinkel wich von dem nach Rud-
ir den Strahl E berechneten um 21'
Strahlenkegels (der 1° 50' gefunden

Licht so auf den Krystall, dafs die
einer der scheinbaren optischen Axen
n im Abschn. I. Gesagten zufolge, zu
iche Menge eine Kegelfläche bildende
e an der Austrittsfläche gebrochen ei-
ahlenkegel erzeugen.
Licht einer entfernten Lampe auf eine
nweite fallen, stellte in deren Brenn-
) Krystall auf, und bedeckte die dem
desselben mit einer dünnen Metall-
kleinen Oeffnung versehen war, so
ffnung aus nach dem von der Linse
gebildeten Lichtpunkt gehende Ge-
scheinbaren optischen Axe war. Ist
nug, so sieht man durch dieselbe ei-
lchen man auf einer mattgeschliffenen
und die Zunahme seines Durchmes-
ng von dem Krystall beobachten kann,
hinreichende Lichtstärke zu erhalten,

nlicht durch eine enge Spalte auf ein
mer befindliches, aus einem zweiaxi-
tenes Prisma fallen, so bilden sich
öhnliches und ein ungewöhnliches,
Allgemeinen keines in der Einfalls-
die Kante des Prisma's so wie die

die Spalte einer der Elasticitätsaxen parallel, und steh
Einfalls-Ebene auf der Kante senkrecht, so fallen l
in eine Ebene, nämlich in die mit dem Hauptschnit
sammenfallende Einfalls-Ebene. Das eine Spektrum
wegen, weil die ihm zugehörigen gebrochenen Strahlei
ihren Normalen zusammenfallen; das zweite Spektrum
wegen, weil die zugehörigen Strahlen, obwohl gegen
Normalen geneigt, in der Ebene des Hauptschnittes li
Die Strahlen der ersten Spektra gehören den Kreisd
schnitten der Wellenfläche an, sind nach dem betreffe
Hauptschnitt polarisirt, und haben die constante Gescl
digkeit π, ν, μ, je nachdem die Kante senkrecht au
Elasticitätsaxe π, ν oder μ steht. Sie werden dazı
nutzt, die 3 Hauptbrechungsverhältnisse $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\mu}$ fü
verschiedenen Farben zu bestimmen. Von diesen Spe
sind 1) das zu π gehörige, 2) das zu ν gehörige, füı
Fall, dafs die gebrochenen Strahlen in dem stumpfen
kel der optischen Axen liegen — gewöhnliche Spektrı
zu μ und die übrigen zu ν gehörigen — ungewöhr
Spektra, und zwar für positive sowohl als für ne
Krystalle, sobald man sich unter π die den spitzen
kel der optischen Axen halbirende Elasticitätsaxe d
also die kleinste oder gröfste, je nachdem sie positiv
negativ sind.

Die zweiten Spektra, die in die Verlängerung de
ersten fallen, entsprechen den Strahlen von veränderl
Geschwindigkeit.

Reflexion des unpolarisirten Lichts.

Wie bei den einaxigen Krystallen, so giebt es
bei den zweiaxigen einen Einfallswinkel, für welcheı
polarisirtes Licht durch Reflexion vollständig polarisirt
d. h. einen Polarisationswinkel, welcher indefs je nacl
Lage der reflektirenden Fläche und der Einfalls-Eben
gen die Axen verschieden ist. Am einfachsten ist das

setz, nach welchem er sich richtet, wenn das Licht in einem der drei Hauptschnitte einfällt. Ist nämlich α der Polarisationswinkel, so ist für den Hauptschnitt $\pi\nu$

$$\sin^2\alpha = \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varrho_\mu + (1-\pi^2)\sin^2\varrho_\mu}{1-\pi^2\nu^2},$$

für den Hauptschnitt $\mu\nu$

$$\sin^2\alpha = \frac{(1-\nu^2)\cos^2\varrho_\pi + (1-\mu^2)\sin^2\varrho_\pi}{1-\mu^2\nu^2},$$

für den Hauptschnitt $\pi\mu$

$$\sin^2\alpha = \frac{(1-\mu^2)\cos^2\varrho_\nu + (1-\pi^2)\sin^2\varrho_\nu}{1-\mu^2\pi^2},$$

wo ϱ_μ, ϱ_π, ϱ_ν die Winkel sind, welche das Einfallsloth beziehlich mit den Axen μ, π ν, bildet.

Wenn die reflektirende Fläche auf einer der optischen Axen senkrecht steht, so ist der Polarisationswinkel für jede Lage der Einfalls-Ebene gleich und zwar näherungsweise

$$\sin^2\alpha = \frac{2}{2+\pi^2+\mu^2} + \frac{\pi^2+\mu^2-2\nu^2}{2-\pi^2-\mu^2}.$$

Für jede der übrigen Flächen giebt es stets zwei auf einander senkrechte Lagen der Einfalls-Ebene, in welchen der Polarisationswinkel einen gröfsten oder kleinsten Werth erreicht, und zwar sind dies diejenigen Lagen, in denen die Einfalls-Ebene den Winkel halbirt, welcher von den durch das Einfallsloth und die optischen Axen gehenden Ebenen gebildet wird. Ferner sind die Polarisationswinkel gleich in je zwei Reflexions-Ebenen, welche mit jenen Ebenen des Maximums oder Minimums gleiche Winkel bilden.

Ist aber das umgebende Mittel die Luft, so weicht der Polarisationswinkel nie stark von demjenigen ab, welcher einem unkrystallinischen Mittel zukommen würde, dessen Brechungsverhältnifs dem des gewöhnlichen Strahls des Krystalls gleich ist, so dafs für ihn der gewöhnlich gebrochene Strahl stets nahe auf dem reflektirten senkrecht steht.

Was die Ablenkung der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls, d. h. die Neigung dieser Ebene gegen die Reflexions-Ebene, betrifft, so giebt es im Allgemeinen für

jede reflektirende Fläche 4 Ebenen *), in denen das Licht einfallen muſs, wenn es genau nach der Einfalls-Ebene polarisirt sein soll. Ist die reflektirende Fläche einer der Elasticitätsaxen parallel, so fällt das eine Paar dieser Ebenen in den Hauptschnitt, das andere Paar existirt aber nicht für jede Lage der Fläche bei jedem Krystall. Ist es z. B. die mittlere Axe ν, welcher die reflektirende Ebene parallel ist, so nähert sich, wenn man derselben nach und nach alle Neigungen von 0° bis 90° gegen die Axe π beigelegt denkt, das zweite Paar Azimuthe ohne Ablenkung allmälig dem Hauptschnitt, es fällt bei einer bestimmten Neigung mit ihm zusammen, und trennt sich erst nach einer gewissen Zunahme der Neigung wieder von demselben, um sich von ihm allmälig zu entfernen. Eben so ist es bei den Flächen, welche der Axe π oder μ parallel sind, nur daſs, wenn das Verhältniſs der Gröſse des Polarisationswinkels zum Neigungswinkel der optischen Axen gewisse Bedingungen erfüllt, das Zusammenfallen des zweiten Paars Azimuthe mit dem Hauptschnitte nur für eine einzige Lage der brechenden Fläche stattfindet. Die Tangente der diesem Zusammenfallen entsprechenden Neigung der Fläche gegen die Axe ν ist $\sin n$ oder $\cos n$, je nachdem sie der Axe μ oder π parallel ist.

Für den Fall, daſs die reflektirende Fläche auf einer optischen Axe senkrecht ist, findet nur dann keine Ablenkung statt, wenn das Licht im Hauptschnitt einfällt.

---

*) Die Ebenen sind hier von dem Einfallsloth an gerechnet zu denken, so daſs, wenn die Ebenen paarweise zusammenfallen, die wohl zu berücksichtigende Lage des einfallenden Strahls auf der einen oder der andern Seite des Einfallslothes, unterschieden wird.

Reflexion des polarisirten Lichts.

Es giebt im Allgemeinen für jede Lage der Krystallfläche und für jede Richtung der Reflexions-Ebene einen bestimmten Einfallswinkel, für welchen die Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls mit der des zurückgeworfenen zusammenfällt. Es ergiebt sich demnach für jede Fläche ein System von Einfallsstrahlen, welchem reflektirte Strahlen entsprechen, deren Polarisations-Ebene nicht gedreht ist, und zwar liegen dieselben in einer Kegelfläche.

Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, so gehört zu dem System der Einfallsstrahlen ein System Normalen gewöhnlich gebrochener Well-Ebenen, welche eine Kegelfläche bilden, die durch die optischen Axen geht, und von welcher zwei Zweige sich in dem Einfallsloth schneiden.

Ist (Fig. 41.) C der Mittelpunkt einer Kugel, CL die Richtung des Einfallslothes, CA und CA' den optischen Axen parallel, und PLQ ein durch L so gelegter gröfster Kreis, dafs $\sin ALP : \sin A'LP = \tang LA' : \tang LA$, endlich $LP = LQ = 90^0$ ist, so sind CP, CL, CQ, CA, CA' Seiten der erwähnten Kegelfläche, deren Durchschnitt mit der Kugelfläche $PALN'A'LN''Q$ sei. Die anderen Punkte (N', N'' etc.) des Durchschnittes sind so zu construiren, dafs für die Punkte N' auf dem Zweige $ALN'A'$ die Ebene CLN' senkrecht steht auf der Halbirungs-Ebene des Winkels $AN'A$; und für die Punkte N'' der anderen Zweige die Ebene CLN'' den Winkel $AN''A'$ halbirt. Ist die reflektirende Fläche überdies einer Elasticitätsaxe parallel, so reducirt sich jener Durchschnitt auf einen durch L, A, A' gehenden Kreis, und auf einen gröfsten Kreisbogen, dessen Ebene auf der Elasticitätsaxe senkrecht steht; die Kegelfläche (dritter Ordnung) zerfällt also alsdann in eine elliptische Kegelfläche und in eine Ebene, die einem der Hauptschnitte parallel ist.

Wenn das einfallende Licht dagegen nach der Einfalls-Ebene polarisirt ist, so bilden die Normalen der ge-

wöhnlich gebrochenen Well-Ebenen, die zu Einfallsstrahlen gehören, die mit unveränderten Polarisations-Ebene reflektirt werden, wiederum eine Kegelfläche, die sich von der obigen nur dadurch unterscheidet, dafs die Neigungen der entsprechenden (Kegel-) Seiten sich zu 180° ergänzen.

Wie bei den einaxigen Krystallen, **verschwindet auch hier das reflektirte Licht, wenn dasselbe unter dem Polarisations-Winkel einfällt und nach einer bestimmten Ebene polarisirt ist.**

Intensität der durch die Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen erzeugten Bilder.

Die Polarisations-Ebene des gewöhnlich gebrochenen Wellensystems ist, dem im vorigen Abschnitt Gesagten gemäfs, die durch seine Normale gehende Ebene, welche den spitzen Winkel halbirt, den diejenigen Ebenen mit einander bilden, welche durch diese Normale und die optischen Axen gehen; die Polarisations-Ebene des ungewöhnlich gebrochenen Wellensystems dagegen die analog construirte, aber den stumpfen Winkel halbirende Ebene. Die beiden Polarisations-Ebenen, welche daher auf dem Azimuth ihrer Strahlen lothrecht sind, stehen deswegen nur dann genau auf einander senkrecht: 1) wenn das Licht senkrecht einfällt, weil alsdann die Normalen beider Systeme zusammenfallen, 2) bei schiefer Incidenz, wenn das Licht in einem der Hauptschnitte einfällt.

Wie bei den einaxigen Krystallen, so mufs auch hier einer der beiden gebrochenen Strahlen verschwinden, wenn das einfallende Licht polarisirt und zwar in der Art ist, dafs die Schwingungen denen eines der gebrochenen Strahlen (welcher alsdann der allein bleibende ist) parallel ausgeführt werden, oder dafs die Polarisations-Ebenen in dem einfallenden und einem der gebrochenen parallel sind.

Da beim Zusammenfallen der Einfalls-Ebene mit einem der Hauptschnitte, der eine gebrochene Strahl nach diesem Hauptschnitte, der andere senkrecht darauf polarisirt ist, so

wird demnach bei solcher Lage der Einfalls-Ebene der eine Strahl verschwinden, wenn der einfallende derselben Ebene parallel, oder senkrecht darauf polarisirt ist. Da das natürliche Licht als nach allen möglichen Ebenen polarisirt angesehen werden kann, so wird nie eines der Bilder verschwinden können (es müfsten denn beide Strahlen zusammenfallen, wie es in der Richtung der Elasticitätsaxen geschieht); ja es werden beide Bilder, die man von einem und demselben Gegenstande durch einen zweiaxigen Krystall erblickt, keine merkliche Intensitätsverschiedenheit zeigen.

Für die Hauptfälle, in denen einer der gebrochenen Strahlen verschwindet, wenn der einfallende polarisirt ist, gilt Folgendes:

Wenn das Einfallsloth senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist, so verschwindet einer der gebrochenen Strahlen in denjenigen Fällen, in welchen die Polarisations-Ebene des reflektirten Lichts nicht gedreht wird, also in den Fällen, in welchen die gebrochenen Strahlen (bei unpolarisirt auffallendem Licht) in der oben beschriebenen Kegelfläche (Fig. 41.) liegen würden. Ist in dieser Figur z. B. CN' die Normale eines gewöhnlichen Strahls, also die Ebene $CN'n'$, welche den Winkel $AN'A'$ halbirt, die Polarisations-Ebene des gewöhnlich gebrochenen ebenen Wellensystems, und CLN' die Einfalls-Ebene; so ist die Kegelfläche so construirt, dafs $\angle LN'n' = 90^0$, und mithin auch $CN'n'$ die Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls ist. Es bildet sich daher nur ein gewöhnlicher Strahl und der ungewöhnliche verschwindet. Eben so ist es mit allen Normalen, welche nach den Punkten zwischen A und A', welche auf dem Zweige $ALN'A'$ liegen, gerichtet sind. Geht dagegen die Normale eines ungewöhnlichen Strahls nach einem Punkte der andern Zweige, z. B. nach N'', so ist die zugehörige Polarisations-Ebene $CN''n''$, die senkrecht zu denken ist, auf der den Winkel $AN''A'$ halbirenden Ebene, und welche der Construction des Kegels zufolge auch senkrecht auf der Einfalls-Ebene $CN''L$ steht; es bildet sich daher nur ein ungewöhnlicher Strahl und der gewöhnliche verschwindet.

Ist dagegen das einfallende Licht nach der Einfalls Ebene polarisirt, so verschwindet, wenigstens sehr nahe einer der Strahlen bei derselben Richtung der Einfallsstrahlen, für welche einer derselben im vorigen Falle verschwand, mit dem Unterschiede, dafs es hier der gewöhnliche ist, wo es dort der ungewöhnliche war, und umgekehrt.

Den Grund sieht man leicht ein. Da nämlich für diesen Fall in der vorigen Figur die Polarisations-Ebenen des einfallenden Strahls *CLN'* und *CLN''* sind, so würde der eine Strahl fortfallen, sobald der andere nach derselben Ebene (d. h. nach *CLN'* und *CLN''*), also genau senkrecht auf *N'n'* und *N''n''*, d. h. auf die Polarisations-Ebene des ersten stände. Da aber, wie oben bemerkt ist, diese Senkrechtheit nur in einzelnen Fällen vollkommen ist, so geht ein kleiner Theil der Schwingungen des zweiten Strahls durch den Krystall hindurch.

Um die Polarisationsart des gebrochenen Strahlenkegels, welcher sich bildet, wenn die Normale des den Krystall durchdringenden Wellensystems in die optische Axe fällt, zu bestimmen, denke man das gebrochene Wellensystem aus Partial-Wellensystemen entstanden, welche einen Konus um die optische Axe bildeten, und denen dann ein über eine Kegelfläche verbreiteter Einfalls-Strahlenkegel entspricht.

Es mögen (Fig. 42.) *CA* und *CA'* die optischen Axen sein, und das Wellensystem, dessen Normale *CA'* ist, denke man bestehend aus einer unendlichen Menge schwacher Wellensysteme, deren Normalen sich von dem Umfang des Kreises *omn* (welcher auf einer um *C* mit dem Radius *CA'* beschriebenen Kugelfläche liegt) nach *CA'* hin bewegt haben. Eine dieser Normalen, einem gewöhnlichen System angehörig, sei *Co*, also die den Winkel *AOA'* halbirende Ebene seine Polarisations-Ebene. Hat sich die Normale längs *oA'* nach *A'* bewegt, so wird *CA'a*, welche den Winkel *AA'm* halbirt, die Polarisations-Ebene, und der zugehörige Strahl liegt in einer darauf senkrechten Ebene *bA'*; der zugehörige ungewöhnliche Strahl, dessen Normale nunmehr gleichfalls in *CA'* sich befindet, ist nach

A'b polarisirt und liegt in der Ebene *CA'a*. Sind daher alle Partial-Normalen der gewöhnlichen Strahlen aus dem Kreise *omn* auf dieselbe Weise nach *CA'* hin gerückt, so ist jede durch *A'* gehende Ebene 1) die Polarisations-Ebene eines gewöhnlichen Strahls und die Ebene, in welcher der zugehörige ungewöhnliche Strahl liegt, 2) die Polarisations-Ebene eines ungewöhnlichen Strahls und die Ebene, in welcher der zugehörige gewöhnliche Strahl liegt. Die Seiten des gebrochenen Strahlenkegels bestehen also aus Doppelstrahlen, einem gewöhnlichen und einem ungewöhnlichen, die senkrecht auf einander polarisirt sind. Die Intensität der Doppelstrahlen, also die Lichtvertheilung in dem Strahlenkegel hängt von der Lage des einfallenden Strahls ab. Ist derselbe polarisirt, so sind die Unterschiede der Lichtstärke in den verschiedenen Seiten nur gering, und zwar ist letztere am geringsten in der Einfalls-Ebene, am gröfsten in der darauf senkrechten Ebene, und zwar so, dafs sich das Minimum zum Maximum verhält, wie $\cos^2(\alpha - \alpha')$ zu 1, die Differenz also um so unmerklicher wird, je kleiner der Einfallswinkel ist. Ist der einfallende Strahl polarisirt, so verschwindet eine Kegelseite ganz, deren Richtung von der Polarisations-Ebene desselben und der Einfalls-Ebene abhängt. Diese Intensitätsverhältnisse übertragen sich auf den Strahlencylinder, der beim Austritt aus dem Krystall entsteht, wenn dessen Flächen parallel sind.

Aehnliches ergiebt sich für den Fall, dafs der gebrochene Strahl die Richtung der scheinbaren optischen Axe hat, in Bezug auf den Konus von Normalen, welche beim Austritt einen Konus von Strahlen erzeugen.

Dichroismus.

Die vollkommen undurchsichtigen Körper unterscheiden sich äufserlich von den durchsichtigen durch die Undurchdringlichkeit für das Licht, also durch das Fehlen der Brechungs-Erscheinungen. Wie überall in der Natur, findet man aber auch hier Durchgangsstufen von der vollkommenen

Undurchsichtigkeit bis zur vollkommenen Durchsichtigkeit. Die physikalischen Unterschiede der Körper in Bezug auf diese Zwischenstufen (welche durch die Prädicate: in den Kanten durchscheinend, halbdurchsichtig bezeichnet zu werden pflegen) beruhen auf das mit zunehmender Dicke mehr oder weniger unmerklicher Werden und allmälige Verschwinden der Brechungs-Erscheinungen. Die Schwächung und Vernichtung des Lichtes heifst Absorption.

Bei einfachbrechenden Körpern bezieht sich diese Abnahme der Intensität des gebrochenen Lichtes bald gleichmäfsig auf alle, bald vorzugsweise auf einzelne Farbenstrahlen; jedesmal ist sie aber unabhängig von der Richtung derselben. Bei den doppelbrechenden Körpern treten noch Unterschiede für die gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen hinzu.

Der allgemeine Name für diese Verschiedenheit der Absorption ist Dichroismus.

Zu den Krystallen, an welchen zuerst dieser Dichroismus bemerkt wurde, gehört der Dichroit (Jolith), welcher in der Richtung der Axe der Säule, in welcher er krystallisirt, violett, in der darauf senkrechten Richtung weifsgelb ist, und das unterschwefelsaure Eisen, welches in der Richtung der Axe blutroth, in der darauf senkrechten Richtung grün aussieht. Jenes Dunkelroth ist überdies so schwach, dafs es schon bei einer Dicke von $\frac{1}{20}$ Zoll fast ganz undurchsichtig erscheint.

Die verschiedene Färbung der beiderlei Bilder in den gefärbten doppelbrechenden Krystallen ist so allgemein, dafs man die ganz gleiche Färbung fast zu den Ausnahmen zählen möchte. Beide Farben ergänzen sich in der Regel zu der dem Krystall eigenthümlichen Farbe.

Die von Brewster beobachtete Färbung der beiden Bilder der bekannten einaxigen gefärbten Krystalle, welche Dichroismus zeigen, sind in der folgenden Tafel enthalten.

Krystalle.	gew. Bild.	ungew. Bild.
Zirkon	bläulichweiſs	dunkelbraun
Saphir	gelblichgrün	blau
Rubin	blaſsgrün	hellrosenroth
Smaragd	gelblichgrün	bläulichgrün
»	bläulichgrün	gelblichgrün
Beryll	bläulichweiſs	blau
» grüner	weiſslich	bläulichgrün
» gelblichgrüner . . .	blaſsgelb	blaſsgrün
Bergkrystall fast farbloser .	weiſslich	schwach braun
» gelber	gelblichweiſs	gelb
Amethyst	blau	rosenroth
»	gräulichweiſs	rubinroth
»	röthlichgelb	rubinroth
Turmalin	grünlichweiſs	bläulichgrün
Rubellit	röthlichweiſs	schwach roth
Idocras	gelb	grün
Mellit	gelb	bläulichweiſs
Apatit, lila	bläulich	röthlich
» olivengrüner . . .	bläulichgrün	gelblichgrün
Phosphorsaures Blei . . .	hellgrün	orange
Kalkspath, gelber	orange	gelblichweiſs
Octaëdrit	weiſslichbraun	gelblichbraun

Brewster erzeugte selbst künstlich den Dichroismus, indem er ein Quarzprisma durch Ruſs schwärzte. Das gewöhnliche Bild wurde schön purpur oder amethystfarben, das ungewöhnliche gelbbraun.

Zu den zweiaxigen dichroitischen Krystallen, welche Brewster untersuchte, gehören folgende:

Krystalle.	*A.*	*B.*
Topas, blauer	weiſs	blau
» grüner	weiſs	grün
» bläulichgrüner . . .	röthlichgrau	blau
» rosenrother	rosenroth	weiſs
» rosenrothgelber . .	rosenroth	gelb
» gelber	gelblichweiſs	orange
Schwefelsaurer Baryt gelblichpurpurrother	citrongelb	purpurroth
» gelber	citrongelb	gelblichweiſs
» orangegelber . .	gummiguttgelb	gelblichweiſs
Cyanit	weiſs	blau
Dichroit	blau	gelblichweiſs
Cymophan	gelblichweiſs	gelblich
Epidot, olivengrüner . . .	braun	meergrün
» weiſsgrüner . . .	rosenrothweiſs	gelblichweiſs
Glimmer	rothbraun	röthlichweiſs

Die Farben der Spalte *A* sind diejenigen, in welchen die Krystalle in dem nach der Ebene der optischen Axen polarisirten Licht erscheinen, die der Spalte *B* dagegen diejenigen, welche sie in dem auf diese Ebene senkrecht polarisirten Licht haben.

Ein Verzeichnifs der übrigen von Brewster beobachteten doppelfarbigen Krystalle befindet sich in den *Philosophical Transactions* 1819.

Der Dichroismus der zweiaxigen Krystalle äufsert sich noch auf eine eigene Weise in nicht zu dünnen senkrecht gegen die Ebene der optischen Axen geschnittenen Platten. Läfst man nämlich z. B. durch Dichroit nach der Ebene der Axen polarisirtes Licht hindurchgehen, so sieht man auf gelbem Grunde das Centrum blau, und von den Polen aus (d. h. von den Punkten, wo die längs der Axen gehenden Strahlen aus dem Krystall treten) Aeste von gleicher Farbe ausgehen, wie es Fig. 62. durch Schattirung angegeben ist. An den Polen sind diese blauen Aeste purpurroth gefleckt und durch weifses oder bläuliches Licht von einander getrennt.

Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Ebene der Axen polarisirt, so sind die Pole weifs oder gelblich, alles Uebrige dunkelblau.

Ein Beispiel der auffallendsten Intensitätsverschiedenheit der beiden Bilder liefert der Turmalin. Die meisten Varietäten desselben absorbiren nämlich das in der Richtung der Axe durchgehende Licht so stark, dafs sie oft schon bei mäfsiger Dicke in dieser Richtung undurchsichtig sind. Dies findet im höchsten Mafse bei der braunen Varietät statt, welche, der Axe parallel geschnitten, schon bei sehr geringer Dicke nur das ungewöhnlich gebrochene Licht durchläfst. Man kann die schnelle Intensitätsabnahme des gewöhnlich gebrochenen Lichtes bei zunehmender Dicke am bequemsten beobachten, wenn man ein Prisma von sehr kleinem Kantenwinkel, welches so geschnitten ist, dafs die Axe der Kante parallel wird, langsam vor dem Auge vorbeiführt. Dicht an der Kante sind beide Bilder gleich hell

sichtbar; in geringer Entfernung von derselben ist aber die Helligkeit des gewöhnliches Bildes schon so schwach, dafs nur das andere in vorherrschendem Braun erkennbar bleibt.

Auf diese Eigenschaft beruht der Gebrauch der parallel der Axe geschnittenen Turmalin-Plättchen, einen einfachen polarisirten Strahl für die Polarisations-Versuche zu erzeugen, und die Lage der Polarisations-Ebene eines polarisirten Strahls aufzufinden.

Auch die Wärme hat Einflufs auf die Absorption. Brewster erweckte durch Rothglühen und durch Tauchen in siedendes Olivenöl und Quecksilber in einer grofsen Menge brasilianischer Topasstücke eine Ungleichheit der vorher in beiden gebrochenen Strahlen gleich seienden Absorptionskraft. Ein Topas, in welchem das eine Bild gelb, das andere rosa war, zeigte nach dem Rothglühen nur noch das gewöhnliche rosafarbene Bild seine Färbung. Während des Erhitzens war alles durchgehende Licht ungefärbt, und nahm erst bei dem Erkalten die rosa Farbe an.

D. *Reflexion an Metallen.*

Unter den vollkommen undurchsichtigen Körpern, d. h. unter denen, bei welchen gar keine Brechung wahrgenommen wird, zeichnen sich die Metalle dadurch aus, dafs schief auffallendes polarisirtes Licht durch die Reflexion elliptisch polarisirt wird.

Brewster, der Entdecker der hierauf beruhenden Reflexions-Erscheinungen, leitete aus seinen zahlreichen und gründlichen Beobachtungen Gesetze für dieselben ab, welche Neumann sehr bald nach der Entdeckung durch Deduction aus den Gesetzen der Aetherbewegung zu verificiren und zu erweitern wufste.

Die Fundamental-Erscheinung ist, dafs nach zwei Reflexionen an Platten desselben Metalls unter einem und

demselben bestimmten Winkel das Licht linear polarisirt wird, sobald beide Reflexions-Ebenen zusammenfallen und die Polarisations-Ebene des einfallenden Lichts mit der Einfalls-Ebene einen Winkel von 45° bildet. Jener Reflexionswinkel heifst Winkel des Polarisations-Maximums oder Polarisationswinkel. Von der Vergleichung mit dem Polarisationswinkel an unkrystallinischen Mitteln ausgehend, denkt man sich einen auf dem reflektirten Strahl senkrecht stehenden gebrochenen Strahl, und nennt das Brechungsverhältnifs, welches dieser Lage des fingirten gebrochenen Strahls entspricht, das Brechungsverhältnifs des Metalls.

Die Voraussetzungen, welche Neumann seinen Untersuchungen zum Grunde legte, waren folgende:

1) dafs, wenn man die Schwingungen im reflektirten Strahl nach der Reflexions-Ebene und senkrecht darauf zerlegt denkt, und die Vibrations-Intensität jener Schwingungen mit R_s, die der andern Schwingungen mit R_p bezeichnet, das Verhältnifs $R_p : R_s$ von der Gröfse des Einfallswinkels abhängt, und zwar so, dafs es ein Kleinstes wird für den Polarisationswinkel, und von da ab nach beiden Seiten hin stetig wachsend an den Grenzen, nämlich beim senkrechten Einfall und bei der Incidenz von 90° die Einheit als Maximum erreicht. Das Licht würde sich demnach dem partiell reflektirten an unkrystallinischen durchsichtigen Mitteln analog verhalten, für welches $R_p : R_s = 0$ wird bei dem Polarisationswinkel, und von da aus wachsend an den Grenzen der Einheit gleich wird, während bei der Totalreflexion $R_p : R_s$ constant bleibt.

2) Dafs wie bei der Totalreflexion der zu R_p gehörige Strahl gegen den zu R_s gehörigen um einen Bruchtheil einer Wellenlänge zurückbleibt; jedoch dergestalt, dafs diese Verzögerung an der einen der beiden Grenzen, wo die Incidenz 0° und wo sie 90° beträgt, verschwindet, an der andern Grenze ihren gröfsten Werth erreicht und einer halben Wellenlänge gleich wird, während bei der Totalreflexion die gröfste Verzögerung zwischen den Grenzen der totalen Zurückstrahlung liegt, und ihre Gröfse von den

den Brechungsverhältnissen der beiden Mittel abhängt, an deren Grenze die Reflexion stattfindet.

Da elliptisch-polarisirtes Licht nur dann linear polarisirt wird, wenn der Gangunterschied irgend eine Anzahl halber Undulationen beträgt, und die lineare Polarisation durch zwei Reflexionen unter dem Polarisationswinkel hergestellt wird, so muſs der Gangunterschied nach einer Reflexion unter diesem Winkel eine Viertel-Undulation sein.

Ist δ die Zahl der Wellenlängen, um welche der eine Strahl hinter dem anderen zurückbleibt, so ist allgemein für jeden Einfallswinkel α, wenn α' der aus dem im obigen Sinne genommenen Brechungsverhältniſs berechnete Brechungswinkel ist, $cotg\, \pi\delta = tang\, \alpha\, tang\, \alpha'$.

Zerlegt man die Schwingungen des durch die zweite Reflexion wiederum geradlinig polarisirten Strahls nach der Reflexions-Ebene und senkrecht darauf, so hat man das Verhältniſs der Schwingungsweiten dieser beiden Componenten. Es läſst sich also aus der Lage der Polarisations-Ebene auf die Gröſse des Verhältnisses $R_p : R_s$ schlieſsen.

Die von Brewster gemessenen Polarisationswinkel, und die Azimuthe der Polarisations-Ebene des Lichts nach der zweiten Reflexion, für den Fall, daſs das einfallende Licht im Azimuth von 45° polarisirt ist, sind folgende:

Substanzen.	Polarisationsw.	Azimuth der Pol. Ebene.	Substanzen.	Polarisationsw.	Azimuth der Pol. Ebene.
Reines Silber . .	73° 0′	39° 48′	Wismuth . . .	74° 50′	21° —′
Gewöhnlich. Silber		36 —	Spiegelmetall . .	76 0	21 —
Feines Gold . .		35 —	Zink	72 30	19 10
Juvelier-Gold . .	70 45	33 —	Stahl	75 0	17 —
Kronzinn . . .	78 30	33 —	Schwefelkies . .	77 30	17 —
Messing		32 —	Antimon . . .	75 25	16 5
Weiſsblech . . .	70 50	31 —	Speiskobalt. . .		13 —
Kupfer		29 —	Glanzkobalt . .	76 56	12 30
Quecksilber . .	78 27	26 —	Blei		11 —
Platin		22 —	Bleiglanz . . .	78 10	2 —
			Eisenglanz . . .		0 —

Was den Sinn betrifft, in welchem die Azimuthalwinkel zu nehmen sind, so liegen die Polarisations-Ebenen des

einfallenden und des doppeltreflektirten Strahls stets auf entgegengesetzten Seiten der Einfalls-Ebene.

Die ferneren Gesetze der Reflexion an Metallen sind folgende:

1) Durch jede gerade Anzahl Reflexionen unter dem Polarisationswinkel wird das Licht geradlinig polarisirt, und zwar so, dafs, wenn die Reflexions-Ebenen einander sämmtlich parallel sind, das Azimuth der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls 45°, das des reflektirten nach der zweiten Reflexion absolut genommen, $=\varphi$, nach der $2r$ten Reflexion φ' ist,

$$tang\,\varphi' = \mp tang^r\varphi$$

wird, wo man das (+) oder (—) Zeichen zu nehmen hat, je nachdem r eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Ist dagegen das einfallende Licht im Azimuth a polarisirt, so ist $tang\,\varphi' = \mp tg\,a\,tg^r\varphi$.

2) Für jeden Einfallswinkel α_1, welcher gröfser als der Polarisationswinkel ist, giebt es eine Zahl Reflexionen, nach denen, wenn die Einfallswinkel dieselben und die Reflexions-Ebenen parallel bleiben, das Licht linear polarisirt ist; und jedem solchen Einfallswinkel entspricht ein anderer, α_2, welcher kleiner als der Polarisationswinkel ist und unter welchem nach einer gleichen Anzahl Reflexionen die lineare Polarisation hergestellt wird. Die Summe der Verzögerungen in den correspondirenden unter α_1 und α_2 reflektirten Strahlen beträgt jedesmal eine ganze Zahl halber Wellenlängen.

Ist r die kleinste Zahl der nöthigen Reflexionen, so ist für den einen Einfallswinkel $\delta = \frac{1}{2r}$, für den anderen $\delta = \frac{r-1}{2r}$.

Ist ferner das Azimuth der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls 45°, das des reflektirten nach der $r$ten Reflexion unter dem Winkel α_1, gleich φ', nach 2 Reflexionen unter dem Polarisationswinkel gleich φ, und setzt man

$tg\,\beta' = \sqrt{tg\,\varphi}$ und $tang\,\beta = \sqrt[r]{tg\,\varphi'}$, so ist allgemein

$$tang\,2\beta = \frac{tang\,2\beta'}{sin\,2\pi\delta},$$

so daſs also die Azimuthe für α_1 und α_2 einander gleich sind. Sie liegen aber auf verschiedenen Seiten der Einfalls-Ebene, wenn r eine ungerade Zahl ist. Wenn jedoch das einfallende Licht im Azimuthe a polarisirt ist, und φ'' das zugehörige Azimuth des reflektirten Strahls ist, so hat man $tg\,\varphi'' = tg\,a\,tg\,\varphi'$.

3) Wenn ein Lichtstrahl, der nach einer beliebigen Richtung polarisirt ist, unter einem beliebigen Winkel reflektirt ist, so läſst sich für jede gegebene Neigung der Reflexions-Ebenen gegen einander, ein Einfallswinkel finden, unter welchem das Licht nach der zweiten Reflexion linear polarisirt wird. Man darf nämlich nur den Einfallswinkel so wählen, daſs die zugehörige Verzögerung die nach der ersten Reflexion erhaltene zu einer halben Undulation ergänzt.

4) Ein linear-polarisirter Lichtstrahl wird durch zwei Reflexionen an verschiedenen Metallen, wenn sie unter den resp. Polarisationswinkeln geschehen, wiederum linear polarisirt. Ist das Polarisationsazimuth des einfallenden Strahls 45°, so ist das neue Azimuth dem arithmetischen Mittel derjenigen nahe gleich, unter denen der doppelt reflektrirte Strahl polarisirt sein würde, wenn beide Reflexionen an den einzelnen Metallen geschähen, vorausgesetzt jedoch, daſs die Reflexions-Ebenen zusammenfallen.

Wird die lineare Polarisation nach r Reflexionen an r verschiedenen Metallen in derselben Ebene wiederhergestellt, so ist, wenn φ_1, φ_2, φ_3 ... für die resp. Metalle diejenigen Azimuthe bedeuten, welche bisher durch φ bezeichnet sind, und φ' das neue Azimuth ist, strenge

$$tg\,\varphi' = \pm\sqrt[r]{tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2\,tg\,\varphi_3\,\ldots}$$

Daſs sich jeder durch Totalreflexion circular- oder elliptisch-polarisirte Strahl durch Metallreflexion linear polarisiren lasse, ist für sich klar. Der Einfallswinkel läſst sich aus dem Vorigen bestimmen, wenn man die Verzögerung durch die Totalreflexion berechnet hat. Eben so erhält man sogleich das Azimuth aus der vorigen Formel,

wenn man für den Fall, dafs das Licht circular-polarisirt war, das der Circular-Polarisation entsprechende Azimuth φ_1, $= 45^0$ gesetzt hat.

Da der Polarisationswinkel derjenige Winkel ist, für welchen die Verzögerung eine Viertel-Wellenlänge beträgt, und die Wellenlänge von der Farbe abhängt, so mufs derselbe für jede Farbe ein anderer sein. In der That zeigen die Untersuchungen, dafs das Zerstreuungsvermögen der Metalle (welches von dem Gange der Verzögerungen abhängt) auffallend grofs ist. Beim Silber ist der Polarisationswinkel für die mittleren gelben Strahlen 73^0, für die rothen $75\frac{1}{2}$ und für die blauen $70\frac{1}{2}$. Läfst man daher weifses, im Azimuth 45^0 polarisirtes Licht von parallelen Silberplatten unter dem Polarisationswinkel der blauen Strahlen, $70\frac{1}{2}^0$, reflektiren, und sieht durch ein Nicol'sches Prisma oder einen Turmalin auf die letzte Platte in der Richtung des reflektirten Strahls, dreht alsdann das Prisma oder den Turmalin so, dafs die Polarisationsrichtung des gewöhnlichen Strahls (in welcher kein Licht durchgelassen wird) in das Azimuth $-39^0\ 48'$, welches der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls entspricht, zu liegen kommt, so verschwindet nicht sämmtliches Licht, sondern nur das blaue, und die rothen bleiben sichtbar. Unter dem Polarisationswinkel der gelben Strahlen (73^0) verschwinden nur diese, und die blauen und rothen vereinigen sich zu einem Bilde. Unter dem Polarisationswinkel der rothen Strahlen herrscht wiederum das Blau vor.

Bei einer andern Incidenz und bei einer beliebigen Stellung des Turmalins hängt die Farbe des Bildes von der Lage und dem Gröfsenverhältnifs der Axen der elliptischen Bahnen gegen die Polarisationsrichtung des Turmalins ab, und läfst sich aus den Werthen der Verzögerungen für die verschiedenen Brechungsverhältnisse vorher bestimmen. Im Allgemeinen wird die Farbe um so gemischter sein, je weiter die Bahn der mittleren Strahlen sich von der Geradlinigkeit entfernt, und je mehr sich die Polarisationsrichtung des Turmalins der Richtung der grofsen

Axe der elliptischen Bahnen nähert. Für Silber fand Brewster bei der Stellung des Turmalins im Azimuth von -39° 48′ folgende Farben für die verschiedenen Incidenzen:

Von $0_0 - 63^\circ$ Weifs, welches sich mehr oder weniger ins Blafsgelb zieht.
64° blafsgelb
65° blafs Safrangelb
66° Safrangelb
67° blafs Orange
68° Orange
69° röthlich Orange
70° Ziegelroth
70½ Zinnober
71° Scharlach
72° hell Nelkenroth
73° dunkel Nelkenroth
74° dunkel Chinablau
75° Indigo
75½° rein Hellblau
76° blafs Blau
77° weifslich Blau
78° bläulich Weifs
79—90° allmälig weifswerdend.

Was das Verhältnifs der Farbenzerstreuung zu derjenigen betrifft, welche bei der Brechung in durchsichtigen Mitteln eintritt, so sieht man augenblicklich, dafs die Strahlen, welche in der letztern am stärksten gebrochen werden, sich wie die am wenigsten brechbaren verhalten, und umgekehrt, so dafs z. B. die blauen Strahlen bei kleineren Einfallswinkeln dieselben Verzögerungen erleiden, als die rothen bei gröfseren Einfallswinkeln.

Anmerkung. Was die Original-Abhandlungen in den *Philosophical Transactions* 1830 und im *Edinburgh Journal of science, new series* 1831 betrifft, so ist dasjenige, was Brewster daselbst elliptische Polarisirung nennt, die Polarisation in derjenigen elliptischen Bahn, für welche die Verzögerung $\delta = \frac{1}{4}$, die Excentricität der Ellipse also in ihrem Minimum ist. Da die Gesammtverzögerung zur Herstellung der linearen Polarisation eine halbe Undulation sein mufs, so werden, wenn r unter demselben Winkel ausgeführte Reflexionen an demselben Metall zu dieser Wiederherstellung nothwendig sind, $\frac{1}{2}r$ Reflexionen zur elliptischen Polarisation im Brewster'schen Sinne nöthig sein. Läfst man bei einer $r$maligen Reflexion die Einfalls-

winkel allmälig von 0° bis 90° wachsen, so kommt man auf Incidenzen, unter denen das Licht linear polarisirt wird, und deren Zahl um so gröſser ist, je gröſser man r nimmt. Die Punkte, welche solchen Incidenzen entsprechen, nennt Brewster Knoten oder Rückkehrpunkte. Zwischen je zwei Knoten giebt es einen Punkt (d. h. einen Einfallswinkel), wo die Elipticität der Bahn ihr Minimum erreicht (d. h. $\delta = \frac{1}{4}$ wird). Durch die verschiedene Lage der Knoten für die verschiedenen Farben läſst sich graphisch die Färbung der Bilder, welche man durch einen Turmalin (oder ein Nicol'sches Prisma) erblickt, veranschaulichen.

Zweite Abtheilung.

Analytische Entwickelung der allgemeinen Gesetze der Reflexion und Refraction.

A. *Gesetze für einfachbrechende Mittel.*

Die Grundsätze, auf denen die Entwickelung der Gesetze der Reflexion und Refraction an der Grenze vollkommen durchsichtiger Körper aus den Principien der Wellentheorie beruht, sind 1) das Princip der Gleichheit der Bewegung des Aethers an jener Grenze, und 2) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Das erste Princip ist nichts anders als der Ausdruck einer innigen Verbindung des in beiden Mitteln enthaltenen Aethers, so dafs nicht blofs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der Grenze in beiden Mitteln dieselbe ist, sondern dafs auch die Bewegung der Grenztheilchen, wie sie aus den Bewegungen im ersten Mittel, d. h. in dem einfallenden und reflektirten Wellensysteme resultirt, der Gröfse und Richtung nach mit der Bewegung im zweiten Mittel coincidirt. Was den ersten Umstand betrifft, so denke man sich (Fig. 22.) *AB* als Durchschnitt der Grenze der beiden Mittel, *Sa*, *Sb* als zwei in der Zeit auf einander folgender Wellen-Ebenen des durch einen Lichtpunkt erzeugten einfallenden ebenen Wellensystems, und *sb*, *rb* als die der einfallenden Wellen-Ebene *Sb* entsprechenden reflektirten und gebrochenen Wellen-Ebenen. Dem Princip zufolge kommt alsdann die Bewegung in dem reflektirten und gebrochenen Wellensystem zu derselben Zeit in *a* an, in welcher das einfallende daselbst ankommt. Aus dieser gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der drei Wellensysteme (oder der fünf Wellensysteme, wenn beide Mittel doppelbrechend sind, wo alsdann zwei reflektirte und zwei

gebrochene Systeme entstehen) folgt, wie wir aus dem Vorhergehenden gesehen haben, das die Lage der ebenen Wellensysteme bestimmende Reflexions- und Refractionsgesetz, nämlich: dafs sich die Sinus der Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel, wie die respectiven Fortpflanzungs-Geschwindigkeiten in der Richtung der Normalen der Wellensysteme verhalten. Ist z. B. α der Einfallsw., α_1 der Reflexionsw., α' der Brechungsw., und ω, ω_1, ω' resp. die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit in den drei Systemen, so ist $\sin\alpha : \omega = \sin\alpha_1 : \omega_1 = \sin\alpha' : \omega'$. Sind beide Mittel einfachbrechend, so ist $\omega = \omega_1$ und es folgt $\alpha = \alpha_1$.

Der zweite Umstand, nämlich die Uebereinstimmung der Molekularbewegung in beiden Mitteln führt auf Beziehungen zwischen den Schwingungsweiten und somit zwischen den Intensitäten der drei Wellensysteme.

Um diese Beziehungen festzustellen, denke man sich sämmtliche Schwingungsbewegungen im Einfallspunkt zerlegt 1) nach dem Loth auf der Einfalls-Ebene, 2) nach dem Einfallsloth, 3) nach der Linie, in welcher die Einfalls-Ebene die Grenz-Ebene schneidet.

Ist der nach dem Loth auf der Einfalls-Ebene zerlegte Theil der Vibrations-Intensitäten im einfallenden, reflektirten und gebrochenen Wellensystem (also der senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirte Theil) resp. P, R_p, R_p', und der nach der Einfalls-Ebene zerlegte Theil resp. S, R_s, R_s', so giebt die Gleichheit der Bewegung in der Richtung des Loths auf der Einfalls-Ebene:

$$\text{I.} \quad P + R_p = R_p',$$

in der Richtung des Einfallslothes:

$$\text{II.} \quad (S + R_s)\sin\alpha = R_s'\sin\alpha',$$

in der Richtung der dritten Componente:

$$\text{III.} \quad (S - R_s)\cos\alpha = R_s'\cos\alpha'.$$

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte läfst sich, da die Intensität des Lichts durch die lebendige Kraft (d. h. durch das Produkt der Masse in das Quadrat der (Molekular-) Geschwindigkeit) gemessen wird, so aussprechen: die Intensität des einfallenden Wellensy-

stems ist gleich der Summe der Intensitäten des reflektirten und gebrochenen.

Ist die Dichtigkeit des Aethers in allen Mitteln gleich, also nur die Elasticität in ihnen verschieden, wie es die Erklärung der optischen Erscheinungen aus Wellenbewegungen zu erfordern scheint, so darf man statt der Masse (worunter hier die Masse derjenigen Aethertheilchen zu verstehen ist, welche durch eine und dieselbe Undulation in den respectiven Wellensystemen in Bewegung gesetzt wird) die entsprechenden Volumina setzen. Ist (Fig. 22.) AB der Durchschnitt der Grenz-Ebene mit der Einfalls-Ebene, und sind Sa, Sb zwei Normalen des einfallenden Wellensystems, sa, sb und ra, rb die entsprechenden Normalen des reflektirten und gebrochenen Systems, und am, bn, bv resp. senkrecht auf Sa, sa, ra, so dafs am, bn, bv Durchschnitte von Well-Ebenen der drei Systeme sind, so sind nab und tab die Durchschnitte der Räume des reflektirten und gebrochenen Wellensystems, über welche sich die Bewegung ausbreitet, während sie sich in dem einfallenden System über einen Raum verbreitet, dessen Durchschnitt mab ist; die Massen verhalten sich daher, wie $am.mb : na.nb : va.vb$, d. h. da $\angle mba = \angle nab = \alpha$, und $\angle abv = \alpha'$ ist, wie $\sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha\cos\alpha : \sin\alpha'\cos\alpha'$.

Die Quadrate der Geschwindigkeit (d. h. der Vibrations-Intensitäten) sind aber resp. P^2+S^2, $R_p^2+R_s^2$, $R_p'^2+R_s'^2$; folglich ist die Gleichung, welche das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte liefert,

$$(P^2+S^2-R_p^2-R_s^2)\sin\alpha\cos\alpha = (R_p'^2+R_s'^2)\sin\alpha'\cos\alpha'.$$

Subtrahirt man das Produkt der Gleichungen (II. und III.) von derselben, so reducirt sie sich auf

$$(P^2-R_p^2)\sin\alpha\cos\alpha = R_p'^2\sin\alpha'\cos\alpha',$$

und wenn man diese wiederum durch (I.) dividirt, so verliert sie ihre quadratische Form und giebt:

$$\text{IV.}\quad (P-R_p)\sin\alpha\cos\alpha = R_p'\sin\alpha'\cos\alpha' \;^{*}).$$

---

*) Die Grundformeln (I—IV.), welche die Polarisations- und Intensitätsgesetze des durch einfachbrechende Mittel reflektirten und gebrochenen

Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichtes.

Die Gröfsen R_p, R_s, R_p', R_s', welche die Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichtes, so wie die Polarisationsrichtung desselben bestimmen, finden sich durch Elimination aus den Gleichungen (I — IV.)

Lichts in sich schliefsen, lassen sich auch aus den allgemeinen Formeln (III., Abschn. I.) herleiten, wenn man das Princip der gleichen Bewegung an der Grenze beider Mittel, und ein zweites Princip zu Hilfe nimmt, welchem zufolge die senkrecht gegen die Einfalls-Ebene gerichtete Componente desjenigen Druckes, welcher durch die Verschiebung der Aethertheilchen auf die reflektirende Ebene ausgeübt wird, an der Grenze in beiden Mitteln dieselbe ist. Der Gang der Rechnung ist in Kurzem folgender:

Man substituirt für L, M, N etc. in (III., Abschn. I.) die Werthe, welche diese Gröfsen in einfachbrechenden Mitteln annehmen, vernachlässigt die senkrecht gegen die Well-Ebene ausgeführte unwirksame Molekularbewegung, und leitet, eben so wie aus (IV. ibid.) die primitiven Gleichungen (9 und 10) hergeleitet wurden, durch Integration der Gleichungen (III.) folgende Werthe für ξ, η, ζ ab:

$$(a)\quad \xi = \varphi(\varrho \pm \omega t),\quad \eta = \chi(\varrho \pm \omega t),\quad \zeta = \psi(\varrho \pm \omega t),$$

wo $\varphi(\varrho)$, $\chi(\varrho)$, $\psi(\varrho)$ die Anfangsverschiebungen (8) bedeuten. Alsdann zerlegt man die Verschiebungen nach zwei in der Well-Ebene liegenden auf einander senkrechten Richtungen, welche mit den Axen Winkel bilden mögen, deren Cosinus resp. a', b', c' und a'', b'', c'' sein mögen, und führt in (a) diese Componenten ein. Sind $\pi'(\varrho)$ und $\pi''(\varrho)$ die Anfangswerthe der Componenten, und denkt man sich ω positiv oder negativ, je nachdem man die Fortpflanzung nach der einen oder der andern Richtung der Normale bezeichnen will, so erhält man

$$(b)\quad \xi = a'\pi'(\varrho - \omega t) + a''\pi''(\varrho - \omega t),\quad \eta = b'\pi'(\varrho - \omega t) + b''\pi''(\varrho - \omega t),$$
$$\zeta = c'\pi'(\varrho - \omega t) + c''\pi''(\varrho - \omega t),$$

während man findet

$$(c)\quad \pi'(\varrho) = A\cos\varkappa\varrho + B\sin\varkappa\varrho,\quad \pi''(\varrho) = C\cos\varkappa\varrho + D\sin\varkappa\varrho,$$

wo A und C die Verschiebungen bedeuten zu der Zeit, in welcher $\varrho = \omega t$ wird, und B und D die Verschiebungen nach Verflufs einer Viertel-Undulation. Wählt man den Anfangspunkt der Zeit so, dafs B und D die Schwingungsweiten werden, so wird $A = C = 0$. Denkt man sich das betrachtete Wellensystem als dem einfallenden Licht angehörig, läfst die Axe der x mit dem Einfallsloth, also die brechende Fläche mit der Ebene yz zusammenfallen, und verlegt die durch (a', b', c') gegebene Richtung in die Einfalls-Ebene, so wird $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = 0$; $a' = \sin\alpha$, $b' = -\cos\alpha$, $c' = a'' = b'' = 0$, $c'' = 1$ (unter α den Einfallswinkel

Durch die Verbindung der Gleichungen (I. und IV.) erhält man sogleich:

$$1)\quad R_p = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha'\cos\alpha'}P = \frac{tg(\alpha-\alpha')}{tg(\alpha+\alpha')}P,$$

$$2)\quad R_p' = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}P,$$

---

verstanden), mithin $\varrho = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, und die Gleichungen ($b$) verwandeln sich in:

$$(d)\quad \begin{cases} \xi = B\sin\alpha\sin[\varkappa(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-st] \\ \eta = -B\cos\alpha\sin[\varkappa(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-st] \\ \zeta = D\sin[\varkappa(x\cos\alpha+y\sin\alpha)-st]. \end{cases}$$

Sind ξ_1, η_1, ζ_1 die Verschiebungen in dem reflektirten, und ξ', η', ζ' dieselben im gebrochenen Wellensysteme, so sind die Gleichungen, welche aus dem Princip der Gleichheit der Bewegung folgen: $\xi+\xi_1=\xi'$, $\eta+\eta_1=\eta'$, $\zeta+\zeta_1=\zeta'$ für die Grenz-Ebene beider Mittel, d. h. für $x=0$. Bezeichnet $\varkappa_1$, α_1, s_1, B_1, D_1 in Bezug auf das reflektirte Licht und $\varkappa'$, α', s', B', D' für das gebrochene Licht, dasjenige, was $\varkappa$, α, s, B, D für das einfallende Licht bedeutet, und wird durch die Reflexion und Brechung keine Gangverschiedenheit in den drei Wellensystemen bewirkt, so daſs die den Gröſsen A und C entsprechenden Werthe der zwei andern Systeme mit A und C zugleich verschwinden (wie es bei durchsichtigen Mitteln stets der Fall ist, wenn die Reflexion keine totale wird), so wird aus den letzten Gleichungen:

$$B\sin\alpha\sin[\varkappa y\sin\alpha - st] + B_1\sin\alpha_1\sin[\varkappa_1 y\sin\alpha_1 - st] = B'\sin\alpha'\sin[\varkappa' y\sin\alpha' - s't]$$

$$B\cos\alpha\sin[\varkappa y\sin\alpha - st] + B_1\cos\alpha_1\sin[\varkappa_1 y\sin\alpha_1 - st] = B'\cos\alpha'\sin[\varkappa' y\sin\alpha' - s't]$$

$$D\sin[\varkappa y\sin\alpha - st] + D_1\sin[\varkappa_1 y\sin\alpha_1 - st] = D'\sin[\varkappa' y\sin\alpha' - s't].$$

Da diese Gleichungen für jeden Werth von y und t erfüllt sein müssen, so folgt aus ihnen: 1) $\varkappa=\varkappa_1$ und $\sin\alpha=\sin\alpha_1$, und weil für $\omega=\omega'$ auch $\sin\alpha=\sin\alpha'$ und $\cos\alpha=\cos\alpha'$ werden muſs, so folgt auch $\cos\alpha = -\cos\alpha_1$. 2) $\varkappa\sin\alpha = \varkappa'\sin\alpha'$. 3) $s=s'$. 4) $(B-B_1)\sin\alpha = B'\sin\alpha'$, $(B+B_1)\cos\alpha = B'\cos\alpha'$, $D+D_1=D'$.

Die Gleichungen No. 1. enthalten das Reflexionsgesetz, die Gleichung No. 2. enthält das Brechungsgesetz, die Gleichung No. 3. spricht das Gesetz aus, daſs sich die Farbe durch die Brechung nicht ändert, und die Gleichungen No. 4. sind die Gleichungen (I—III.) dieses Abschnittes.

Das Princip des gleichen Drucks gegen die brechende Ebene, in der gegen die Einfalls-Ebene senkrechten Richtung führt auf

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)\omega^2 = \frac{\partial\zeta'}{\partial x}\omega'^2,$$

und durch die Verbindung der Gleichungen (II. und III.)

$$3)\quad R_s = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}S,$$

$$4)\quad R_s' = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}S.$$

Da sich die Massen der einfallenden, reflektirten un gebrochenen Wellensysteme beziehlich wie $1:1:\frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha}$ verhalten, so sind die Intensitäten der letzten zwei System

$$\text{V.}\quad R_p^2+R_s^2 = \frac{tg^2(\alpha-\alpha')}{tg^2(\alpha+\alpha')}P^2+\frac{\sin^2(\alpha-\alpha')}{\sin^2(\alpha+\alpha')}S^2,$$

$$\text{VI.}\quad (R_p'^2+R_s'^2)\frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos^2(\alpha-\alpha')}P^2 + \frac{\sin 2\alpha\sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha+\alpha')}S^2$$

Ist φ das Azimuth der Polarisations-Ebene des ein fallenden Lichts (d. h. der Winkel, welchen diese Eben mit der Einfalls-Ebene bildet), und I^2 dessen Intensitä so hat man $P = I\sin\varphi$, $S = I\cos\varphi$, und $tg\,\varphi = \frac{P}{S}$.

War das Einfallslicht senkrecht gegen die Einfall Ebene polarisirt, also $S = 0$, so wird die Intensität de reflektirten und gebrochenen Lichtes, wenn man jene durc R^2, diese durch R'^2 und das Brechungsverhältniss durch bezeichnet,

$$5)\quad R^2 = P^2\frac{tg^2(\alpha-\alpha')}{tg^2(\alpha+\alpha')} = P^2\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-n^2\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}+n^2\cos\alpha}\right)^2$$

---

und hieraus folgt, da $\varkappa\sin\alpha = \varkappa'\sin\alpha'$ ist,

$$(D-D_1)\sin\alpha\cos\alpha = D'\sin\alpha'\cos\alpha',$$

welches die Gleichung (IV.) ist. Man vergleiche hierüber Cauchy's M moire *sur la dispersion p.* 51 *et seqq.*, und *Bulletin des sciences XI p.* 6. Neumann, welcher denselben Gegenstand Pogg. Ann. XL, p. 5 behandelte, stellte direkt die Gleichungen (d) als Integralformen derjenig Navier'schen Differenzialgleichungen hin, welche den Gleichungen (II Abschn. I.) entsprechen.

$$6)\quad R'^2 = P^2 \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos^2(\alpha-\alpha')}$$
$$= P^2\left(\frac{2n^2\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}+n^2\cos\alpha}\right)^2.$$

Für Licht, welches nach der Einfalls-Ebene polarisirt einfällt, erhält man wegen $P=0$,

$$7)\quad R^2 = S^2\frac{\sin^2(\alpha-\alpha')}{\sin^2(\alpha+\alpha')} = S^2\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}+\cos\alpha}\right)^2,$$

$$8)\quad R'^2 = S^2\frac{\sin 2\alpha\sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha+\alpha')} = S^2\left(\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}+\cos\alpha}\right)^2,$$

Unpolarisirtes Licht läfst sich als eine schnelle Aufeinanderfolge nach allen möglichen Richtungen polarisirten Lichtes betrachten, und zwar so, dafs innerhalb einer sehr kleinen Zeit nach jeder Richtung gleich viel und gleich starke Schwingungen erfolgen. Bleibt daher das erzeugende Licht sich selbst an Intensität gleich, so kann man sich sämmtliche Schwingungen, die innerhalb jener Zeit ausgeführt sind, nach zwei auf einander senkrechten Richtungen zerlegt denken, welche von gleicher Intensität sein werden. Wählt man diese Zerlegungsrichtungen so, dafs der Winkel zwischen ihnen von der Einfalls-Ebene halbirt wird, so hat man zwei Wellensysteme, von denen das eine im Azimuth $+45^0$, das andere im Azimuth -45^0 polarisirt ist. Man erhält daher die Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichtes aus (V. und VI.), wenn man darin $S^2 = P^2 =$ der Intensität des Einfallslichtes setzt.

Im Allgemeinen nimmt bei unpolarisirt einfallendem Lichte die Intensität des reflektirten Lichtes mit der Schiefe der Incidenz zu, die Intensität des gebrochenen dagegen ab, so dafs bei einem Einfallswinkel von 90^0 endlich alles Licht reflektirt wird, und das gebrochene ganz verschwindet.

Der Grund erhellt sogleich aus der Betrachtung der Formeln (V. und VI.).

Wenn nämlich der Einfallswinkel von 0^0 bis 90^0 wächst, so ergiebt sich aus der Gleichung (V.) in Bezug

auf das reflektirte Licht, daſs das zweite Glied des Intensitätsausdruckes

$$\text{von } \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 S^2 \text{ bis } S^2$$

stetig wächst, daſs dagegen das erste Glied desselben Ausdrucks

$$\text{von } \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 P^2 \text{ bis } 0$$

stetig abnimmt, wenn α von 0 bis $90-\alpha'$ wächst, und

$$\text{von } 0^0 \text{ bis } P^2$$

stetig zunimmt, wenn α von $90-\alpha'$ bis 90^0 wächst.

Ist daher $S^2=0$, d. h. ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, so wird gar kein Licht reflektirt, sobald zugleich $\alpha=90^0$, der Einfallswinkel also gleich dem Polarisationswinkel ist.

Was dagegen die Intensität des gebrochenen Lichtes betrifft, so kann, wie aus der Gleichung (VI.) erhellt, der Ausdruck zur Rechten nie verschwinden, wenn nicht $\alpha=90^0$ ist. Die Intensität nimmt daher mit zunehmender Schiefe der Incidenz

$$\text{von } \frac{4}{(1+n)^2}(P^2+S^2) \text{ bis } 0$$

stetig ab.

Vollständige und partielle Polarisation durch Reflexion.

Bezeichnet man das Azimuth der Polarisations-Ebene des reflektirten Lichtes durch φ_1 und das Azimuth des einfallenden wiederum durch φ, so hat man

$$\text{VII.} \quad tg\,\varphi_1 = \frac{R_p}{R_s} = \frac{\cos(\alpha+\alpha')}{\cos(\alpha-\alpha')}\,tg\,\varphi.$$

Da stets $\cos(\alpha+\alpha')<\cos(\alpha-\alpha')$ ist, so ist durchgängig $\varphi_1<\varphi$; es wird also die Polarisations-Ebene durch die Reflexion der Einfalls-Ebene zu gedreht. Diese Dre-

hung ist um so stärker, je kleiner $cos(\alpha+\alpha')$, d. h. je näher $\alpha+\alpha'=90^0$ ist. Ist $\alpha+\alpha'$ genau 90^0, so wird $\varphi=0$; das Licht ist mithin in diesem Fall vollständig nach der Einfalls-Ebene polarisirt, wie auch das einfallende Licht polarisirt sein mag, mithin auch, wenn dasselbe unpolarisirt war. Da $\alpha+\alpha'=90^0$ auf $tg\alpha=\frac{1}{n}$ führt, also α für jeden Werth von n einen reelen Werth hat, so giebt es für jedes Medium einen Einfallswinkel α (einen Polarisationswinkel), unter welchem homogenes unpolarisirtes Licht durch Reflexion an einem einfachbrechenden Mittel vollständig und zwar nach der Einfalls-Ebene polarisirt wird. Weifses Licht kann nie ganz vollständig polarisirt werden, da die nöthige Incidenz α mit n variirt.

Läfst man Licht, welches ursprünglich im Azimuth φ polarisirt ist, m mal hinter einander unter einem und demselben Winkel α reflektiren, und zwar so, dafs sämmtliche Reflexionen in derselben Ebene geschehen, so erhält man aus (VII.), wenn man das Azimuth der Polarisations-Ebene nach der letzten Reflexion φ_m nennt,

$$tg\varphi_m=\frac{cos^m(\alpha+\alpha')}{cos^m(\alpha-\alpha')}tg\varphi.$$

Es ist daher φ um so näher gleich Null, je gröfser m ist, d. h. das Licht ist um so näher nach der Einfalls-Ebene polarisirt, je gröfser die Zahl der Reflexionen ist.

Denkt man sich unpolarisirtes Licht als gleichbedeutend mit zwei Wellensystemen, welche in den Azimuthen $+45^0$ und -45^0 gegen die Einfalls-Ebene polarisirt sind, so mufs man sich das reflektirte Licht wiederum aus zwei Wellensystemen bestehend denken, deren Azimuth nach der ersten Reflexion bestimmt ist durch

$$tg\varphi_1=\pm\frac{cos(\alpha+\alpha')}{cos(\alpha-\alpha')},$$

und nach der $m$ten Reflexion durch

$$tg\varphi_m=\pm\frac{cos^m(\alpha+\alpha')}{cos^m(\alpha-\alpha')}.$$

Die Polarisations-Ebenen sind also unter einem Winkel, welcher kleiner als 45° ist, gegen die Einfalls-Ebene geneigt, und fallen um so näher mit dieser letzten, also auch mit einander zusammen, je gröfser m ist.

Man nennt solches Licht, welches man als aus zwei Wellensystemen bestehend betrachten kann, deren Polarisations-Ebenen einen spitzen Winkel mit einander bilden, partiell polarisirt. Diese partielle Polarisation nähert sich demnach der vollständigen um so mehr, je gröfser m ist, je näher $\alpha+\alpha'=90^0$, d. h. je näher die Incidenz dem Polarisationsw. ist, und je gröfser $cos(\alpha-\alpha')$ ist, d. h. je schiefer die Incidenz und je gröfser die brechende Kraft des reflektirenden Mittels ist.

Zerlegt man das partiell polarisirte Licht nach der Einfalls-Ebene und senkrecht auf dieselbe, so kann man die letzte Componente mit einem gleich grofsen Theil der ersten zu unpolarisirtem Licht vereinigt denken, so dafs jenes sich vorstellen läfst als bestehend aus einem Theil unpolarisirten und einem Theil (nach der Einfalls-Ebene) polarisirten Lichtes.

Was die Quantität des Lichtes betrifft, welche nach der letzten Vorstellungsweise vollständig polarisirt wird, so hat man, wenn R^2 die Quantität des gesammten reflektirten Lichtes, also $R^2 cos^2\varphi_1$ der nach der Einfalls-Ebene, $R^2 sin^2\varphi_1$ der senkrecht darauf polarisirte Theil ist, als Ueberschufs des ersten, also als Menge des polarisirten Antheils $R^2(cos^2\varphi_1-sin^2\varphi_1)$ oder $R^2(1-2sin^2\varphi_1)$.

Aus (VII.) findet man

$$sin^2\varphi_1=\frac{cos^2(\alpha+\alpha')tg^2\varphi}{cos^2(\alpha-\alpha')+cos^2(\alpha+\alpha')tg^2\varphi},$$

so dafs man für die polarisirte Lichtmenge erhält, wenn man für R^2 den Werth aus (V.) substituirt, und das einfallende Licht $=1$, also $P^2=sin^2\varphi$ und $S^2=cos^2\varphi$ setzt,

$$\left(\frac{sin^2(\alpha-\alpha')}{sin^2(\alpha+\alpha')}cos^2\varphi+\frac{tg^2(\alpha-\alpha')}{tg^2(\alpha+\alpha')}sin^2\varphi\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2cos^2(\alpha+\alpha')tg^2\varphi}{cos^2(\alpha-\alpha')+cos^2(\alpha+\alpha')tg^2\varphi}\right).$$

Par-

Partielle Polarisation durch Brechung.

Bedeutet φ' das Azimuth der Polarisations-Ebene des gebrochenen Lichtes, so hat man aus (2. und 4.)

$$\text{VIII.}\quad tg\,\varphi' = \frac{R_p'}{R_s'} = \frac{1}{cos(\alpha-\alpha')}tg\,\varphi.$$

Da φ' für keinen Werth von α unabhängig von φ ist, so kann unpolarisirtes Licht durch einfache Brechung nie vollständig polarisirt werden. Da aber $cos(\alpha-\alpha')<1$ ist, so wird stets $\varphi'>\varphi$, und zwar um so mehr, je gröfser α ist. Die Polarisations-Ebene wird also von der Einfalls-Ebene durch die Brechung entfernt. Ist das Licht unpolarisirt, also identisch mit zwei Wellensystemen, die in den Azimuthen $+45^0$ und -45^0 polarisirt sind, so nähern sich daher die beiden resultirenden Polarisations-Ebenen dem Azimuthe $+90^0$ und -90^0, und bilden wiederum einen spitzen Winkel unter sich. Das Licht wird sonach partiell polarisirt, und läfst sich als bestehend denken aus einem Theil unpolarisirten Lichtes, und einem Theil, welcher senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist.

Ist die Lichtstärke des einfallenden Lichtes gleich Eins, die des reflektirten R^2, so ist die des gesammten gebrochenen $1-R^2$, also der Ueberschufs des senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirten Theils über den nach dieser Ebene polarisirten, d. h. der vollständig polarisirte Theil des gebrochenen Lichts $(1-R^2)(1-2cos^2\varphi')$, oder, wenn man für $cos\,\varphi'$ seinen Werth aus (VIII.) setzt,

$$(1-R^2)\left(1-\frac{2\,cos^2(\alpha-\alpha')}{1+cos^2(\alpha-\alpha')\,tg^2\varphi}\right).$$

Vergleicht man diese Lichtmenge mit derjenigen, welche bei derselben Incidenz α durch Reflexion polarisirt wird, so findet man beide genau einander gleich. Die Menge des durch Brechung polarisirten Lichtes ist folglich gleich der durch Reflexion polarisirten Quantität.

Läfst man das Licht auf ein System von m parallelen Platten derselben einfachbrechenden Substanz fallen, und

nennt φ_m' das Azimuth der Polarisations-Ebene des austretenden Lichts, so liefert die Gleichung (VIII.):

$$tg\,\varphi'_m = \frac{1}{cos^{2m}(\alpha - \alpha')} tg\,\varphi.$$

Ist daher das einfallende Licht unpolarisirt, so wird es um so vollständiger, und zwar senkrecht gegen die Brechungs-Ebene, polarisirt, je gröfser m ist.

Total-Reflexion.

Für den Fall der totalen Reflexion, d. h. für $sin\,\alpha > n$, werden die Ausdrücke für die Intensität des reflektirten Lichtes (5, 7, V.) imaginär. Man erklärt dieses Imaginär-Werden durch die Annahme, dafs nicht alles Licht nach der Reflexion sich in derselben Phase befinde, sei es, dafs ein Theil wirklich verzögert oder von einer tieferen Stelle aus reflektirt werde.

Sondert man in (5 und 7) das Reele von dem Imaginären, so erhält man,

$$9)\quad \frac{R_p}{P} = \frac{(1+n^4)\,sin^2\alpha - n^2(1+n^2)}{(1-n^4)\left[(1+n^2)\,sin^2\alpha - n^2\right]} + \frac{2n^2 cos\,\alpha\sqrt{sin^2\alpha - n^2}}{(1-n^2)\left[(1+n^2)\,sin^2\alpha - n^2\right]}\sqrt{-1},$$

$$10)\quad \frac{R_s}{S} = \frac{2 sin^2\alpha - n^2 - 1}{1-n^2} + \frac{2 cos\,\alpha\sqrt{sin^2\alpha - n^2}}{1-n^2}\sqrt{-1},$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

$$11)\quad R_p = P(p + q\sqrt{-1}),\quad R_s = S(p_1 + q_1\sqrt{-1}).$$

Nun lassen sich die Erscheinungen bei der Total-Reflexion höchst einfach analytisch entwickeln, wenn man annimmt, dafs jede der beiden Componenten des reflektirten Lichtes, R_p und R_s von zwei Wellensystemen herrühren, die sich im Gange um eine Viertel-Undulation unterscheiden, und dafs die Vibrations-Intensitäten des ersten Paares Pp und Pq, die des zweiten Sp_1 und Sq_1 sind *).

*) Diese von Fresnel gegebene Ausdeutung der imaginären Formeln ist neuerdings durch Cauchy, welcher die betreffenden Reflexionsgesetze aus

Dies angenommen, ergiebt sich aus den Werthen für p, q, p_1, q_1, dafs $p^2+q^2=1$ und $p_1^2+q_1^2=1$ und mithin $R_p^2+R_s^2=P^2+S^2$ ist, d. h. dafs das reflektirte Licht mit dem einfallenden gleiche Intensität hat, wie es die Erfahrung bestätigt.

Bezeichnet man den Phasenunterschied der Systeme R_p und Pp durch γ, so liefert die Gleichung (XXV., Abschn. I.) $\cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, oder, da $p^2=1-q^2$ ist, $\cos\gamma=p$ und $\sin\gamma=q$.

Eben so erhält man, wenn der Phasenunterschied der Systeme R_s und Sp_1 durch δ bezeichnet wird, $\cos\delta=p_1$, $\sin\delta=q_1$.

Das reflektirte Licht ist daher zusammengesetzt aus zwei senkrecht gegen einander polarisirten Systemen, R_p und R_s, deren Phasenunterschied $\gamma-\delta$ ist, und mithin im Allgemeinen elliptisch polarisirt. Da $\cos(\gamma-\delta)=\cos\gamma\cos\delta+\sin\gamma\sin\delta$ ist, so hat man $\cos(\gamma-\delta)=pp_1+qq_1$, oder, wenn man die Werthe für p, p_1, q, q_1 substituirt,

$$12)\quad \cos(\gamma-\delta)=\frac{2\sin^4\alpha-(1+n^2)\sin^2\alpha+n^2}{(1+n^2)\sin^2\alpha-n^2}.$$

Die elliptische Polarisation geht in die lineare über (s. p. 148.), wenn $\cos(\gamma-\delta)=1$ ist. Dies tritt ein 1) für $\sin\alpha=n$, also an der ersten Grenze der Total-Reflexion, 2) für $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, also an der zweiten Grenze derselben.

Damit das reflektirte Licht circular polarisirt sei, müssen beide Componenten gleiche Intensität besitzen, und der Phasenunterschied mufs $\frac{1}{4}$ Undulation betragen, d. h. es mufs $\gamma-\delta=\frac{1}{2}(m+1)\pi$ sein. Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn $P=S$, das einfallende Licht also im Azimuth 45° polarisirt ist. Die Erfüllung der letzten Bedingung ist nicht immer möglich, da $\cos(\gamma-\delta)$ für reele Werthe von α zwischen bestimmten Grenzen eingeschlos-

---

den allgemeinen Gesetzen der Wellenbewegung herleitete, bestätigt worden. Auf dieselbe Resultate kam Neumann, welcher von den Navier'schen Formeln ausging. Pogg. Ann. XL, p. 497.

sen ist. Setzt man das Differenzial von $\cos(\gamma-\delta)$ gleich Null, um das Maximum von $\gamma-\delta$ zu bestimmen, so findet man für den zugehörigen Einfallswinkel $\sin^2\alpha=\frac{2n^2}{1+n^2}$. Das Maximum von $\gamma-\delta$ ist also bestimmt durch

$$13)\quad \cos(\gamma-\delta)=\frac{8n^2}{(1+n^2)^2}-1.$$

Es ist somit nur dann eine circulare Polarisation möglich, wenn dieses Maximum nicht kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Dieser Grenzwerth $\frac{1}{2}\pi$ wird erreicht, wenn $n=0{,}4142$, also das Brechungsverhältnifs beim Uebergang aus der Luft in die reflektirende Substanz oder $\frac{1}{n}$, $=2{,}4142$ ist. Die kreisförmige Polarisation erfordert also ein Mittel, welches das Licht mindestens so stark als der Diamant bricht. Will man durch schwächer brechende Mittel diese Polarisationsart erzeugen, so mufs man das Licht mehr als ein Mal reflektiren lassen, und zwar so oft und unter solchen Einfallswinkeln, dafs die Summe der Gangunterschiede $\frac{1}{4}$ Undulation beträgt. Um diese Einfallswinkel zu finden, bezeichne man den Cosinus des Gangunterschiedes, welchen man durch eine einzige Reflexion erzielen will, durch a, und setze in die Gleichung (12) a für $\cos(\gamma-\delta)$. Man erhält alsdann

$$14)\quad \sin^2\alpha=\tfrac{1}{4}\Big((1+n^2)(1+a)\pm\sqrt{(1+a)\left[(1+n^2)(1+a)-8n^2\right]}\Big),$$

mithin zwei Werthe für α, welche nur dann in einen einzigen zusammenfallen, wenn a das oben erwähnte Maximum des Gangunterschiedes ist.

Für $\gamma-\delta=\frac{1}{4}\pi$ erhält man aus (14) die beiden Einfallswinkel, unter welchen nach zweimaliger Reflexion, für $\gamma-\delta=\frac{1}{2m}\pi$ die beiden Einfallswinkel, unter denen nach $m$maliger Reflexion circulare Polarisation erzeugt werden kann.

B. *Gesetze für die einaxigen Krystalle.*

Richtung der gebrochenen Strahlen.

Bei den folgenden Untersuchungen möge ein rechtwinkliches Coordinatensystem zum Grunde gelegt werden, welches so liegt, dafs die Axe der z mit der optischen Axe zusammenfällt, und die Axe der y in der brechenden Ebene liegt.

Man bezeichne die Cosinus der Winkel, welche die Axen der z, y, x beziehlich mit dem Einfallsloth bilden, durch B, C, D (wo also $C=0$ ist); die Cosinus der Winkel, welche diese Axen mit den Normalen der ebenen Wellensysteme bilden, durch b, c, d; β, γ, δ; β', γ', δ'; β'', γ'', δ'', je nachdem diese Wellensysteme dem einfallenden, dem reflektirten, dem gewöhnlich gebrochenen oder dem ungewöhnlich gebrochenen Lichte angehören. Das Azimuth der Einfalls-Ebene (welche mit der Reflexions-Ebene und der Brechungs-Ebene der gebrochenen Planwellen stets zusammenfällt) d. h. der Winkel zwischen der Einfalls-Ebene und dem Hauptschnitt, sei a.

Alsdann findet man sogleich aus dem körperlichen Dreieck (Fig. 32.), welches aus der optischen Axe OZ, dem Einfallsloth OL und der Normale ON der betreffenden Wellen-Ebene gebildet wird, wenn α den Einfallsw., α' den Brechungsw. der gewöhnlich gebrochenen; α'' den der ungewöhnlich gebrochenen Wellen-Ebene bedeutet:

$$
1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
b = B\cos\alpha - D\sin\alpha\cos a, & c = \sin\alpha\sin a, \\
\beta = B\cos\alpha + D\sin\alpha\cos a, & \gamma = -\sin\alpha\sin a, \\
\beta' = B\cos\alpha' - D\sin\alpha'\cos a, & \gamma' = \sin\alpha'\sin a, \\
\beta'' = B\cos\alpha'' - D\sin\alpha''\cos a, & \gamma'' = \sin\alpha''\sin a, \\
\quad d = D\cos\alpha + B\sin\alpha\cos a, & \\
\quad \delta = D\cos\alpha - B\sin\alpha\cos a, & \\
\quad \delta' = D\cos\alpha' + B\sin\alpha'\cos a, & \\
\quad \delta'' = D\cos\alpha'' + B\sin\alpha''\cos a, &
\end{array}\right.
$$

wo α' und α'', wenn wir, um einen bestimmten Fall vor

Augen zu haben, einen negativen Krystall zum Grunde legen, bestimmt sind (Seite 82.) durch die Gleichungen:

$$2)\quad \sin^2\alpha' = \mu^2 \sin^2\alpha,$$

$$3)\quad \sin^2\alpha'' = [\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2]\sin^2\alpha,$$

von deren zwei Wurzeln jedesmal die positive zu nehmen ist.

Die Richtung des ungewöhnlichen Strahls, welcher mit den Axen Winkel bilden möge, deren Cosinus u, v, w sind, ist der Radius Vektor der ellipsoidischen Wellenfläche

$$\frac{x^2+y^2}{\pi^2} + \frac{z^2}{\mu^2} = 1,$$

welcher nach dem Berührungspunkt mit der Well-Ebene, deren Gleichung

$$\beta''x + \gamma''y + \delta''z = 0$$

ist, geht. Für den Berührungspunkt hat man

$$-\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\pi^2}{\mu^2}\cdot\frac{z}{x} = \frac{\delta''}{\beta''}$$

$$-\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\pi^2}{\mu^2}\cdot\frac{z}{y} = \frac{\delta''}{\gamma''}.$$

Da nun die Gleichungen des Radius Vektors

$$x = \frac{u}{w}z,\quad y = \frac{v}{w}z$$

sind, so erhält man:

$$\mu = \frac{\pi^2\beta''}{T},\quad v = \frac{\pi^2\gamma''}{T},\quad w = \frac{\mu^2\delta''}{T},$$

während $T^2 = (\beta''^2 + \gamma''^2)\pi^4 + \delta''^2\mu^4$ ist.

Nennt man den Winkel zwischen dem ungewöhnlichen Strahl und seiner Normale q, so hat man ferner

$$\cos q = u\beta'' + v\gamma'' + w\delta'',$$ also

$$\cos q = \frac{(\beta''^2 + \gamma''^2)\pi^2 + \mu^2\delta''^2}{T},$$ oder da

$\beta''^2 + \gamma''^2 = 1 - \delta''^2$ ist,

$$4)\quad \cos q = \frac{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2}{T},$$

und hieraus

$$5)\quad \tang q = \pm\frac{(\pi^2 - \mu^2)\delta''\sqrt{1-\delta''^2}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2}.$$

Denkt man sich in (Fig. 32.) unter OZ die Axe, unter OL den Strahl, und unter ON seine Normale, so dafs $LON = q$, $\cos NOZ = \delta''$, $\cos LOZ = w$ ist, so findet man

$$\cos ZNL = \frac{w - \delta'' \cos q}{\sqrt{1-\delta''^2} \sin q},$$

und da
$$\sin q = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\delta''\sqrt{1-\delta''^2}}{T}$$

ist, $\cos ZNL = -1$, also $ZNL = 180^0$. Es liegt mithin der ungewöhnliche Strahl in der durch seine Normale und die Axe gehenden Ebene.

Beziehungen, die sich aus dem Princip der Gleichheit der Bewegung an der Grenze beider Mittel ergeben.

Die Vibrations-Intensität des einfallenden Lichtes parallel der Einfalls-Ebene sei S, senkrecht auf dieser Ebene P, und die entsprechenden Componenten der Molekular-Geschwindigkeit in dem reflektirten Licht seien R_s und R_p; ferner sei R' die Vibrations-Intensität in der gewöhnlich gebrochenen, R'' dieselbe in der ungewöhnlich gebrochenen Welle.

Zerlegen wir nun sämmtliche Bewegungen 1) nach dem Loth auf der Einfalls-Ebene, 2) nach dem Einfallsloth, 3) senkrecht auf die beiden letzten Richtungen, d. h. nach dem Durchschnitt der Einfalls-Ebene mit der brechenden Ebene.

1) Die Bewegungen senkrecht gegen die Einfalls-Ebene sind: in der einfallenden Welle P, in der reflektirten R_p, in der gewöhnlich gebrochenen $R' \cos \varepsilon'$, in der ungewöhnlich gebrochenen $R'' \cos \varepsilon''$, unter ε' und ε'' die Winkel verstanden, welche die respective Schwingungsrichtung mit dem Loth auf der Einfalls-Ebene bildet. Dem Princip zufolge ist dann: $P + R_p = R' \cos \varepsilon' + R'' \cos \varepsilon''$.

Ist (Fig. 32.) OZ die optische Axe, OL das Einfallsloth, ON die Normale der gewöhnlich gebrochenen Welle,

so ergiebt sich $\sin ZNL = \frac{\sin ZOL \cdot \sin ZLN}{\sin ZON}$,

d. h. $\sin ZNL = \frac{B \cdot \sin a}{\sqrt{1-\delta'^2}}$. Da nun NOL die Einfalls-Ebene ist, und die Schwingungsrichtung in dem Hauptschnitt ZON senkrecht gegen ON gerichtet ist, so ist $ZNL = 90^0 + \varepsilon'$, also

$$\cos\varepsilon' = \frac{B \cdot \sin a}{\sqrt{1-\delta'^2}} \text{ *)}.$$

Ist ON die Normale der ungewöhnlich gebrochenen Well-Ebene, deren Schwingungsrichtung also senkrecht auf ON und auf der durch Axe und Normale gehenden Ebene ZON, so ist $\varepsilon'' = ZNL$, und $\cos ZON = \delta''$, folglich

$$D = \cos\alpha'' \cdot \delta'' + \sqrt{1-\delta''^2} \cdot \sin\alpha'' \cos\varepsilon'',$$

und wenn man für δ'' im ersten Gliede seinen Werth aus (1) setzt,

$$\cos\varepsilon'' = \frac{D \sin\alpha'' - B \cos\alpha'' \cos a}{\sqrt{1-\delta''^2}}.$$

Bezeichnet man den Zähler dieses Ausdrucks (welcher dem Cosinus desjenigen Winkels gleich ist, welchen die optische Axe mit dem Durchschnitt der Einfalls-Ebene und gebrochenen Wellen-Ebene bildet) mit Δ'', $\sqrt{1-\delta'^2}$ mit $\varkappa'$, und $\sqrt{1-\delta''^2}$ mit $\varkappa''$, so geht die obige Gleichung über in:

$$P + R_p = R' \frac{B \sin a}{\varkappa'} + R'' \frac{\Delta''}{\varkappa''}.$$

2) Bezeichnet man durch η' und η'' die Winkel zwischen dem Einfallsloth und der Schwingungsrichtung des gewöhnlichen und des ungewöhnlichen Wellensystems, so ist die Relation, welche die Gleichheit der nach dem Einfallsloth gerichteten Componenten der Bewegung ausdrückt:

$$(S + R_s) \sin\alpha = -R' \cos\eta' + R'' \cos\eta''.$$

---

*) ZNL ist das Azimuth der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Strahls (in Bezug auf die Einfalls-Ebene), und $B \sin a$ ist der Sinus des Winkels, welchen die optische Axe mit der Einfalls-Ebene bildet.

Ist (Fig. 32.) *OL* das Einfallsloth, *ON* die Normale ler gewöhnlichen gebrochenen Welle, *OZ* deren Schwingungsrichtung, also $\angle ZON = 90^\circ$, und $\angle ZNL = 90^\circ + \varepsilon'$, o ergiebt sich $\cos ZOL = \cos\eta' = \sin\alpha' \sin\varepsilon'$, oder da

$$\sin\varepsilon' = \frac{D \sin\alpha' - B\cos\alpha' \cos a}{\varkappa'}$$

t, wenn man den Zähler des letzten Ausdrucks mit Δ' ezeichnet,

$$\cos\eta' = \sin\alpha' \frac{\Delta'}{\varkappa'}.$$

Eben so findet man, wenn man sich unter *OZ* die :hwingungsrichtung in der ungewöhnlichen Wellen-Ebene nkt,

$$\cos\eta'' = \sin\alpha'' \sin\varepsilon'' = \frac{B\sin\alpha'' \sin a}{\varkappa''}.$$

3) Bezeichnet man endlich durch ϑ' und ϑ'' die Neiing der Schwingungsrichtung des gewöhnlich und des unwöhnlich gebrochenen Wellensystems gegen die Durchhnittslinie der brechenden Ebene mit der Einfalls-Ebene, ist die Relation, welche die Gleichheit der Bewegung den dritten Componenten ausdrückt:

$$(S - R_s)\cos\alpha = -R'\cos\vartheta' + R''\cos\vartheta'',$$

ährend sich ϑ' und ϑ'' auf ähnlichem Wege, wie η', η'', ndet, nämlich $\cos\vartheta' = \cos\alpha' \sin\varepsilon' = \frac{\cos\alpha' \Delta'}{\varkappa'}$ und $\cos\vartheta''$ $= \cos\alpha'' \sin\varepsilon'' = \frac{B\cos\alpha'' \sin a}{\varkappa''}$.

Die Gleichheit der Bewegung an der Grenze ist daer ausgedrückt in folgenden Gleichungen:

$$\text{I.} \begin{cases} a, & P + R_p = R'\cos\varepsilon' + R''\cos\varepsilon'' \\ b, & (S - R_s)\cos\alpha = -R'\cos\alpha' \sin\varepsilon' + R''\cos\alpha'' \sin\varepsilon'' \\ c, & (S + R_s)\sin\alpha = -R'\sin\alpha' \sin\varepsilon' + R''\sin\alpha'' \sin\varepsilon'', \end{cases}$$

rährend

$$6) \begin{cases} \cos\varepsilon' = \frac{B\sin a}{\varkappa'}, \\ \sin\varepsilon' = \frac{\Delta'}{\varkappa'} = \frac{D\sin\alpha' - B\cos\alpha' \cos a}{\sqrt{1 - \delta'^2}}, \end{cases}$$

$$6)\left\{\begin{aligned} \cos\varepsilon'' &= \frac{\Delta''}{\varkappa''} = \frac{D\sin\alpha'' - B\cos\alpha''\cos a}{\sqrt{1-\delta''^2}},\\ \sin\varepsilon'' &= \frac{B\sin a}{\varkappa''}\end{aligned}\right.$$

ist.

Beziehung, die sich aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ergiebt.

Um das Verhältniſs der correspondirenden bewegten Massen in der einfallenden und in der ungewöhnlich gebrochenen Welle zu bestimmen, denke man sich AB (Fig. 43.) als Durchschnitt der brechenden Ebene mit der Einfalls-Ebene, welche letztere die Ebene der Figur sei; ferner ad, bc als zwei Normalen des einfallenden ebenen Wellensystems, dh und cg als Normalen der ungewöhnlich gebrochenen Well-Ebene, de und cf als die zugehörigen im Allgemeinen aus der Einfalls-Ebene heraustretenden ungewöhnlichen Strahlen. Sind überdies id, mn die Durchchnitte zweier auf einander folgenden Well-Ebenen, und cko und prq zwei auf einander folgende ungewöhnlich gebrochene Well-Ebenen, so correspondirt einem rechtwinklig parallelepipedischen Massentheil, dessen Seiten id, dn und die Einheit sind, in der gebrochenen ein schiefwinklig parallepipedischer Massentheil, dessen Basis zu Seiten hat: co und eine Linie gleich Eins, welche durch den Durchschnitt derjenigen zwei Ebenen gebildet wird, welche durch co und cf gehend senkrecht auf der Einfalls-Ebene stehen, und dessen Höhe kr, d. h. die Wellenlänge ist. Nennt man W die letztgenannte Basis, l'' die Wellenlänge kr, M'' den Massentheil der gebrochenen, M den der einfallenden Welle, und l die Wellenlänge dn der letzteren, so ist, wenn man $cd = 1$ setzt, $M = l\cos\alpha$, $M'' = l''W$.

Ist ferner $\angle kco = \xi$, $\angle cko = \psi$, $\angle odk = q$, so daſs $ck = \cos\alpha''$, $dk = \sin\alpha''$, $ok = \sin\alpha''\,\text{tang}\,q$ ist, so hat man $W = co\cdot\cos\xi = ck - ok\cos\psi = \cos\alpha'' - \sin\alpha''\cos\psi\,\text{tang}\,q$, während oben gefunden wurde

$$tang\, q = \pm \frac{(\pi^2 - \mu^2)\,\delta''\varkappa''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\,\delta''^2},$$

d der Winkel ψ hat, in sofern er die Neigung der Ein-
ls-Ebene gegen die durch Strahl und Normale, und mit-
n auch durch die Axe, gehende Ebene ist, denselben
erth, welchen der oben mit ε'' bezeichnete Winkel hat.
mag immer positiv sein, also für negative Krystalle stets
s (+) Zeichen in dem Werth für $tang\, q$ genommen wer-
n; und ψ mag von der Seite der Einfalls-Ebene an ge-
hlt werden, in welcher Strahl und Normale liegt, wenn
e Einfalls-Ebene in den Hauptschnitt fällt, und der Bre-
ungswinkel des Strahls gröfser als der Brechungswinkel
r ebenen Welle ist *). Es wird demnach

$$cos\,\psi = +cos\,\varepsilon'' = \frac{\Delta''}{\varkappa''},$$

glich $$W = cos\,\alpha'' - sin\,\alpha'' \frac{(\pi^2 - \mu^2)\,\delta''\Delta''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\,\delta''^2},$$

d da $\Delta'' = D\, sin\,\alpha'' - B\, cos\,\alpha''\, cos\, a$ und wegen (1)
$cos\, a\, sin\,\alpha'' = \delta'' - D\, cos\,\alpha''$ ist, so wird

$$7)\quad sin\,\alpha'' \cdot \Delta'' = D - \delta''\, cos\,\alpha'',$$

$$W = cos\,\alpha'' - (D - \delta''\, cos\,\alpha'') \frac{(\pi^2 - \mu^2)\,\delta''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\,\delta''^2}.$$

Ferner ist $\frac{l''}{l} = \frac{sin\,\alpha''}{sin\,\alpha}$, folglich

$$M'' = l''W = \frac{l\, sin\,\alpha''\, cos\,\alpha''}{sin\,\alpha}\Big[1 - \Big(\frac{D}{cos\,\alpha''} - \delta''\Big) \times \frac{(\pi^2 - \mu^2)\,\delta''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\,\delta''^2}\Big]$$

*) Wenn man den Krystall um das Einfallsloth [illegible]
umdreht, so dafs der Hauptschnitt alle möglichen Lagen [illegible]
-Ebene annimmt, so fällt derselbe mit ihr [illegible]
lann liegen Einfallsloth, Axe, Normale und [illegible]
zwar so, dafs in negativen Krystallen stets [illegible]
Strahl, in positiven der Strahl zwischen [illegible]
einen Stellung der Einfalls-Ebene liegt [illegible]
fallsloth und Strahl, in der andern [illegible]
male. Von der Seite aus, in welcher [illegible]
, sollen die Winkel ψ gezählt werden.

Den entsprechenden Massentheil M' des gewöhnlich gebrochenen Wellensystems erhält man aus M'', wenn man darin $\pi = \mu$, $\alpha'' = \alpha'$ und $\delta'' = \delta'$ setzt. Es wird demnach

$$M' = \frac{l \sin\alpha' \cos\alpha'}{\sin\alpha},$$

während die Massentheile in den einfallenden und reflektirten Wellensystemen einander gleich, und zwar $= l \cdot \cos\alpha$ sind. Vermöge des Princips der Erhaltung der Kräfte erhält man daher:

$$(P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2) M = R'^2 M' + R''^2 M'',$$

d. h. wenn man der Kürze wegen $\sin\alpha \cos\alpha = \tau$, $\sin\alpha' \times \cos\alpha' = \tau'$, $\sin\alpha'' \cos\alpha'' = \tau''$ setzt,

$$8)\quad (P^2 + S^2 - R_p^2 - R_s^2) = R'^2 \tau' + R''^2 \tau'' \times \left[1 - \left(\frac{D}{\cos\alpha''} - \delta''\right) \frac{(\pi^2 - \mu^2)\delta''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2}\right].$$

Diese quadratische Gleichung läfst sich mit Hilfe der Gleichungen (I.) auf eine Gleichung des ersten Grades reduciren. Multiplicirt man nämlich die zweite und dritte der Gleichungen (I.) mit einander, welches giebt:

$$(S^2 - R_s^2)\tau = R'^2 \tau' \sin^2\varepsilon' + R'' \tau'' \sin^2\varepsilon'' - R' R'' \sin\varepsilon'' \sin\varepsilon' \sin(\alpha' + \alpha''),$$

und subtrahirt dieselbe von (8), so erhält man, wenn man den eingeklammerten Theil des letzten Gliedes der Gleichung (8) mit A bezeichnet,

$$9)\quad (P^2 - R_p^2)\tau = R'^2 \tau' \cos^2\varepsilon' + R''^2 \tau'' (\cos^2\varepsilon'' + A) + R' R'' \sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin(\alpha' + \alpha'').$$

Durch Division dieser Gleichung durch die erste der Gleichungen (I.) ergiebt sich alsdann:

$$10)\quad (P - R_p)\tau = R' \tau' \cos\varepsilon' + R'' \tau'' \left(\cos\varepsilon'' + \frac{A}{\cos\varepsilon''}\right)\ ^{*}),$$

*) Von der Richtigkeit dieses Quotienten überzeugt man sich, wenn man das Produkt der Gleichungen (10) und (I, a) mit (9) vergleicht. Es zeigt sich alsdann nämlich, dafs die Uebereinstimmung vollkommen ist, sobald $\sin\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin(\alpha' + \alpha'') = \cos\varepsilon' \cos\varepsilon'' (\tau' + \tau'') + \frac{A \sin\alpha'' \cos\alpha'' \cos\varepsilon'}{\cos\varepsilon''}$ ist. Bedenkt man, dafs $\varkappa'' \sin\varepsilon'' = \varkappa' \cos\varepsilon'$ und $\tau' + \tau'' = \sin(\alpha' + \alpha'') \cos(\alpha' - \alpha'')$ ist, so wird aus der letzten Gleichung:

oder wenn man die Werthe für ε', ε'', A restituirt,

$$\text{II.}\quad (P-R_p)\tau = R'\tau'\frac{B\sin a}{\sqrt{1-\delta'^2}}$$
$$+R''\left[\frac{D\cos\alpha''\sin^2\alpha'-B\sin\alpha''\cos^2\alpha'\cos a}{\sqrt{1-\delta''^2}}\right].$$

Allgemeine Ausdrücke für die Intensität der reflektirten und gebrochenen Strahlen.

Die Vibrations-Intensitäten der reflektirten und gebrochenen Strahlen, R_p, R_s, R', R'', von denen die Lichtstärke abhängt, lassen sich vollkommen aus den Gleichungen (I. a, b, c) und (II.) bestimmen.

Eliminirt man nämlich R_s und R_p, so ergiebt sich

$$11)\quad 2P\tau = R'\cos\varepsilon'(\tau+\tau')+R''\frac{1}{\varkappa''}\times$$
$$[D(\sin\alpha''\tau+\cos\alpha''\sin^2\alpha')-B\cos a(\cos\alpha''\tau+\sin\alpha''\cos^2\alpha')].$$

Der Faktor von $\frac{R''}{\varkappa''}$ läfst sich schreiben:

$$\tau(D\sin\alpha''-B\cos\alpha''\cos a)+D\cos\alpha''-\cos^2\alpha'\times$$
$$(D\cos\alpha''+B\sin\alpha''\cos a),$$

$$(\alpha)\quad \varkappa'\sin\varepsilon'\sin(\alpha'+\alpha'') = \varkappa''\cos\varepsilon''\sin(\alpha'+\alpha'')\cos(\alpha'-\alpha'')$$
$$+\frac{A\varkappa''\sin\alpha''\cos\alpha''}{\cos\varepsilon''}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\sin^2\alpha''}{\sin^2\alpha} = \pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta''^2 = \pi^2\varkappa''^2+\mu^2\delta''^2$$

in Verbindung mit $\sin^2\alpha' = \mu^2\sin^2\alpha$ gewinnt man aber

$$\mu^2-\pi^2 = \frac{\sin^2\alpha'-\sin^2\alpha''}{\varkappa''^2\sin^2\alpha} = \frac{\sin(\alpha'-\alpha'')\sin(\alpha'+\alpha'')}{\varkappa''^2\sin^2\alpha};$$

es wird daher wegen (3 und 7)

$$A = \frac{(\mu^2-\pi^2)\delta''(D-\delta''\cos\alpha'')}{\cos\alpha''[\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta''^2]} = \frac{\sin(\alpha'-\alpha'')\sin(\alpha'+\alpha'')\delta''\cos\varepsilon''}{\varkappa''\cos\alpha''\sin\alpha''},$$

und die Gleichung (a) geht über in:

$$\varkappa'\sin\varepsilon' = \varkappa''\cos\varepsilon''\cos(\alpha'-\alpha'')+\sin(\alpha'-\alpha'')\delta'',\quad \text{d. h. in}$$
$$\Delta' = \Delta''\cos(\alpha'-\alpha'')+\delta''\sin(\alpha'-\alpha''),$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit man sogleich erkennt, wenn man für Δ', Δ'', δ'' ihre Werthe setzt.

also wegen (1 und 6) auch, wenn man (12)

$$\frac{D\cos\alpha'' - \cos^2\alpha'\delta''}{\varkappa''} = v \text{ setzt,}$$

$$\tau\cos\varepsilon''\varkappa'' + v\varkappa'',$$

so dafs man statt (11) erhält:

$$12)\quad 2P\tau = R'\cos\varepsilon'(\tau+\tau') + R''(\tau\cos\varepsilon''+v).$$

Die zweite Gleichung, die man durch jene Elimination gewinnt, ist

$$13)\quad 2S\tau = -R'\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha') + R''\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'').$$

Eliminirt man dagegen P und S aus (I. u. II.), so kommt:

$$14)\quad 2R_p\tau = R'\cos\varepsilon'(\tau-\tau') + R''(\tau\cos\varepsilon''-v),$$

$$15)\quad 2R_s\tau = R'\sin\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha') - R''\sin\varepsilon''\sin(\alpha-\alpha'').$$

Aus (12 und 13) ergiebt sich alsdann:

$$\text{III.}\quad NR' = 2\tau[\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'')P - (\tau\cos\varepsilon''+v)S],$$

$$\text{IV.}\quad NR'' = 2\tau[\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')P + \cos\varepsilon'(\tau+\tau')S],$$

wo

$$16)\quad \cos\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'')(\tau+\tau') + \sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')\times (\tau\cos\varepsilon''+v) = N$$

der Kürze wegen gesetzt ist.

Durch die Substitution dieser Werthe für R' und R'' in (14 und 15) erhält man dann R_p und R_s von der Form

$$\text{V.}\quad \begin{cases} R_p = pP + s'S \\ R_s = p'P + sS, \end{cases}$$

während für p, s, p', s' sich findet:

$$17)\quad \begin{cases} pN = (\tau-\tau')\cos\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'') \\ \qquad\qquad + \sin\varepsilon'(\tau\cos\varepsilon''-v)\sin(\alpha+\alpha') \\ sN = -\sin\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha')(\tau\cos\varepsilon''+v) \\ \qquad\qquad - \sin\varepsilon''\cos\varepsilon'(\tau+\tau')\sin(\alpha-\alpha'') \\ p'N = \sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'')\sin(\alpha-\alpha') \\ \qquad\qquad - \sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha'') \\ \quad = -2\tau\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha'-\alpha'') = \\ \quad -2\tau\sin\varepsilon'(D\sin\alpha' - B\cos\alpha\cos\alpha')\sin(\alpha'-\alpha'') \\ s'N = -(\tau-\tau')\cos\varepsilon'(\tau\cos\varepsilon''+v) \\ \qquad\qquad + (\tau+\tau')\cos\varepsilon'(\tau\cos\varepsilon''-v) \\ \quad = 2\tau\cos\varepsilon'(\tau'\cos\varepsilon''-v) \\ \quad = -2\tau\cos\varepsilon'(D\sin\alpha' + B\cos\alpha'\cos\alpha)\sin(\alpha'-\alpha''). \end{cases}$$

Wird $\alpha' = \alpha''$, also auch $\cos\varepsilon' = \sin\varepsilon''$ und $\sin\varepsilon' = \cos\varepsilon''$, so gehen (III. und IV.) über in:

$$18)\quad \begin{cases} R' = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha + \alpha'}\left(\dfrac{P\cos\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} - S\sin\varepsilon'\right) \\ R'' = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\left(\dfrac{P\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} + S\cos\varepsilon'\right) \end{cases}$$

oder in

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} R' = \dfrac{2\tau}{\tau+\tau'}\Big[P\cos\varepsilon' - S\sin\varepsilon'\cos(\alpha-\alpha')\Big] \\ R'' = \dfrac{2\tau}{\tau+\tau'}\Big[P\sin\varepsilon' + S\cos\varepsilon'\cos(\alpha-\alpha')\Big] \end{cases}$$

welche Gleichungen, wenn $\pi^2 - \mu^2$ sehr klein, die Doppelbrechung also sehr schwach ist, als erste Näherung gebraucht werden können.

Reflexion des unpolarisirten Lichtes.

a. Polarisationswinkel.

Polarisationswinkel nennt man bei den einaxigen Krystallen denjenigen Einfallswinkel, unter welchem unpolarisirtes Licht einfallen mufs, wenn das reflektirte Licht vollständig polarisirt sein soll.

Ist eine solche vollständige Polarisation möglich, und das Azimuth der Polarisations-Ebene des reflektirten Lichtes φ, so mufs der senkrecht gegen diese Ebene zerlegte Theil der Vibrationsbewegung desselben verschwinden, wie auch das einfallende polarisirt sein mag.

Man nehme das einfallende Licht polarisirt an, nenne P und S die Componenten seiner Bewegung, und R_p', R_s' die nach der als existirend vorausgesetzten Polarisations-Ebene und senkrecht darauf zerlegten Bewegungen des reflektirten Lichtes. Alsdann hat man

$$R_s' = R_p\sin\varphi + R_s\cos\varphi = P(p\sin\varphi + p'\cos\varphi) + S(s'\sin\varphi + s\cos\varphi)$$

$$R_p' = R_p\cos\varphi - R_s\sin\varphi = P(p\cos\varphi - p'\sin\varphi) + S(s'\cos\varphi - s\sin\varphi).$$

Soll nun das Licht unabhängig vom Polarisationszustand des einfallenden Lichtes nach dem Azimuthe φ polarisirt werden, so muſs R_p' unabhängig von P und S verschwinden, d. h. es muſs

$$p\cos\varphi - p'\sin\varphi = 0, \quad s'\cos\varphi - s\sin\varphi = 0$$

sein. Diese Gleichungen dienen zur Bestimmung des jene Bedingung erfüllenden Winkels α, d. h. des Polarisationswinkels, und zur Bestimmung des Azimuthes φ, welches man die Ablenkung der Polarisations-Ebene nennt. Durch Elimination von φ erhält man zur Bestimmung von α

$$19)\quad ps - p's' = 0,$$

und zur Bestimmung der Ablenkung

$$20)\quad \tang\varphi = \frac{s'}{s},$$

aus welchen Gleichungen sich α' und α'' eliminiren lassen mittelst $\sin\alpha' = \mu\sin\alpha$ und

$$21)\quad \tang^2\alpha''\left(\frac{1-\pi^2\sin^2 a\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$
$$= \mu^2(D+B\tang\alpha''\sin a)^2 + \pi^2(D-B\tang\alpha''\cos a)^2,$$

welche letztere Gleichung eine leichte Umformung der Gleichung (3) ist.

1) Fällt die Reflexions-Ebene mit dem Hauptschnitt zusammen, und ist daher $a = 0$, so wird $s' = 0$, also auch $\tang\varphi = 0$, und die Gleichung (19), welche den Polarisationswinkel bestimmt, giebt $s = 0$ oder $p = 0$.

Da zugleich $\cos\varepsilon' = \sin\varepsilon'' = 0$ wird, so wird

$$p = \frac{\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')(\tau\cos\varepsilon''-v)}{\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')(\tau\cos\varepsilon''+v)}.$$

Die Bedingung $p = 0$ führt demnach auf $\tau\cos\varepsilon'' - v = 0$, d. h. auf

$$22)\quad \tau(D\sin\alpha'' - B\cos\alpha'') - (D\cos\alpha''\sin^2\alpha' - B\sin\alpha''\cos^2\alpha') = 0.$$

Da ferner $s = -\dfrac{\sin\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha')(\tau\cos\varepsilon''+v)}{\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')(\tau\cos\varepsilon''+v)}$ wird, so führt die Bedingung $s = 0$ auf

sin

$$\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}=0,$$

welche letztere Bedingung also nur erfüllt werden kann für $\alpha=\alpha'$, d. h. wenn das Licht aus einem Mittel kommt, welches genau dieselbe Brechbarkeit hat, wie der Krystall in Bezug auf die gewöhnlichen Strahlen.

Die Gleichung (22) giebt

$$23)\quad tang\,\alpha''=\frac{B\tau+D\sin^2\alpha'}{D\tau+B\cos^2\alpha'},$$

während $\sin\alpha'=\mu\sin\alpha$ ist und aus (21) sich ergiebt

$$24)\quad tang^2\alpha''=\sin^2\alpha[\mu^2(D+B\,tang\,\alpha'')^2+\pi^2(B-D\,tang\,\alpha'')^2].$$

Aus (23) findet sich:

$$D+B\,tg\,\alpha''=\frac{BD+\tau}{B\cos^2\alpha'+D\tau},$$

$$B-D\,tg\,\alpha''=\frac{B^2\cos^2\alpha'-D^2\sin^2\alpha'}{B\cos^2\alpha'+D\tau},$$

welches, in (24) substituirt, liefert:

$$\left(\frac{B\tau+D\sin^2\alpha'}{\sin\alpha}\right)^2-\mu^2(BD+\tau)^2=\pi^2(B^2-\sin^2\alpha')^2,$$

wofür sich schreiben läfst:

$$(B^2-\sin^2\alpha')(1-\mu^2D^2-\sin^2\alpha)=\pi^2(B^2-\sin^2\alpha')^2.$$

Diese Bedingung wird erfüllt 1) wenn $\sin^2\alpha'-B^2=0$ ist, 2) wenn $1-\mu^2D^2-\pi^2B^2-(1-\mu^2\pi^2)\sin^2\alpha=0$ ist. Von diesen beiden Gleichungen giebt nur die zweite brauchbare Wurzeln, so dafs die Bedingung der vollständigen Polarisation ist:

$$\text{VII.}\quad \sin^2\alpha=\frac{(1-\mu^2)D^2+(1-\pi^2)B^2}{1-\mu^2\pi^2},$$

eine Bedingung, welche schon von Seebeck aufgestellt, und mit den Beobachtungen vollkommen übereinstimmend gefunden wurde.

2) Steht die Reflexions-Ebene auf dem Hauptschnitt senkrecht, so wird $a=90$, und die Gleichung $ps-p's'=0$ geht alsdann, wenn man den gemeinsamen Faktor $N\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha')$ fortläfst, da derselbe nur für $\sin(\alpha-\alpha')=0$, also für den Fall verschwindet, wenn das

umgebende Mittel ein dem gewöhnlichen Strahl gleiches Brechungsverhältnifs hat, über in:

$$B^4 \cos(\alpha-\alpha')\cos(\alpha+\alpha')\sin(\alpha+\alpha'')\sin(\alpha-\alpha'')$$
$$+D^4\sin^2\alpha'(\sin^2\alpha''\tau^2-\cos^2\alpha''\sin^4\alpha')$$
$$+B^2D^2\sin\alpha'\cos(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha'')(\sin\alpha''\tau-\cos\alpha''\sin^2\alpha')$$
$$+B^2D^2\sin\alpha'\cos(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha'')(\sin\alpha''\tau+\cos\alpha''\sin^2\alpha')$$
$$=0,$$

wofür sich auch schreiben läfst:

$$[B^2\cos(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha'')+D^2\sin\alpha'(\sin\alpha''\tau+\cos\alpha''\sin^2\alpha')]\times$$
$$[B^2\cos(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha'')+D^2\sin\alpha'(\sin\alpha''\tau-\cos\alpha''\sin^2\alpha')]=0.$$

Der erste Faktor giebt keine Lösung des Problems, da sich derselbe für $\alpha'=\alpha''$, d. h. für ein unkrystallinisches Mittel auf $\tau+\tau'$ reducirt, und daher nicht verschwinden kann.

Der Polarisationswinkel ist folglich bestimmt durch:

$$25)\quad B^2(\tau-\tau')+D^2\sin^2\alpha'(\sin\alpha''\tau-\cos\alpha''\sin^2\alpha')=0,$$

Zur Elimination von α'' liefert die Gleichung (21):

$$tang^2\alpha''=\mu^2\sin^2\alpha\cdot\frac{1+hB^2}{1-\pi^2\sin^2\alpha},$$

(wo h für $\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu^2}$ steht), oder, da $\mu\sin\alpha=\sin\alpha'$ ist,

$$26)\quad tang^2\alpha''=tg^2\alpha'\frac{1+hB^2}{1-h\,tg^2\alpha}.$$

Sondert man aus (25) α'' ab, so erhält man

$$V-W\,tang\,\alpha''=0,$$

(wo $\quad 27)\quad B^2\cos(\alpha+\alpha')\sin\alpha-D^2\sin^3\alpha'=V$, und $B^2\cos(\alpha+\alpha')\cos\alpha-D^2\sin\alpha'\tau=W$ gesetzt ist), folglich wegen (26)

$$(\cos^2\alpha'-h\sin^2\alpha')V^2=\sin^2\alpha'(1+hB^2)W^2,\ \text{oder}$$

$$28)\quad V^2\cos^2\alpha'-W^2\sin^2\alpha'=h\sin^2\alpha'(V^2+B^2W^2).$$

Leitet man nun aus (27) ab:

$$V\cos\alpha'-W\sin\alpha'=(B^2+D^2\sin^2\alpha')\cos(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha'),$$
$$V\cos\alpha'+W\sin\alpha'=B^2\cos(\alpha+\alpha')\sin(\alpha+\alpha')$$
$$-D^2\sin^2\alpha'\cos(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha'),$$

so gewinnt man, da das Produkt der rechten Seiten dieser zwei Gleichungen der rechten Seite in (28) gleich sein mufs,

$$\cos(\alpha+\alpha')=\frac{(V^2+B^2W)\sin^2\alpha'h}{\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha')(B^2+D^2\sin^2\alpha')(B^2\cos(\alpha+\alpha')-D^2\sin^2\alpha'\cos(\alpha-\alpha'))}.$$

Restituirt man hierin die Werthe für V und W, dividirt Zähler und Nenner durch den gemeinsamen Faktor $B^2 + D^2 \sin^2 \alpha'$ und berücksichtigt, dafs

$$\sin(\alpha - \alpha') \sin(\alpha + \alpha') = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha' = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} \sin^2 \alpha'$$

t, so ergiebt sich:

VII. $\cos(\alpha + \alpha')(1 - \mu^2) =$

$$\frac{D^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha')^2 (1 - \mu^2) + B^2 \cos^2(\alpha + \alpha') \sin^2(\alpha - \alpha')(\pi^2 - \mu^2)}{B^2 \cos(\alpha + \alpha') - D^2 \sin^2 \alpha' \cos(\alpha - \alpha')}.$$

Man sieht, dafs für $\pi^2 - \mu^2 = 0$, d. h. für einfachbre-ende Mittel $\cos(\alpha + \alpha') = 0$ wird, wie es oben direkt funden wurde. Da $\pi^2 - \mu^2$ beim Uebergange aus Luft krystallinische Medien stets sehr klein ist, so wird auch nahe gleich $90^0 - \alpha'$, so dafs der Polarisationswinkel dem es unkrystallinischen Mittels sehr nahe liegt, dessen Bre-ungsverhältnifs dem des gewöhnlichen Strahls in dem ein-igen Krystall gleich ist.

Wie genau die Formel (VIII.) mit der Erfahrung mmt, zeigen folgende von Seebeck angestellte Messun-n:

eigung der reflekt. che gegen die Axe.	Beobachtete Polaris. W.	Berechnete Polaris. W.	Diff.
0° 12′	58° 56′	58° 54,9′	+ 1,1′
0 23	58 56,1	58 54,9	+ 1,2
27 2	59 3,9	59 19,1	— 15,2
45 23,5	59 50,9	59 53,4	— 2,5
45 29	59 47,7	59 53,5	— 5,8
45 43,5	59 46,7	59 54,1	— 7,4
64 1,5	60 14,8	60 26,3	— 11,7
89 47,5	60 33,4	60 47,0	— 13,6

Die Gleichung (VIII.) ist vom vierten Grade und läfst h nur näherungsweise auflösen. Man erhält dieselbe in einfachsten algebraischen Form, wenn man $\frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} = x$

setzt, wodurch $sin^2\alpha = \frac{x^2-1}{x^2-\mu^2}$, $sin^2\alpha' = \frac{\mu^2(x^2-1)}{x^2-\mu^2}$, $cos^2\alpha = \frac{1-\mu^2}{x^2-\mu^2}$, $cos^2\alpha' = \frac{x^2(1-\mu^2)}{x^2-\mu^2}$ wird, und (VIII.) übergeht in:

$$B^2(x+\mu)^2(1-\mu x)^2 - D^2\mu^2(x^2-1)(1-\mu^2x^2)$$
$$-[(B^2[1-\mu^2]-\mu^2[x^2-1])^2 + B^2(1-\mu^2)(x^2-1)\times$$
$$(1-\mu x)^2]\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2} = 0,$$

wo bei der Wahl unter den vier Wurzeln zu berücksichtigen ist, dafs x stets positiv sein mufs, und zwar gröfser oder kleiner als 1, je nachdem μ kleiner oder gröfser als 1 ist.

Mittelst der Gleichung (VIII.) läfst sich $sin^2\alpha$ leicht nach Potenzen von $\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}$ entwickeln, indem man mit $cos(\alpha-\alpha')$ multiplicirt und bemerkt, dafs $cos(\alpha-\alpha')\times cos(\alpha+\alpha') = 1-(1+\mu^2)sin^2\alpha$ ist. Es findet sich nämlich alsdann:

$$sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2}$$
$$-\frac{(B^2cos^2\alpha - sin^2\alpha')^2 + B^2cos^2(\alpha+\alpha')sin^2(\alpha-\alpha')}{B^2cos(\alpha+\alpha') - D^2sin^2\alpha' cos(\alpha-\alpha')}\times$$
$$cos(\alpha-\alpha')\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2} = \frac{1}{1+\mu^2}\Big[1+\mu^2D^2\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}$$
$$+\tfrac{1}{4}D^2[4\mu^4 - B^2(1-5\mu^2-\mu^4+\mu^6)]\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\right)^2+\ldots\Big].$$

3) Die Reflexions-Ebene habe eine beliebige Lage gegen den Hauptschnitt. Setzt man in $ps-p's'=0$ die vollständigen Werthe von p, s, p', s' aus (17), und nimmt

$$\tau\Delta'' - (D\cos\alpha''\sin^2\alpha' - B\sin\alpha''\cos^2\alpha'\cos a)$$
$$= x''(\tau\cos\varepsilon'' - v) = Q$$
$$\tau\Delta'' + (D\cos\alpha''\sin^2\alpha' - B\sin\alpha''\cos^2\alpha'\cos a)$$
$$= x''(\tau\cos\varepsilon'' + v) = Q',$$

so erhält man nach einigen Reductionen, wenn man den gemeinsamen Faktor $sin(\alpha-\alpha')sin(\alpha+\alpha')$, welcher für $\alpha=\alpha'$ eine particuläre Auflösung giebt, fortläfst,

$$B^4 \sin^4 a \cos(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha') \sin(\alpha' + \alpha'') \sin(\alpha - \alpha'')$$
$$+ \Delta'^2 QQ' + B^2 \sin^2 a \Delta' Q' \cos(\alpha + \alpha') \sin(\alpha - \alpha'')$$
$$+ B^2 \sin^2 a \Delta' Q \cos(\alpha - \alpha') \sin(\alpha + \alpha'') = 0,$$

oder

$$[B^2 \sin^2 a \cos(\alpha - \alpha') \sin(\alpha + \alpha'') + \Delta' Q'] \times$$
$$[B^2 \sin^2 a \cos(\alpha + \alpha') \sin(\alpha - \alpha'') + \Delta' Q] = 0.$$

Nur der letzte dieser Faktoren giebt eine Lösung der Aufgabe, da der erste für $\alpha' = \alpha''$ nicht verschwinden kann. Man hat daher als Bedingungsgleichung:

IX. $B^2 \sin^2 a \cos(\alpha + \alpha') \sin(\alpha - \alpha'') + \Delta' Q = 0,$

oder da $B \sin a = \varkappa' \cos \varepsilon' = \varkappa'' \sin \varepsilon''$, also $B^2 \sin^2 a = \varkappa' \varkappa'' \times \sin \varepsilon'' \cos \varepsilon'$, und da $\Delta' = \varkappa' \sin \varepsilon'$ ist,

IX, a. $\sin \varepsilon'' \cos \varepsilon' \cos(\alpha + \alpha') \sin(\alpha - \alpha'')$
$$+ \sin \varepsilon' (\tau \cos \varepsilon'' - v) = 0,$$

woraus noch α'' mittelst (21) zu eliminiren wäre.

Die von Seebeck angestellten hierher gehörigen Messungen der Polarisationswinkel an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths *) für verschiedene Azimuthe der Einfalls-Ebene, sind zur Vergleichung mit den aus (IX.) sich ergebenden Resultaten in folgender Tafel zusammengestellt.

a	Beobachtete Werthe von α.	Berechnete Werthe von α.	Diff.
0° 0′	57° 19,7′	57° 20,1′	− 0,4′
22 30	57 45,9	57 42,9	+ 3,0
45 0	58 33,9	58 34,9	− 1,0
67 30	59 29,1	59 30,1	− 1,0
90 0	59 50,9	59 53,4	− 2,5

Da in (IX.) und (21) nur das Quadrat von $\sin a$ vorkommt, so ist der Polarisationswinkel für $+a$ und $-a$ derselbe. Er bleibt aber auch ungeändert, wenn a in $180 - a$ übergeht, wie es Brewster durch Beobachtun-

*) Die natürlichen Bruchflächen des Kalkspaths sind die (Seite 197) erwähnten Rhomboëderflächen, welche 44° 37′ gegen die optische Axe geneigt sind.

gen gefunden hatte, und wie es auch die Ausführung der Elimination zeigt, welche auf einen Ausdruck führt, der nur gerade Potenzen von $\cos a$ enthält.

Das Resultat der etwas weitläuftigen Elimination ist:

$$29)\quad \cos(\alpha+\alpha') = \frac{\pi^2-\mu^2}{1+\mu^2}\times$$
$$\left(\frac{B^2\sin^2 a\cos(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')+B^2\cos^2 a\cos^2\alpha'-D^2\sin^2\alpha')^2+B^2\sin^2 a(\tau-\tau^1)^2}{B^2\sin^2 a\cos(\alpha+\alpha')+(B^2\cos^2 a\cos^2\alpha'-D^2\sin^2\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos(\alpha-\alpha')$, setzt auf der linken Seite für $\cos(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')$ seinen Werth $1-(1+\mu^2)\sin^2\alpha$, und bezeichnet den eingeklammerten Faktor mit T, so erhält man

$$30)\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}T\cdot\cos(\alpha-\alpha').$$

Läſst man die zweiten und höhern Potenzen des Elasticitätsunterschiedes $\pi^2-\mu^2$ auſser Acht, so braucht man nur in dem mit $\pi^2-\mu^2$ multiplicirten Gliede $\pi^2-\mu^2=0$, oder was dasselbe ist, da mit $\pi^2-\mu^2$ zugleich $\cos(\alpha+\alpha')$ verschwindet, $\cos(\alpha+\alpha')=0$ zu setzen. Es wird alsdann

$$T = \frac{B^2\cos^2 a\cos^2\alpha' - D^2\sin^2\alpha'}{\cos(\alpha-\alpha')},$$

oder da für $\pi^2-\mu^2=0$ nach (30) $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2}$, also

$\sin^2\alpha' = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}$ und $\cos^2\alpha' = \frac{1}{1+\mu^2}$ wird,

$$T = \frac{B^2\cos^2 a - D^2\mu^2}{(1+\mu^2)\cos(\alpha-\alpha')},\quad \text{also}$$

$$31)\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left(\frac{B^2\cos^2 a - D^2\mu^2}{1+\mu^2}\right).$$

Es wird folglich $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2}$, sobald $B^2\cos a^2 - D^2\mu^2$ verschwindet, d. h. in denjenigen 4 Azimuthen, welche durch $\cos a = \pm\frac{D\mu}{B}$ bestimmt sind. Aus $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\mu^2}$ folgt $\tang^2\alpha = \frac{1}{\mu^2}$ und $\cos(\alpha+\alpha')=0$. In diesen 4 Azimuthen ist also der Polarisationswinkel genau so groſs, wie bei unkrystallinischen Mitteln, deren Brechungsverhält-

nifs $\frac{1}{\mu}$ ist. Dies gilt nicht blofs annäherungsweise, sondern ganz allgemein, da aus (29) erhellt, dafs mit dem $\cos(a+\alpha')$ zugleich $B^2 \cos^2\alpha' \cos^2 a - D^2 \sin^2\alpha'$ und umgekehrt diese Gröfse mit jener zugleich verschwindet.

Da der letztgenannte Ausdruck in die Faktoren

$$(B \cos a \cos\alpha' - D \sin\alpha')(B \cos a \cos\alpha' + D \sin\alpha')$$

zerfällt, und der erste Faktor gleich $x' \sin\varepsilon'$ ist, so steht bei dem Verschwinden desselben die Ebene, welche durch die Axe und den gewöhnlich gebrochenen Strahl geht, senkrecht auf der Einfalls-Ebene, oder mit andern Worten: der Polarisationswinkel an einaxigen Krystallen folgt dem Gesetz des Polarisationswinkels an unkrystallinischen Körpern, wenn die Schwingungen des gewöhnlich gebrochenen Strahls senkrecht gegen die Einfalls-Ebene geschehen.

Der zweite Faktor, will man ihn geometrisch erklären, ist der Cosinus des Winkels, welchen die Axe mit einer Linie in der Einfalls-Ebene bildet, die mit dem Einfallsloth den Winkel $90^0 - \alpha'$ bildet. Ist jener Winkel daher $\pm 90^0$, so stimmen ein zweites Mal die beiden Gesetze für den Polarisationswinkel überein.

Die algebraische Form der Gleichung (29), wenn man wiederum $\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} = x$ setzt, ist folgende:

$$\begin{aligned}
&[\mu(B^2 \sin^2 a + \mu^2 D^2) + (1-\mu^2)x - \mu(1 - B^2 \cos^2 a)x^2]^2 \\
&\quad - \pi^2 [B^2 \sin^2 a + \mu^2 D^2 - (\mu^2 - B^2 \cos^2 \alpha)x^2]^2 \\
&+ (1-\mu^2)[\pi^2 B^2 \sin^2 a + \mu^2 D^2 - (\pi^2 B^2 \sin^2 a + D^2)x^2] \times \\
&\qquad (1-\mu x)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Wenn das den Krystall umgebende Mittel nicht Luft, sondern ein Medium ist, welches ein nahe gleiches Brechungsverhältnifs mit dem Krystall hat, wie es z. B. der Fall ist, wenn Kalkspath mit einer Schicht Cassiaöl bedeckt ist, so wird (die Geschwindigkeit des Lichts im umgebenden Mittel $= 1$ gesetzt), $1-\mu^2$ sehr klein, und man kann alsdann $\pi^2 - \mu^2$ mit $1-\mu^2$ von derselben Ordnung der Kleinheit annehmen. Dieser Fall bedarf daher einer besonderen Behandlung.

Geht man zur Bestimmung des Polarisationswinkels von der Gleichung (29), nämlich von $(1-\mu^2)\cos(\alpha+\alpha') = (\pi^2-\mu^2)T$ aus, so hat man, wenn man sich mit den Gliedern begnügen will, welche die zweite Potenz nicht übersteigen, aus $\cos(\alpha+\alpha')$ und T alles dasjenige zu vernachlässigen, was mit $(1-\mu^2)$ und $(\pi^2-\mu^2)^2$ von derselben Ordnung der Kleinheit ist. Da $\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha') = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha' = (1-\mu^2)\sin^2\alpha$ ist, so ist

$$\sin(\alpha-\alpha') = \frac{(1-\mu^2)\sin^2\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

und mithin auch $\alpha-\alpha'$ von gleicher Ordnung in Absicht auf seinen Werth mit $1-\mu^2$, und man hat daher in T, $\sin^2(\alpha-\alpha') = 0$ zu setzen; ferner geht

$$\cos(\alpha-\alpha') = 1 - \frac{(\alpha-\alpha')^2}{2} + \ldots$$

für diesen Grad der Näherung in 1 über, so dafs der Werth von T (aus (29)) übergeht in:

$$T = B^2\sin^2 a\cos(\alpha+\alpha') + B^2\cos^2 a\cos^2\alpha' - D^2\sin^2\alpha'$$

und die Gleichung (29) verwandelt sich in:

$$(1-\mu^2)\cos(\alpha+\alpha') = (\pi^2-\mu^2)[B^2\sin^2 a\cos(\alpha+\alpha') + B^2\cos^2 a\cos^2\alpha' - D^2\sin^2\alpha'].$$

Da bei dem angenommenen Grade der Näherung $\cos(\alpha-\alpha') = 1$ ist, so kann man $\cos(\alpha+\alpha') = \cos(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha') = \cos^2\alpha' - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha' - \frac{\sin^2\alpha'}{\mu^2}$ setzen. Substituirt man diesen Werth für $\cos(\alpha+\alpha')$ und dividirt durch $\cos^2\alpha'$, so erhält man:

$$tg^2\alpha' = \frac{\mu^2[(1-\mu^2)-(\pi^2-\mu^2)B^2]}{1-\mu^2-D^2(\pi^2-\mu^2)\mu^2 - B^2\sin^2 a(\pi^2-\mu^2)}$$

$$= \frac{\mu^2[(1-\pi^2)B^2+(1-\mu^2)D^2]}{(1-\mu^2-(\pi^2-\mu^2)\sin^2 a)B^2 + (1-\mu^2-\mu^2(\pi^2-\mu^2))D^2},$$

folglich

$$32)\quad \sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha'}{\mu^2(1+tg^2\alpha')}$$

$$= \frac{(1-\pi^2)B^2+(1-\mu^2)D^2}{1-\pi^2\mu^2-B^2\sin^2 a(\pi^2-\mu^2)}.$$

Für $a=0$ geht dieser Ausdruck genau in den Seebeck'schen (VII, *b*) über, so dafs für diesen Fall keine Aenderung eintritt.

Um zu untersuchen, ob stets ein Polarisationswinkel existirt, oder, was dasselbe ist, ob und wann $\sin\alpha$ imaginär wird, setze man $\pi^2 = 1 - \nu'$, $\mu^2 = 1 - \nu''$, wo dann ν' und ν'' sehr kleine Gröfsen sind. Der Ausdruck für $\sin^2\alpha$ verwandelt sich dann in:

$$32,\ a)\quad \sin^2\alpha = \frac{\nu' B^2 + \nu'' D^2}{\nu' + \nu'' - \nu'\nu'' - B^2 \sin^2 a(\nu'' - \nu')}$$

$$= \frac{\nu' B^2 + \nu'' D^2}{\nu'(1 + B^2 \sin^2 a) + \nu''(1 - B^2 \sin^2 a) - \nu'\nu''}.$$

$\sin\alpha$ wird daher reell, so oft ν' und ν'' gleiche Zeichen haben (da $1 - B^2 \sin^2 a$ stets positiv ist und $\nu'\nu''$ gegen die ersten Glieder vernachlässigt werden kann), d. h. wenn das Licht im einfallenden Strahl sich schneller oder langsamer bewegt als in beiden gebrochenen Strahlen. Dagegen kann $\sin\alpha$ imaginär werden, wenn ν' und ν'' verschiedene Zeichen haben, d. h. wenn das Brechungsverhältnifs des umgebenden Mittels zwischen dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen des Krystalls liegt.

Hat das umgebende Mittel mit dem ungewöhnlichen Strahl gleiche Brechbarkeit, ist also $\nu' = 0$, so wird

$$\sin^2\alpha = \frac{D^2}{1 - B^2 \sin^2 a},$$

also $\sin\alpha$ noch stets reell.

Wird $\nu'' = -\nu'$ (wo ν'' für negative Krystalle positiv, für positive negativ sein mufs), d. h. liegt das Brechungsverhältnifs des umgebenden Mittels genau zwischen dem des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls, so wird

$$\sin^2\alpha = \frac{B^2 - D^2}{2B^2 \sin^2 a + \nu'},$$

und $\sin\alpha$ wird imaginär auf allen brechenden Flächen, deren Winkel mit der Axe $> 45^0$ ist. Für die der Axe parallele Fläche wird $\sin^2\alpha = \frac{1}{\nu' + 2}$ im Azimuthe $a = 90$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{\nu' + 1}$ im Azimuthe $a = 45^0$; $\sin\alpha$ wird dagegen

imaginär von einem bestimmten zwischen 0° und 45° liegenden Azimuthe ab. Liegt der Winkel zwischen der brechenden Fläche und der Axe zwischen 0° und 45°, und ist $a = 0$, also $\sin^2\alpha = \frac{B^2 - D^2}{\nu'}$, so giebt es nur reele Polarisationswinkel, wenn $B^2 - D^2 < \nu'$ ist, und in diesem kleinen Zwischenraum nimmt α alle Werthe von 0° bis 90° an.

Für $\nu'' = 0$, d. h. für $\mu = 1$ gilt die Formel (32, a) nicht mehr, da sie unter der Voraussetzung entwickelt ist, dafs $1 - \mu^2$ nicht verschwindet.

b. Ablenkung der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls.

Das Azimuth φ der Polarisations-Ebene des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Strahls ist bestimmt durch

$$tang\,\varphi = \frac{s'}{s},$$

wo
$$Ns' = 2\tau\cos\varepsilon'(\tau'\cos\varepsilon'' - v)$$
und
$$Ns = -[\sin\varepsilon'\sin(\alpha - \alpha')(\tau\cos\varepsilon'' + v) + \sin\varepsilon''\cos\varepsilon'(\tau + \tau')\sin(\alpha - \alpha'')]$$ ist.

Da die Bedingungsgleichung der Reflexion unter dem Polarisationswinkel (IX, a) giebt:

$$\cos\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha - \alpha'') = -\frac{1}{\cos(\alpha + \alpha')}\sin\varepsilon'(\tau\cos\varepsilon'' - v),$$

so geht der Ausdruck für s, insofern $\sin(\alpha - \alpha')\cos(\alpha + \alpha') = \tau - \tau'$ ist, über in:

$$s = -\frac{1}{N}\frac{\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha + \alpha')}[(\tau\cos\varepsilon'' + v)(\tau - \tau') - (\tau\cos\varepsilon'' - v)(\tau + \tau')] = \frac{2\tau\sin\varepsilon'}{N\cos(\alpha + \alpha')}(\tau'\cos\varepsilon'' - v),$$

und es wird

$$\text{X.}\quad tang\,\varphi = \frac{s'}{s} = \cot\varepsilon'\cos(\alpha + \alpha'),$$

oder für $\cot\varepsilon'$ seinen Werth setzend,

$$tang\,\varphi = \frac{B\sin a}{D\sin\alpha' - B\cos\alpha'\cos a}\cos(\alpha + \alpha').$$

Da nun $\cot s'$ die Tangente des Azimuths der Polarisans-Ebene des gewöhnlich gebrochenen Strahls ist (p. 247), ist die Tangente der Ablenkung der Polarisations-Ebene reflektirten Strahls gleich der Tangente des Azimuthes Polarisations-Ebene des gewöhnlich gebrochenen Syns, multiplicirt mit dem Cosinus der Summe des Reionswinkels und des Brechungswinkels des gewöhnlin Strahls.

Die von Seebeck angestellten Messungen am Kalkh bestätigen vollkommen die Richtigkeit der Formel (X.). sind dieselben in folgenden Tafeln enthalten.

Auf der natürlichen Bruchfläche:

a	Beobachtete φ.	Berechnete φ.	Diff.
0°	0° 0′	0° 0′	0′
22,5	−2 9	−2 16	+ 7
45	−3 38	−3 38,3	+ 0,3
67,5	−3 34	−3 42,3	+ 8,3
90	−2 30	−2 26,3	− 3,7
112,5	−0 48	−0 52	+ 4
135	+0 23	+0 16,3	− 6,7
157,5	+0 18	+0 28,7	+10,7
180	0 0	0 0	0,0

Auf einer mit der Axe parallelen Fläche:

a	Beobachtete φ.	Berechnete φ.	Diff.
0°	0° 0′	0° 0′	0′
22,5	−2 43	−2 45,5	− 2,5
45	−3 57	+4 7,5	−10,5
67,5	−2 46	−3 2,5	−16,5
90	0 0	0 0	0,0

Es ist leicht, die Fälle zu bestimmen, in denen der ektirte Strahl nach der Einfalls-Ebene polarisirt, d. h. = 0 ist, und in denen die Ablenkung ihr Maximum ereicht.

Das erste findet statt, d. h. es wird $tg\varphi = 0$,

1) wenn $B = 0$ ist, d. h. wenn die brechende Ebene auf der optischen Axe senkrecht steht.

2) wenn $a = 0$ oder $a = 180^\circ$ ist, d. h. wenn die Einfalls-Ebene mit dem Hauptschnitt zusammenfällt.

3) wenn $\cos a = -\frac{D}{B}\mu$ ist. Da nämlich $\cos(\alpha+\alpha')$ nur verschwindet, wenn $D^2 \sin^2\alpha' - B^2 \cos^2\alpha' \cos^2 a = 0$ ist, so verschwindet $tg\varphi$ nur dann mit $\cos(\alpha+\alpha')$ zugleich, wenn $D \sin\alpha' + B \cos\alpha' \cos a = 0$ ist, d. h. wenn die Axe senkrecht auf der Linie in der Einfalls-Ebene, welche mit dem Einfallsloth einen Winkel $90 - \alpha'$ bildet. Dieses tritt ein, wenn $\cos a = -\frac{D}{B} tang\,\alpha'$ ist, oder da für $\cos(\alpha+\alpha') = 0$, $tang\,\alpha' = \mu$ ist, für $\cos a = -\frac{D\mu}{B}$.

Ist z. B. *bdec* (Fig. 35.) die brechende Ebene, *be* die Richtung, in welcher der Hauptschnitt dieselbe trifft, $\angle dae = + arc\left(\cos = -\frac{D\mu}{B}\right)$ und $\angle cae = - arc\left(\cos = -\frac{D\mu}{B}\right)$, so sind *ab*, *ae*, *ad*, *ac* die 4 Richtungen der Einfalls-Ebene, in denen keine Ablenkung stattfindet, die Polarisations-Ebene des unter dem Polarisationswinkel reflektirten Lichtes sich also wie bei unkrystallinischen Mitteln verhält. Die Richtungen *ac* und *ad* fallen in eine zusammen, und stehen senkrecht auf dem Hauptschnitt *be*, wenn $D = 0$ ist, d. h. wenn die brechende Ebene der optischen Axe parallel ist. Je gröfser D ist, d. h. je stärker die brechende Fläche gegen die Axe geneigt ist, desto gröfser ist *cae*, und ist $B:D = \mu$, so wird $\cos a = -1$, und *ac* und *ad* fallen in *ae* zusammen, so dafs es alsdann nur eine Richtung ohne Ablenkung giebt. Für den Kalkspath ist diese Neigung der brechenden Fläche 58° 55'.

Läfst man bei der Elimination von α' aus dem Ausdruck für $tang\,\varphi$ (X.) die höhern Potenzen von $\pi^2 - \mu^2$ fort, so liefert dazu die Gleichung (29)

$$\cos(\alpha+\alpha') = \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2} \frac{B^2 \cos^2\alpha' \cos^2 a - D^2 \sin^2\alpha'}{\cos(\alpha-\alpha')},$$

oder da man in dem Faktor $(\pi^2-\mu^2)$ den Näherungswerth $\frac{1}{1+\mu^2}$ von $sin^2\alpha$ setzen darf:

$$cos(\alpha+\alpha') = \frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^2}\left(\frac{B^2 cos^2 a - D^2\mu^2}{2\mu}\right),$$

und es ergiebt sich:

$$\text{X, a.}\quad tang\,\varphi = B\,sin\,a(B\,cos\,a+D\mu)\frac{1+\mu^2}{2\mu}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}.$$

Es ist also das Azimuth φ positiv (für negative Krystalle), wenn a zwischen 0 und $arc\left(cos = -\frac{D}{B}\mu\right)$ liegt; negativ, wenn a zwischen $arc\left(cos = -\frac{D}{B}\mu\right)$ und 180° liegt. Umgekehrt verhält es sich bei positiven Krystallen. Die Ablenkung φ ist nämlich negativ zu denken, wenn sie auf derjenigen Seite der Einfalls-Ebene stattfindet, welche derjenigen Seite derselben entgegengesetzt ist, nach der die Bewegungen P und R_p hingehend angenommen wurden.

Differenzirt man die Gleichung (X, a) nach a, um das Maximum der Ablenkung zu finden, so ergiebt sich für dasselbe

$$cos\,a = -\frac{D}{4B}\mu \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}+\left(\frac{D}{4B}\right)^2\mu^2}.$$

Es giebt also im Allgemeinen für jede Lage der brechenden Fläche zwei Maxima. Ist $D=0$, also die brechende Fläche der Axe parallel, so ist $cos\,a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, d. h. $a =$ 45° und $=$ 135°. Je kleiner B wird, also je stärker die brechende Fläche gegen die Axe geneigt ist, desto mehr nähern sich die zwei Werthe von $cos\,a$ beziehlich den Grenzen 0 und -1, mithin a den Grenzen 90° und 180°. Während also bei wachsender Neigung der brechenden Ebene das eine Maximum des Azimuths von 45° bis 90° wächst, wächst das zweite von 135° bis 180°, jedoch dieses schneller als das erste.

Wird $\frac{B}{D} = tang\,\alpha' = \mu$, so sind die Werthe von $\cos a$, $\frac{1}{2}$ und -1. Da aber für $\cos a = -1$, $a = 180^0$ ist, so ist alsdann keine Ablenkung mehr vorhanden. Für gröfsere Werthe von B würde $\cos a > 1$ werden; das eine der zwei Maxima fällt also zwischen $\frac{B}{D} = \mu$ und $B = 0$, d. h. bei noch stärkerer Neigung, fort, und es giebt nur eine Richtung gröfster Ablenkung. Für $B = 0$ selbst findet natürlich gar keine Ablenkung mehr statt.

Für den Fall, dafs das umgebende Mittel mit dem Krystall nahe dasselbe Brechungsverhältnifs hat, wird

$$\cos(\alpha + \alpha') = \frac{(\pi^2 - \mu^2)(B^2 \cos^2 \alpha' \cos^2 a - D^2 \sin^2 \alpha')}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2) B^2 \sin^2 a},$$

und die Ablenkung erhält man alsdann aus (X.)

$$\text{X, b.} \quad tang\,\varphi = \frac{B \sin a (D \sin \alpha' + B \cos \alpha' \cos a)(\mu^2 - \pi^2)}{1 - \mu^2 - (\pi^2 - \mu^2) B^2 \sin^2 a}.$$

Brewster mafs die Ablenkung der Polarisations-Ebene des an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths reflektirten Lichtes für verschiedene Azimuthe der Einfalls-Ebene, nachdem er dieselben mit einer Schicht Cassiaöl bedeckt hatte. Neumann berechnete nach der Formel (X, b), welche für diesen Fall

$$tg\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}(\mu^2 - \pi^2) \sin a (\sin \alpha' + \cos \alpha' \cos a)}{1 - \mu^2 - \frac{1}{2}(\pi^2 - \mu^2) \sin^2 a}$$

wird, dieselben Abweichungen, indem er als Brechungsverhältnifs des Cassiaöls $\frac{1}{0{,}6192}$ annahm, welcher Werth sich aus der Beobachtung Brewster's ergiebt, dafs für $a = 42^0$, die Ablenkung 90^0 wird. Die beobachteten und berechneten Werthe sind:

a	Polaris. W:	Beobachtete Ablenkung.	Berechnete Ablenkung.
0°	47° 16′	0°	0°
12	46 1	— 45	— 35 41′
42	37 17	90	90
90	31 30	+ 45	+ 41 35
180	47 16	0	0

Neumann vermuthet wegen der unvollkommneren Uebereinstimmung in den Resultaten, dafs Brewster nicht genau unter dem Polarisationswinkel, sondern in der Nähe der Incidenz von 45° beobachtet habe.

Wenn das umgebende Mittel genau das Brechungsverhältnifs des gewöhnlichen Strahls hat, so ergiebt sich aus (17), da $\alpha = \alpha'$ wird,

$$pN = 2\tau \sin\varepsilon' (\tau \cos\varepsilon'' - v),$$
$$sN = -2\tau \cos\varepsilon' \sin\varepsilon'' \sin(\alpha - \alpha''),$$

also wenn man für ε' und ε'' ihre Werthe restituirt, da $N = 2\tau(1-\delta^2)\sin(\alpha''+\alpha)$ wird,

$$p = \frac{D^2 \sin^2\alpha - B^2 \cos^2\alpha \cos^2 a}{1-\delta^2} \cdot \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)}$$

$$s' = \frac{B \sin a (D \sin\alpha + B \cos\alpha \cos a)}{1-\delta^2} \cdot \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)}$$

$$p' = \frac{B \sin a (D \sin\alpha - B \cos\alpha \cos a)}{1-\delta^2} \cdot \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)}$$

$$s = \frac{B^2 \sin^2 a}{1-\delta^2} \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)},$$

und deswegen

$$R_p = \frac{P\Delta' + S \cdot B \sin a}{1-\delta^2} (D \sin\alpha + B \cos\alpha \cos a) \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)}$$

$$R_s = \frac{P\Delta' + S \cdot B \sin a}{1-\delta^2} B \sin a \frac{\sin(\alpha''-\alpha)}{\sin(\alpha''+\alpha)}.$$

Das Azimuth der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls ist daher gegeben durch

$$\tang\varphi' = \frac{R_p}{R_s} = \frac{D \sin\alpha + B \cos\alpha \cos a}{B \sin a}$$

und mithin unabhängig von P und S. Das Licht ist folglich stets polarisirt, das einfallende Licht mag polarisirt oder unpolarisirt sein.

Reflexion des polarisirten Lichtes.

War das einfallende Licht polarisirt, z. B. im Azimuthe φ_1, d. h. bildet die Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls mit der Einfalls-Ebene den Winkel φ_1, so dafs $P:S = tang\,\varphi_1$ ist, so wird die Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls gleichfalls gegen die Einfalls-Ebene geneigt sein, etwa unter dem Winkel φ', so dafs

$$tang\,\varphi' = \frac{R_p}{R_s} \text{ ist.}$$

Ist nun das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, also $S = 0$, so geben die Gleichungen (V.)

$$R_p = pP, \quad R_s = p'P, \quad \text{also } tang\,\varphi' = \frac{p}{p'}.$$

Die zur Prüfung dieser Formel an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths von Neumann angestellten Messungen sind folgende:

α	a	Beobachtete φ'.	Berechnete φ'.	Diff.
45°	45°	— 87° 37′	— 87° 42′	— 5′
33 52′	45	— 87 44,4	— 87 43,5	+ 0,9
45	61 28′	— 89 57	0 0	+ 3
45	67 30	+ 88 47	+ 88 42	+ 5
45	90	+ 83 59	+ 83 55	+ 4
45	90	+ 84 3	+ 83 55	+ 8
33 52	90	+ 86 55	+ 86 51,4	+ 3,6
45	135	+ 78 37	+ 78 19	+ 18
33 52		+ 82 55,3	+ 83 0,5	— 5,2
45	157 30	+ 81 58	+ 81 51	+ 7

Nennt man φ_p' den Winkel der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls mit der des einfallenden (senkrecht auf der Einfalls-Ebene stehenden), d. h. die Drehung der Polarisations-Ebene, so ist

$$tang\,\varphi_p' = \frac{p'}{p}.$$

Ist

Ist das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene porisirt, also $P = 0$, so wird $R_p = s'S$ und $R_s = sS$, so, wenn man φ_s' die Drehung der Polarisations-Ebene ennt,

$$tang\,\varphi_s' = \frac{s'}{s}.$$

ie zur Prüfung dieser Formel an der natürlichen Bruchiche des Kalkspaths von Neumann angestellten Messunn enthält die folgende Tafel:

α	a	Beobachtete φ_s'.	Berechnete φ_s.	Diff.
57° 47′	22,5°	— 2° 18′	— 2° 12′	— 6′
33 52	45	— 4 8,3	— 4 16,6	+ 8,3
57 47	45	— 3 45,7	— 3 41,5	— 4,2
57 47	67,5	— 3 44,5	— 3 46,5	+ 2,0
57 47	90	— 2 14,6	— 2 32,5	+ 1,5
33 52	90	— 2 16,6	— 2 11	— 3,6
57 47	135	+ 0 16,6	+ 0 13,7	— 2,9
57 47	157,5	+ 0 28,3	+ 0 28,5	+ 0,2

Da für den Polarisationswinkel nach (19) $\frac{p'}{p} = \frac{s}{s'}$ ist, ergänzen sich die Drehungen φ_p' und φ_s' bei diesem Einlswinkel zu 90°.

Da p' und s' mit B zugleich verschwinden, so findet f der gegen die optische Axe senkrechten Fläche keine rehung statt. Da ferner p' und s' mit $\sin a$ zugleich verhwinden, so findet auf keiner Fläche eine Drehung statt, enn das Licht in der Ebene des Hauptschnitts einfällt.

Löst man $p' = 0$ nach α auf, so erhält man die Einfallsinkel, unter welchen unabhängig von B und a, d. h. bei der Lage der brechenden Fläche und bei jedem Azimuth r Einfalls-Ebene keine Drehung stattfindet, wenn das nfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polairt ist; eben so giebt $s' = 0$ die analogen Werthe von α r nach der Einfalls-Ebene polarisirtes Licht. Der erste nfallswinkel ist bestimmt durch $tang\,\alpha' = \frac{B}{D}\cos a$, der eite Einfallswinkel durch $tang\,\alpha' = -\frac{B}{D}\cos a$.

Will man das Azimuth φ_1 so bestimmen, dafs das reflektirte Licht der Einfalls-Ebene parallel oder senkrecht auf dieselbe polarisirt ist, so hat man in $tang\,\varphi_1 = \frac{P}{S}$ P und S nur so zu bestimmen, dafs beziehlich $R_p = 0$ oder $R_s = 0$ wird.

Ist nun $R_p = pP + s'S = 0$, so ist $\frac{P}{S} = -\frac{s'}{p}$, und nennt man φ_s das entsprechende Azimuth des einfallenden Strahls, so ist $tang\,\varphi_s = -\frac{s'}{p}$. Nimmt man $R_s = p'P + sS = 0$, so ist $\frac{P}{S} = -\frac{s}{p'}$, also wenn man φ_p das entsprechende Azimuth des einfallenden Lichtes nennt,

$$tang\,\varphi_p = -\frac{p'}{s}.$$

Die zur Prüfung dieser Formeln an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths von Neumann angestellten Messungen sind folgende:

α	a	Beobachtete φ_s.	Berechnete φ_s.	Diff.
45°	45°	— 11° 5,5′	— 11° 40′	+ 34,5′
45	61 28′	— 11 4	— 11 16	+ 12
45	90	— 6 19	— 6 5	— 14
45	135	+ 2 17	+ 2 17,5	+ 0,5

α	a	Beobachtete φ_p.	Berechnete φ_p.	Diff.
45°	45°	— 89° 10,5′	— 89° 11,5′	— 1′
33 52′	45	— 88 38,4	— 88 37,1	+ 1,3
45	90	+ 87 23	+ 87 28	— 5
45	112,5	+ 85 47,5	+ 85 52	— 4,5
45	135	+ 85 47,5	+ 85 50	— 2,5
45	157,5	+ 87 27	+ 87 26	+ 1

Fällt das Licht unter dem Polarisationswinkel ein, so ist $\frac{s'}{p} = \frac{s}{p'}$, also R_p und R_s zugleich der Null gleich, und es wird daher gar kein Licht reflektirt.

Da nun $tang\,\varphi_1 = -\frac{s'}{p} = -\frac{s'}{s}\cdot\frac{s}{p} = -tg\,\varphi\cdot\frac{s}{p}$ ist,
so verhält sich die Tangente des Azimuths der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls, welcher nicht reflektirt wird, zur Tangente der Ablenkung der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls (wenn derselbe von einem npolarisirt einfallenden Strahl herrührt), wie $-s:p$. Ferner hat man

$$\frac{tang\,\varphi_s'}{tang\,\varphi_s} = \frac{cotg\,\varphi_p}{tang\,\varphi_p'},$$

nd als allgemeinen Ausdruck für das Azimuth des reflekrten Strahls

$$tang\,\varphi' = \frac{R_p}{R_s} = \frac{pP+s'S}{p'P+sS} = \frac{p\,tang\,\varphi_1 + s'}{p'\,tang\,\varphi_1 + s}$$

$$= \frac{\frac{p}{s}\,tang\,\varphi_1 + tang\,\varphi_s'}{1 - tg\,\varphi_1\,cotg\,\varphi_p}.$$

Hieraus folgt umgekehrt das Azimuth der Polarisationsbene des Einfallsstrahls, wenn dasselbe für das reflektirte geben ist, nämlich:

$$tang\,\varphi_1 = \frac{s\,tang\,\varphi' - s'}{p - p'\,tang\,\varphi'},$$

ler wenn man $\frac{p'}{p} = tang\,\zeta$ und $\frac{s'}{s} = tang\,\xi$ setzt:

$$tang\,\varphi_1 = \frac{p\,cos\,\zeta\,sin(\varphi' - \xi)}{s\,cos\,\xi\,sin(\varphi' + \zeta)}.$$

Die Messungen, welche Neumann zur Prüfung dier Formel an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths ei einem Einfallswinkel von 45° anstellte, sind folgende:

a	φ'	Beobachtete φ_1.	Berechnete φ_1.	Diff.
45°	+ 45°	— 71° 0′	— 71° 5′	+ 5′
45	— 45	+ 69 40	+ 69 52	+ 12
90	+ 20 29′	— 46 30	— 46 8	+ 22
90	— 32 39	+ 53 33	+ 53 27	— 6
90	+ 45	— 64 19	— 64 24	+ 5
90	— 45	+ 70 23	+ 70 29	+ 6
90	+ 6 5	0 2,7	0 0	— 2,7

a	φ'	Beobachtete φ_1.	Berechnete φ_1.	Diff.
135°	+ 45°	— 74° 15′	— 74° 10′	+ 5′
135	— 45	+ 67 11	+ 67 15	— 4
135	78 16′	89 53,5	89 59	+ 5,5
157,5	+ 45	— 74 39,5	— 74 46	+ 6,5
157,5	— 45	+ 70 25	+ 70 33	+ 8

Intensität der gebrochenen Strahlen.

Da sich die Intensitäten wie die lebendigen Kräfte verhalten, so hat man, wenn man die Intensität des gewöhnlichen Strahls mit I'^2, die des ungewöhnlichen mit I''^2 bezeichnet,

$$I'^2 : I''^2 = R'^2 M' : R''^2 M''.$$

Substituirt man hierin für M' und M'' ihre Werthe und setzt $\sin\alpha'' \cos\alpha'' = \tau''$, so erhält man

$$I'^2 : I''^2 = R'^2 : R''^2 \frac{\tau''}{\tau'} \left[1 + \frac{\sin\alpha'' \cdot \delta'' \cdot \Delta'' \cdot (\mu^2 - \pi^2)}{\cos\alpha'' \left[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2\right]}\right],$$

oder insofern $\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2 = \dfrac{\sin^2\alpha''}{\sin^2\alpha}$ und

$$\mu^2 - \pi^2 = \frac{\mu^2 \sin^2\alpha - \sin^2\alpha''}{\sin^2\alpha (1 - \delta''^2)} = \frac{\sin(\alpha' + \alpha'')\sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin^2\alpha (1 - \delta''^2)} \text{ ist,}$$

$$33)\quad I'^2 : I''^2 = R'^2 : R''^2 \frac{\tau''}{\tau'} \left[1 + \frac{\delta'' \Delta'' \sin(\alpha' + \alpha'')\sin(\alpha' - \alpha'')}{\tau''(1 - \delta''^2)}\right].$$

1) Ist das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, und daher $S = 0$, so wird aus (III. und IV.)

$$NR' = 2\tau \sin\varepsilon'' \sin(\alpha + \alpha'') P, \quad NR'' = 2\tau \sin\varepsilon' \sin(\alpha + \alpha')P.$$

Der gewöhnliche Strahl verschwindet daher, wenn $\sin\varepsilon''$, d. h. wenn $B \sin a$ verschwindet, also 1) wenn $B = 0$ ist, d. h. wenn die brechende Fläche auf der Axe senkrecht steht, 2) wenn $\sin a = 0$ ist, d. h. wenn das Licht in der Ebene des Hauptschnitts einfällt.

Der ungewöhnliche Strahl dagegen verschwindet, wenn $\sin\varepsilon' = 0$ ist, d. h. wenn die Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Strahls senkrecht gegen die Einfalls-Ebene steht.

)a $\varkappa' \sin \varepsilon' = D \sin \alpha' - B \cos \alpha' \cos a$ ist, so tritt dieser Fall in, wenn $\cos a = \frac{D}{B} \tang \alpha'$ ist, also wenn die Axe auf er Durchschnittslinie der Einfalls-Ebene mit der gewöhnch gebrochenen Well-Ebene senkrecht steht, wie es z. B. attfindet, wenn die brechende Ebene der Axe parallel ist, ıd die Einfalls-Ebene senkrecht den Hauptschnitt kreuzt.

Die Bedingung des Verschwindens des ungewöhnlichen rahls ist also dieselbe, unter welcher $\tang \varphi_p = 0$, d. h. ter welcher das reflektirte Licht senkrecht gegen die Einls-Ebene polarisirt ist.

Läfst man die zweiten und höheren Potenzen von $\iota(\alpha' - \alpha'')$ fort, so reducirt sich das Intensitätsverhältnifs r gebrochenen Strahlen auf

$$:I''^2 = \varkappa''^2 \sin^2 \varepsilon'' : \varkappa'^2 \sin^2 \varepsilon' \left[1 - 2\frac{\sin(\alpha - \alpha')\sin(\alpha' - \alpha'')}{\sin(\alpha + \alpha')\sin(\alpha' + \alpha'')}\right].$$

2) Ist das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene larisirt, also $P = 0$, so hat man

$$NR' = 2\tau(\tau \cos \varepsilon'' + v)S, \quad NR'' = 2\tau \cos \varepsilon'(\tau + \tau')S.$$

er ungewöhnliche Strahl verschwindet daher, wenn $\cos \varepsilon'$: 0 ist, also in den Fällen, in welchen bei senkrecht gen die Einfalls-Ebene polarisirtem Einfallsstrahl der geöhnliche verschwindet.

Der gewöhnliche verschwindet, wenn $\tau \cos \varepsilon'' + v = 0$ ird. Diese Bedingungsgleichung läfst sich schreiben:

$$\tang \alpha''[D\tau - B \cos \alpha(1 - \mu^2 \sin^2 \alpha)] = B\tau \cos \alpha - D\mu^2 \sin^2 \alpha$$

ıd giebt, je nachdem man α oder α'' eliminirt, eine Gleiung des vierten Grades nach $\tang \alpha''$ oder $\tang \alpha$, aus elcher für jedes gegebene Azimuth und für jede Lage der echenden Fläche die passenden Einfallswinkel sich finın lassen.

Giebt man der letzten Gleichung die Form

$$B \cos a[\tau + tg\, \alpha''(1 - \mu^2 \sin^2 \alpha)] = D(\tau\, tg\, \alpha'' + \mu^2 \sin^2 \alpha),$$

sieht man augenblicklich, dafs für jede Incidenz die Bengung erfüllt ist, wenn zugleich $D = 0$ und $\cos a = 0$, d. h. wenn die brechende Fläche der Axe parallel liegt, ıd die Einfalls-Ebene den Hauptschnitt senkrecht kreuzt.

3) Ist das einfallende Licht im Azimuth φ polarisirt so hat man

$$\frac{I'^2}{I''^2} = \frac{\sin^2(\alpha+\alpha'')}{\sin^2(\alpha+\alpha')} \times \frac{\left[\sin\varepsilon''\sin\varphi - \left(\cos\varepsilon''\cos(\alpha-\alpha'') + \frac{\delta''(\sin^2\alpha' - \sin^2\alpha'')}{\varkappa''\sin(\alpha+\alpha'')}\right)\cos\varphi\right]}{(\sin\varepsilon'\sin\varphi + \cos\varepsilon'\cos(\alpha-\alpha')\cos\varphi)^2\,\tau''\,\tau'^{-1}\,U}$$

wo U den eingeklammerten Ausdruck in (33) bezeichnet.

Es ist hiernach möglich, unter jedem Einfallswinkel und unter jedem Azimuth der Einfalls-Ebene durch Änderung der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls einen der zwei gebrochenen Strahlen zu vernichten. Der ungewöhnliche Strahl verschwindet für

$$\tan g\,\varphi = -\cot g\,\varepsilon'\cos(\alpha-\alpha'),$$

der gewöhnliche für

$$\tan g\,\varphi = \cot g\,\varepsilon''\cos(\alpha-\alpha'') + \frac{\delta''(\sin^2\alpha' - \sin^2\alpha'')}{B\sin\alpha\sin(\alpha+\alpha'')}.$$

Wie genau diese Formeln mit der Erfahrung stimmen, zeigen folgende Messungen Neumann's an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths für verschiedene Einfallswinkel und verschiedene Azimuthe der einfallenden Strahlen:

1) In Bezug auf die durch die erste Formel gegebenen Azimuthe φ, für welche der ungewöhnliche Strahl verschwindet:

α	a	Beobachtete φ.	Berechnete φ.	Diff.
45°	45°	+ 72° 38′	+ 72° 36′	− 2′
50	60	− 88 20,5	− 88 16	− 4,5
45	90	− 65 25	− 65 20,5	− 4,5
53	90	− 61 55	− 61 51	− 4
45	135	− 31 53	− 31 52	− 1
45	135	− 31 48	− 31 52	+ 4
40	140 57′	− 26 50	− 26 42	− 8
50	141	− 28 30	− 28 27,5	− 2,5

2) In Bezug auf die durch die zweite Formel bestimmten Azimuthe φ, für welche der gewöhnliche Strahl verschwindet:

α	α	Beobachtete φ.	Berechnete. φ.	Diff.
45°	45°	— 15° 27',8	— 15° 26'	— 1,8'
50	60	+ 1 39	+ 1 30	— 9
45	90	+ 22 28	+ 22 33	+ 5
53	90	+ 24 27,5	+ 24 29	+ 1,5
45	135	+ 55 27,5	+ 55 31	+ 3,5
45	135	+ 55 28,5	+ 55 31	+ 2,5
50	141	+ 59 44	+ 59 39	— 5

4) Ist endlich das einfallende Licht unpolarisirt, so
t man

$$i = \frac{[\varkappa'' \sin\varepsilon'' \sin(\alpha+\alpha'')]^2 + [\varkappa'' \cos\varepsilon''(\tau+\tau'') + \delta''(\sin^2\alpha' - \sin^2\alpha'')]^2}{[(\sin\varepsilon' \sin(\alpha+\alpha'))^2 + \cos^2\varepsilon'(\tau+\tau')^2]\,\varkappa''^2\, U}.$$

Die Intensität beider Strahlen ist also im Allgemeinen
ıgleich. Entwickelt man den Ausdruck nach Potenzen
ın $\sin(\alpha'-\alpha'')$, so geben die von dieser Gröfse unab-
ngigen Glieder, welche als erste Näherung angesehen
erden können, folgendes Verhältnifs:

$$\frac{I'^2}{I''^2} = \frac{1-\sin^2\varepsilon' \sin^2(\alpha-\alpha')}{1-\cos^2\varepsilon' \sin^2(\alpha-\alpha')}.$$

Es folgt hieraus, dafs keiner der beiden Strahlen ver-
hwinden kann, und dafs die gröfste Intensität des ge-
öhnlichen Strahls (und die kleinste des ungewöhnlichen)
ntritt für $\varepsilon' = 0$; dagegen die gröfste Intensität des un-
wöhnlichen (und die kleinste des gewöhnlichen) für ε'
= 90.

eflexion und Refraction beim Uebergang des Lichts aus einaxigen Krystallen in ein einfachbrechendes Mittel.

Das aus einem einaxigen Krystall in ein einfachbre-
endes Mittel tretende Licht kann durch gewöhnliche oder
ıgewöhnliche Brechung entstanden sein; in jedem Falle
erden aber zwei reflektirte und ein gebrochenes Wellen-
stem sich bilden. Die zwei reflektirten Systeme mögen
ırch den Zusatz: **gewöhnlich reflektirt** und **unge-
öhnlich reflektirt** unterschieden werden.

Es seien α', α_1', α_2', α_3' der Einfallswinkel, der Reflexionswinkel des gewöhnlich und ungewöhnlich reflektirten Strahls, und der Brechungswinkel — wenn der einfallende Strahl ein gewöhnlicher ist; dagegen α'', α_1'', α_2'', α_3'', wenn er ein ungewöhnlicher ist. β, γ, δ mit denselben Abzeichen mögen die Cosinus der Winkel zwischen den Normalen der respectiven Wellen-Ebenen und den drei Axen vorstellen. Die Beziehungen zwischen den Einfallsw., Brechungsw. und Reflexionsw. sind alsdann:

$$\sin^2\alpha_3' = \frac{\sin^2\alpha'}{\mu^2} = \frac{\sin^2\alpha_1'}{\mu^2} = \frac{\sin^2\alpha_2'}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta_2'^2},$$

$$\sin^2\alpha_3'' = \frac{\sin^2\alpha''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta''^2} = \frac{\sin^2\alpha_1''}{\mu^2}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha_2''}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\delta_2''^2}.$$

α_1 und α_2 haben vermöge der Lage der reflektirten Strahlen gegen das Einfallsloth einen negativen Werth; es müssen daher aus diesen quadratischen Gleichungen für sie die negativen Wurzeln genommen werden. Die positiven Wurzeln von $\sin^2\alpha_1'$ und $\sin^2\alpha_2''$ sind natürlich $\sin\alpha'$ und $\sin\alpha''$. Die positiven Wurzeln von $\sin^2\alpha_2'$ und $\sin^2\alpha_1''$ haben ebenfalls eine physikalische Bedeutung. Träte nämlich der gebrochene Strahl aus dem einfachbrechenden Mittel in den Krystall in seiner eigenen Richtung zurück, so würden durch die Brechung beim Zurücktritt in den Krystall zwei Wellensysteme erregt, von denen nur das eine hier wirklich vorhanden ist; das zweite (fehlende) entspricht den positiven Wurzeln von $\sin^2\alpha_2'$ und $\sin^2\alpha_1''$.

Die Werthe von β, γ, δ bleiben dieselben, wie die correspondirenden Werthe beim Eintritt in den Krystall, nämlich für das einfallende und für das gebrochene Wellensystem:

$$\beta = B\cos\alpha - D\sin\alpha\cos a,$$
$$\gamma = \sin\alpha\sin a,$$
$$\delta = D\cos\alpha + B\sin\alpha\cos a,$$

und für die reflektirten Wellensysteme:

$$\beta = B\cos\alpha + D\sin\alpha\cos a,$$

$$\gamma = -\sin\alpha \sin a,$$
$$\delta = D\cos\alpha - B\sin\alpha\cos a.$$

Die Vibrations-Intensitäten in den im Krystall sich verbreitenden Wellensystemen seien durch R mit den bei α angewendeten Abzeichen vorgestellt; die Componenten der gebrochenen Welle nach der Einfalls-Ebene und senkrecht darauf seien S' und P', wenn das einfallende Licht gewöhnliches ist, S'' und P'', wenn dasselbe ungewöhnliches ist.

Die Gleichungen, aus denen sich die Werthe dieser Intensitäten ergeben, können wie oben (Seite 247 et seqq.) entwickelt werden.

1) Relationen, die sich aus dem Princip der Gleichheit der Bewegung ergeben.

Man zerlege wiederum die Bewegung in sämmtlichen Wellen nach dem Einfallsloth, senkrecht auf die Einfalls-Ebene, und senkrecht auf die letzten beiden Richtungen, d. h. nach der Durchschnittslinie der Einfalls-Ebene mit der brechenden Ebene.

Ist das einfallende Wellensystem ein gewöhnliches, so erhält man für die auf der Einfalls-Ebene senkrechte Componente in dem gebrochenen Wellensystem P', in dem einfallenden $R'\cos\varepsilon'$, in den reflektirten $R_1'\cos\varepsilon_1'$ und $R_2'\times \cos\varepsilon_2'$; wo die verschiedenen ε die Winkel des Lothes auf der Einfalls-Ebene mit den Schwingungsrichtungen der respectiven Wellensysteme bedeuten. Aus den körperlichen Dreiecken, die aus dem Einfallsloth, der optischen Axe und den Normalen der verschiedenen Wellensysteme gebildet werden, ergiebt sich sogleich:

$$35)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa'}, \quad \cos\varepsilon_1' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa_1'}, \\ \cos\varepsilon_2' = -\dfrac{D\sin\alpha_2' + B\cos\alpha_2'\cos a}{\varkappa_2'}, \end{cases}$$

wo $\varkappa' = \sqrt{1-\delta'^2}$, $\varkappa_1' = \sqrt{1-\delta_1'^2}$, $\varkappa_2' = \sqrt{1-\delta_2'^2}$ gesetzt ist.

Für die Winkel der Schwingungsrichtungen der im Krystall befindlichen Systeme mit dem Einfallsloth findet man, dieselben mit η', η_1', η_2' bezeichnend,

$$\cos\eta' = \sin\alpha'\sin\varepsilon', \quad \cos\eta_1' = \sin\alpha_1'\sin\varepsilon_1', \quad \cos\eta_2' = \sin\alpha_2'\sin\varepsilon_2'$$

während

$$36)\quad \begin{cases} \sin\varepsilon' = \dfrac{D\sin\alpha' - B\cos\alpha'\cos a}{\varkappa'}, \\ \sin\varepsilon_1' = -\dfrac{D\sin\alpha_1' + B\cos\alpha_1'\cos a}{\varkappa_1'}, \\ \sin\varepsilon_2' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa_2'} \end{cases}$$

sich ergiebt.

Für die Winkel zwischen denselben Schwingungsrichtungen und der Durchschnittslinie der Einfalls-Ebene mit der brechenden Ebene erhält man, sie durch ϑ', ϑ_1', ϑ_2' bezeichnend,

$$\cos\vartheta' = \cos\alpha'\sin\varepsilon', \quad \cos\vartheta_1' = \cos\alpha_1'\sin\varepsilon_1' \quad \cos\vartheta_2' = \cos\alpha_2'\sin\varepsilon_2'.$$

Die Gleichheit der Bewegungen in beiden Mitteln ist demnach ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\text{XI.}\quad \begin{cases} 1)\ P' = R'\cos\varepsilon' + R_1'\cos\varepsilon_1' + R_2'\cos\varepsilon_2' \\ 2)\ S'\sin\alpha_3' = -R'\sin\alpha'\sin\varepsilon' + R_1'\sin\alpha_1'\sin\varepsilon_1' \\ \qquad\qquad -R_2'\sin\alpha_2'\sin\varepsilon_2' \\ 3)\ S'\cos\alpha_3' = -R'\cos\alpha'\sin\varepsilon' - R_1'\cos\alpha_1'\sin\varepsilon_1' \\ \qquad\qquad +R_2'\cos\alpha_2'\sin\varepsilon_2'. \end{cases}$$

Eben so findet man für den Fall, dafs das einfallende Wellensystem ein ungewöhnliches ist,

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} 1)\ P'' = R''\cos\varepsilon'' + R_1''\cos\varepsilon_1'' + R_2''\cos\varepsilon_2'' \\ 2)\ S''\sin\alpha_3'' = R''\sin\alpha''\sin\varepsilon'' + R_1''\sin\alpha_1''\sin\varepsilon_1'' \\ \qquad\qquad -R_2''\sin\alpha_2''\sin\varepsilon_2'' \\ 3)\ S''\cos\alpha_3'' = R''\cos\alpha''\sin\varepsilon'' - R_1''\cos\alpha_1''\sin\varepsilon_1'' \\ \qquad\qquad +R_2''\cos\alpha_2''\sin\varepsilon_2'', \end{cases}$$

während

$$37)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon'' = \dfrac{D\sin\alpha'' - B\cos\alpha''\cos a}{\varkappa''}, \\ \cos\varepsilon_1'' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa_1''}, \end{cases}$$

$$37)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon_2'' = -\dfrac{D\sin\alpha_2''+B\cos\alpha_2''\cos a}{\varkappa_2''}, \\ \sin\varepsilon'' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa''}, \\ \sin\varepsilon_1'' = -\dfrac{D\sin\alpha_1''+B\cos\alpha_1''\cos a}{\varkappa_1''}, \\ \sin\varepsilon_2'' = \dfrac{B\sin a}{\varkappa_2''} \text{ ist.} \end{cases}$$

Da in den gewöhnlichen Wellensystemen die Schwingungen in derjenigen Ebene geschehen, welche durch die Axe und die Normale geht, so sind ε', ε_1', ε_1'' zugleich die Complemente der Azimuthe der betreffenden Polarisations-Ebenen; und da in den ungewöhnlichen Wellensystemen die Schwingungsrichtungen senkrecht stehen auf den durch die Axe und die Normale gehenden Ebenen, so ist der Winkel zwischen denselben und dem Loth auf der Einfalls-Ebene gleich dem Winkel zwischen der Polarisations-Ebene und der Einfalls-Ebene, also ε'', ε_2', ε_2'' die Azimuthe der respectiven Polarisations-Ebenen.

2) Relationen, die sich aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ergeben.

Bezeichnet man durch M mit den obigen Abzeichen die Volumina der entsprechenden Aethermassen in den verschiedenen Wellen; ferner die Wellenlängen in denselben durch l', l_1', l_2', l'', l_1'', l_2'', setzt

$$m'' = \frac{(\pi^2-\mu^2)\,\delta''(D-\delta''\cos\alpha'')}{\cos\alpha''(\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\,\delta''^2)},$$

und versteht unter m_2' und m_2'' denselben Ausdruck, wenn man darin δ'', α'', durch δ_2', α_2', und durch δ_2'', α_2'' ersetzt, so erhält man, da

$$\frac{l'}{l_3'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha_3'}, \quad \frac{l_1'}{l_3'} = -\frac{\sin\alpha_1'}{\sin\alpha_3'}, \quad \frac{l_2'}{l_3'} = -\frac{\sin\alpha_2'}{\sin\alpha_3'},$$

$$\frac{l''}{l_3''} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\alpha_3''}, \quad \frac{l_1''}{l_3''} = -\frac{\sin\alpha_1''}{\sin\alpha_3''}, \quad \frac{l_2''}{l_3''} = -\frac{\sin\alpha_2''}{\sin\alpha_3''} \text{ ist,}$$

$$M' = \frac{l_3'\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha_3'} \qquad M'' = \frac{l_3''\sin\alpha''\cos\alpha''}{\sin\alpha_3''}(1-m'')$$

$$M_1' = \frac{l_3' \sin\alpha_1' \cos\alpha_1'}{\sin\alpha_3'} \qquad M_1'' = \frac{l_3'' \sin\alpha_1'' \cos\alpha_1''}{\sin\alpha_3''}$$

$$M_2' = \frac{l_3' \sin\alpha_2' \cos\alpha_2'}{\sin\alpha_3'}(1-m_2') \quad M_2'' = \frac{l_3'' \sin\alpha_2'' \cos\alpha_2''}{\sin\alpha_3''}(1-m_2'')$$

$$M_3' = l_3' \cos\alpha_3' \qquad M_3'' = l_3'' \cos\alpha_3''.$$

Die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist alsdann für die zu R' gehörigen Systeme:

$$R'^2 M' = (P'^2 + S'^2) M_3' + R_1'^2 M_1' + R_2'^2 M_2'$$

oder

$$38)\quad (P'^2 + S'^2)\tau_3' = R'^2 \tau' - R_1'^2 \tau_1' - R_2'^2 \tau_2' (1 - m_2'),$$

und für die zu R'' gehörenden Wellensysteme:

$$R''^2 M'' = (P''^2 + S''^2) M_3'' + R_1''^2 M_1'' + R_2'' M_2''$$

oder

$$39)\quad (P''^2 + S''^2)\tau_3' = R''^2 \tau'' (1 - m'') \\ - R_1''^2 \tau_1'' - R_2''^2 \tau_2'' (1 - m_2''),$$

wo τ für das Produkt $\sin\alpha \cos\alpha$ steht.

Die Gleichung (38) läfst sich auf eine Gleichung des ersten Grades zurückführen, wenn man das Produkt der zwei letzten Gleichungen XI. von (38) subtrahirt, wodurch man wegen $1 - \sin^2\varepsilon = \cos^2\varepsilon$ erhält:

$$40)\quad P'^2 \tau_3' = R'^2 \tau' \cos^2\varepsilon' - R_1'^2 \tau_1' \cos^2\varepsilon_1' \\ - R_2'^2 \tau_2' [\cos^2\varepsilon_2' - m_2'] + R' R_2' \sin(\alpha' - \alpha_2') \sin\varepsilon' \sin\varepsilon_2' \\ - R_1' R_2' \sin(\alpha_1' + \alpha_2') \sin\varepsilon_1' \sin\varepsilon_2' \\ - R' R_1' \sin(\alpha' - \alpha_1') \sin\varepsilon' \sin\varepsilon_1',$$

und diese Gleichung alsdann durch die erste der Gleichungen (XI.) dividirt. Die Division giebt:

$$\text{XIII.}\quad P' \tau_3' = R' \tau' \cos\varepsilon' - R_1' \tau_1' \cos\varepsilon_1' \\ - R_2' (\tau_2' \cos\varepsilon_2' - v_2')\ *),$$

---

*) Von der Richtigkeit der Division überzeugt man sich, wenn man das Produkt aus (XIII.) und (XI, 1) mit (40) vergleicht. Die Uebereinstimmung ist vollständig, sobald

$$a)\quad \begin{cases} \sin(\alpha' - \alpha_2') \sin\varepsilon' \sin\varepsilon_2' = \cos\varepsilon' \left(\cos\varepsilon_2' (\tau' - \tau_2') - \dfrac{m_2' \tau_2'}{\cos\varepsilon_2'} \right) \\ \sin(\alpha_1' + \alpha_2') \sin\varepsilon_1' \sin\varepsilon_2' = \cos\varepsilon_1' \left(\cos\varepsilon_2' (\tau_2' + \tau_1') + \dfrac{m_2' \tau_2'}{\cos\varepsilon_2'} \right) \\ \sin(\alpha' - \alpha_1') \sin\varepsilon' \sin\varepsilon_1' = -\cos\varepsilon' \cos\varepsilon_1' (\tau' - \tau_1') \end{cases}$$

wo $v_2' = \frac{(\mu^2 - \pi^2)\delta_2' \varkappa_2' \sin^2 \alpha_2'}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta_2'^2} = \frac{\delta_2'}{\varkappa_2'}(\sin^2 \alpha_1' - \sin^2 \alpha_2')$

$= \frac{\delta_2'}{\varkappa_2'} \sin(\alpha_1' + \alpha_2') \sin(\alpha_1' - \alpha_2')$ ist.

Eben so reducirt sich (39) auf eine einfache Gleichung, wenn man das Produkt der Gleichungen (XII, 2, 3) von derselben subtrahirt, welches giebt:

$$P''^2 \tau_3'' = R''^2 \tau'' (\cos^2 \varepsilon'' - m'') - R_1''^2 \tau_1'' \cos^2 \varepsilon_1''$$
$$- R_2''^2 \tau_2'' (\cos^2 \varepsilon_2'' - m_2'') + R'' R_1'' \sin(\alpha'' - \alpha_1'') \sin \varepsilon'' \sin \varepsilon_1''$$
$$- R'' R_2'' \sin(\alpha'' - \alpha_2'') \sin \varepsilon'' \sin \varepsilon_2''$$
$$- R_1'' R_2'' \sin(\alpha_1'' + \alpha_2'') \sin \varepsilon_1'' \sin \varepsilon_2'',$$

und nachher mit (XII, 1) dividirt. Es kommt alsdann:

$$\text{XIV.} \quad P'' \tau_3'' = R''(\tau'' \cos \varepsilon'' - v'') - R_1'' \tau_1'' \cos \varepsilon_1''$$
$$- R_2'' (\tau_2'' \cos \varepsilon_2'' - v_2''),$$

wo $v'' = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\delta'' \varkappa'' \sin^2 \alpha''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2} = \frac{\delta''}{\varkappa''}(\sin^2 \alpha'' - \sin^2 \alpha_1'')$ und

$v_2'' = \frac{(\mu^2 - \pi^2)\delta_2'' \varkappa_2'' \sin^2 \alpha_2''}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta_2''^2} = \frac{\delta_2''}{\varkappa_2''}(\sin^2 \alpha_1'' - \sin^2 \alpha_2'')$ ist.

Da nun

$\frac{m_2' \tau_2'}{\cos \varepsilon_2'} = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\delta_2' \varkappa_2' \sin^2 \alpha_2'}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta_2'^2}$ und $\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta_2'^2 = \frac{\sin^2 \alpha_2'}{\sin^2 \alpha_3'}$,

also $\pi^2 - \mu^2 = \frac{\sin^2 \alpha_2' - \mu^2 \sin^2 \alpha_3'}{\varkappa_2'^2 \sin^2 \alpha_3'}$ ist, so ist $\frac{m_2' \tau_2'}{\cos \varepsilon_2'} = \frac{(\sin^2 \alpha_2' - \sin^2 \alpha_1')\delta_2'}{\varkappa_2'}$.

Ferner hat man $\varkappa' \cos \varepsilon' = B \sin a = \varkappa_1' \cos \varepsilon_1' = \varkappa_2' \sin \varepsilon_2'$, so daſs die ersten jener Gleichungen (a) übergehen in:

$$\varkappa' \sin \varepsilon' (\alpha' - \alpha_2') - \varkappa_2' \cos \varepsilon_2' (\tau' - \tau_2') = (\sin^2 \alpha_1' - \sin^2 \alpha_2')\delta_2'$$

und $\quad \varkappa_1' \sin \varepsilon_1' \sin(\alpha' + \alpha_2') + \varkappa_2' \cos \varepsilon_2' (\tau_2' + \tau_1') = (\sin^2 \alpha_1' - \sin^2 \alpha_2')\delta_2,$

deren Richtigkeit, so wie die der 3ten Gleichung (a) in die Augen fällt, sobald man für $\sin \varepsilon_1'$, $\cos \varepsilon_1'$, $\cos \varepsilon_2'$ etc. ihre Werthe setzt, und bedenkt, daſs $\tau' - \tau_2' = \sin(\alpha' - \alpha_2') \cos(\alpha' + \alpha_2')$ und $\tau_2' + \tau_1' = \sin(\alpha_2' + \alpha_1') \times \cos(\alpha_2' - \alpha_1')$ ist.

Allgemeine Ausdrücke für die Intensität der reflektirten und gebrochenen Strahlen.

Die Gleichungen (XI—XIV.) dienen zur Bestimmung von R_1', R_2', R_1'', R_2'', P', S', P'', S''. Man erhält nämlich durch Elimination, wegen $\alpha' = \alpha_1'$ und $\alpha'' = \alpha_1''$,

$$\text{XV.} \left\{ \begin{aligned} N'R_1' &= -R'\frac{\sin(\alpha_3'-\alpha')}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}\{[\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_2'\cos(\alpha_3'+\alpha') \\ &\quad + \sin\varepsilon'\cos\varepsilon_2'\cos(\alpha_3'-\alpha_2')]\sin(\alpha_3'+\alpha_2') \\ &\quad - \sin\varepsilon' v_2'\} \\ N'R_2' &= -R'\sin(\alpha_3'-\alpha')[\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_1'\cos(\alpha_3'+\alpha') \\ &\quad - \sin\varepsilon'\cos\varepsilon_1'\cos(\alpha_3'-\alpha_1')] \\ N''R_1'' &= -\frac{R''}{\sin(\alpha_3''+\alpha_1'')}\{[\cos\varepsilon''\sin\varepsilon_2''\cos(\alpha_3''+\alpha'') \\ &\quad - \sin\varepsilon''\cos\varepsilon_2''\cos(\alpha_3''-\alpha_2'')]\sin(\alpha_3''-\alpha'')\times \\ &\quad \sin(\alpha_3''+\alpha_2'')+\sin\varepsilon_2''\sin(\alpha_3''+\alpha_2'')v'' \\ &\quad + \sin\varepsilon''\sin(\alpha_3''-\alpha'')v_2''\} \\ N''R_2'' &= -R''\{[\cos\varepsilon''\sin\varepsilon_1''\cos(\alpha_3''+\alpha'') \\ &\quad + \sin\varepsilon''\cos\varepsilon_1''\cos(\alpha_3''-\alpha_1'')]\sin(\alpha_3''-\alpha'') \\ &\quad + \sin\varepsilon_1'' v''\}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$\begin{aligned} N' &= [\cos\varepsilon_1'\sin\varepsilon_2'\cos(\alpha_3'-\alpha_1') \\ &\quad + \sin\varepsilon_1'\cos\varepsilon_2'\cos(\alpha_3'-\alpha_2')]\sin(\alpha_3'+\alpha_2')-\sin\varepsilon_1' v_2' \\ N'' &= [\cos\varepsilon_1''\sin\varepsilon_2''\cos(\alpha_3''-\alpha_1'') \\ &\quad + \sin\varepsilon_1''\cos\varepsilon_2''\cos(\alpha_3''-\alpha_2'')]\sin(\alpha_3''+\alpha_2'')-\sin\varepsilon_1'' v_2''. \end{aligned}$$

Entwickelt man diese Ausdrücke nach Potenzen von $\pi^2-\mu^2$, so bekommt man als erste Näherung, wenn man nur das von dieser Gröfse unabhängige Glied beibehält:

$$\text{XVI.} \left\{ \begin{aligned} R_1' &= -R'\frac{\sin(\alpha_3'-\alpha')}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}\left(\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_1'\frac{\cos(\alpha_3'+\alpha')}{\cos(\alpha_3'-\alpha')} \right. \\ &\quad \left. + \sin\varepsilon'\sin\varepsilon_1'\right) \\ R_2' &= -R'\frac{\sin(\alpha_3'-\alpha')}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}\left(\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_1'\frac{\cos(\alpha_3'+\alpha')}{\cos(\alpha_3'-\alpha')} \right. \\ &\quad \left. - \sin\varepsilon'\cos\varepsilon_1'\right) \end{aligned} \right.$$

$$\text{XVI.}\left\{\begin{aligned} R_1'' &= -R''\frac{\sin(\alpha_3''-\alpha'')}{\sin(\alpha_3'+\alpha'')}\times \\ &\quad\left(\cos\varepsilon''\sin\varepsilon_2''\frac{\cos(\alpha_3''+\alpha'')}{\cos(\alpha_3''-\alpha'')}-\sin\varepsilon''\cos\varepsilon_2''\right) \\ R_2'' &= -R''\frac{\sin(\alpha_3''-\alpha'')}{\sin(\alpha_3''+\alpha'')}\times \\ &\quad\left(\cos\varepsilon''\cos\varepsilon_2''\frac{\cos(\alpha_3''+\alpha'')}{\cos(\alpha_3''-\alpha'')}+\sin\varepsilon''\sin\varepsilon_2''\right). \end{aligned}\right.$$

Um P' zu finden, eliminirt man R_1' aus (XIII. und XI, 1), wodurch man erhält:

$$P' = R'\cos\varepsilon'\frac{\tau_1'+\tau'}{\tau_1'+\tau_3'}+R_2'\frac{\cos\varepsilon_2'(\tau_1'-\tau_2')+v_2'}{\tau_1'+\tau_3'},$$

oder da $\cos\varepsilon_2'(\tau_1'-\tau_2')+v_2' = \frac{\varkappa'}{\varkappa_2'}\sin\varepsilon'\sin(\alpha_1'-\alpha_2')$ und $\alpha_1'=\alpha$, $\tau'=\tau_1'$ ist,

$$\text{XVII.}\quad P' = R'\cos\varepsilon'\frac{2\tau'}{\tau_1'+\tau_3'}+R_2'\cos\varepsilon'\frac{\varkappa'}{\varkappa_2'}\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2')}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}.$$

Durch Elimination von R_1' aus (XI, 2, 3) findet man

$$\text{XVIII.}\quad S' = -R'\sin\varepsilon'\frac{2\tau'}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}+R_2'\cos\varepsilon'\frac{\varkappa'}{\varkappa_2'}\times\frac{\sin(\alpha_1'-\alpha_2')}{\sin(\alpha_3'+\alpha')}.$$

P'' und S'' erhält man in der einfachsten Form, wenn man ein neues Wellensystem einführt, und zwar dasjenige, welches nach der Brechung in derselben Richtung aus dem Krystall treten würde, in welcher das in Rede stehende ungewöhnliche Wellensystem (R'') austritt, d. h. das zu diesem ungewöhnlichen gehörige gewöhnliche System. Es mögen demselben die Gröfsen α_0'', ε_0'', δ_0'' etc. entsprechen, so dafs $\varkappa_0''\sin\varepsilon_0'' = D\sin\alpha_0''-B\cos\alpha_0''\cos\alpha$, $\varkappa_0''\cos\varepsilon_0'' = B\sin\alpha$, $\sin^2\alpha_0'' = \mu^2\sin^2\alpha_0''$ wird. Die Ausdrücke für P'' und S'' sind alsdann, in sofern

$\varkappa''[(\tau_1''+\tau'')\cos\varepsilon''-v''] = \varkappa_0''\sin\varepsilon_0''\sin(\alpha_0''+\alpha'')$ und

$\varkappa_2''[(\tau_2''-\tau_1'')\cos\varepsilon_2''+v_2''] = \varkappa_0''\sin\varepsilon_0''\sin(\alpha_1''-\alpha_2'')$ ist,

$$\text{XIX.}\quad P'' = R''\frac{\varkappa_0''}{\varkappa''}\sin\varepsilon_0''\frac{\sin(\alpha_0''+\alpha'')}{\sin(\alpha_3''+\alpha_0'')\cos(\alpha_3''-\alpha_0'')}\times\left(1+\frac{R_2''\varkappa''}{R''\varkappa_2''}\frac{\sin(\alpha_1''-\alpha_2'')}{\sin(\alpha_0''+\alpha'')}\right).$$

$$\text{XX.}\quad S'' = R''\frac{\varkappa_0''}{\varkappa''}\cos\varepsilon_0''\frac{\sin(\alpha_0''+\alpha'')}{\sin(\alpha_3''+\alpha_0'')}\times$$
$$\left(1+\frac{R_2''\varkappa''}{R''\varkappa_2''}\frac{\sin(\alpha_1''-\alpha_2'')}{\sin(\alpha_0''+\alpha'')}\right).$$

Polarisations-Ebene und Intensität der gebrochenen Strahlen nach dem Austritt aus einem Krystall.

Wird die Neigung der Polarisations-Ebene des aus dem krystallinischen Mittel in das einfachbrechende tretenden Strahls gegen die Einfalls-Ebene, d. h. das Azimuth derselben, durch ε_3' oder ε_3'' bezeichnet, je nachdem derselbe von einem gewöhnlichen oder ungewöhnlichen Wellensystem erzeugt wurde, so hat man

$$tg\,\varepsilon_3' = \frac{P'}{S'} \quad \text{und} \quad tg\,\varepsilon_3'' = \frac{P''}{S''}.$$

Es wird demnach

$$\text{XXI.}\quad tg\,\varepsilon_3'' = \frac{tang\,\varepsilon_0''}{\cos(\alpha_3''-\alpha_0'')}.$$

Der gebrochene Strahl, wenn er von einem ungewöhnlichen herrührt, wird daher nach der Einfalls-Ebene polarisirt sein, wenn $\sin\varepsilon_0 = 0$ wird. Dies ist erfüllt, wenn $D\sin\alpha_0'' - B\cos\alpha_0''\cos a = 0$ ist, also für

$$\cos a = \frac{D}{B}tang\,\alpha_0'' = \frac{D}{B}\frac{\mu\sin\alpha_3''}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\alpha_3'}}.$$

Ist $D = 0$, also die brechende Fläche der Axe parallel, so tritt dieser Fall nur ein für $a = 90^0$, dagegen nie für $a = 0$.

Der gebrochene Strahl wird senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt sein, wenn $\cos\varepsilon_0 = 0$, d. h. $B\sin a = 0$ ist; mithin 1) für jede Lage der brechenden Fläche und bei jeder Richtung des einfallenden Strahls für $a = 0$, 2) für $B = 0$, d. h. wenn die Axe auf der brechenden Fläche senkrecht steht.

Für den Fall, dafs das einfallende Licht gewöhnliches ist, hat man

XXII. $tg\,\varepsilon_3' = -\frac{cotg\,\varepsilon'}{cos(\alpha_3'-\alpha')} \times$

$$\left(1+\frac{R_2'}{R'}\frac{\varkappa'}{\varkappa_2'}\frac{sin(\alpha_1'-\alpha_2')}{cos\,\varepsilon'\,sin\,\varepsilon'\,sin(\alpha_1'+\alpha_2')}\right),$$

er gebrochene Strahl ist daher senkrecht gegen die Ein-
ılls-Ebene polarisirt, wenn $sin\,\varepsilon' = 0$ ist.

Die Intensität des austretenden Lichtes, welche in dem
inen Fall $P'^2+S'^2$, in dem andern Fall $P''^2+S''^2$ ist,
ifst sich nach dem Vorigen leicht bestimmen, sobald nur
R' und R'' bekannt sind. Da diese den im Krystall be-
ndlichen Strahlen zugehören, so werden sie, wenn jene
itensitäten mit der Lichtmenge des in den Krystall ein-
ringenden Lichtes verglichen werden sollen, erst aus (III.
nd IV.) bestimmt werden müssen.

Betrachten wir beispielsweise folgende specielle Fälle:

1) Der Krystall sei ein Prisma, dessen Kante auf der
ptischen Axe und der Einfalls-Ebene senkrecht steht.

Die letzte Ebene fällt alsdann mit dem Hauptschnitt
ısammen; es ist daher $sin\,a = 0$, und wenn man die sich
ıf den Eintritt in den Krystall beziehenden Gröfsen ε und
durch $\varepsilon_{\prime\prime}$ und $\alpha_{\prime\prime}$ ersetzt, so wird $cos\,\varepsilon_{\prime\prime}' = cos\,\varepsilon' = cos\,\varepsilon_{\prime}'$
$= cos\,\varepsilon_{\prime}'' = sin\,\varepsilon_{\prime\prime}'' = sin\,\varepsilon'' = sin\,\varepsilon_2' = sin\,\varepsilon_2'' = 0$, also,
'enn man $\delta''(sin^2\alpha_{\prime\prime}'-sin^2\alpha_{\prime\prime}'') = \varkappa''v_0$ setzt,

$$R' = -\frac{sin\,2\alpha_{\prime\prime}}{sin(\alpha_{\prime\prime}+\alpha_{\prime\prime}')}S,$$

$$R'' = \frac{sin\,2\alpha_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime}+\tau_{\prime\prime}'+v_0}P, \qquad P' = 0,$$

$$S' = -\frac{R'\,sin\,2\alpha'}{sin(\alpha_3'+\alpha')}, \quad P'' = R''\frac{\varkappa_0''}{\varkappa''}\frac{sin(\alpha_0''+\alpha'')}{\tau_3''+\tau''}\times$$

$$\left[1-\frac{\tau_3''-\tau''+v''}{\tau_3''+\tau_2''-v_2''}\frac{\varkappa''}{\varkappa_2''}\frac{sin(\alpha_1''-\alpha_2'')}{sin(\alpha_0''+\alpha'')}\right], \qquad S'' = 0.$$

Es wird demnach das Intensitätsverhältnifs der beiden
as Prisma verlassenden Strahlen:

$$P'^2+S'^2):(P''^2+S''^2) = \frac{\varkappa''^2}{\varkappa_0''^2}\left(\frac{2\tau'(\tau_3''+\tau'')}{sin(\alpha_0''+\alpha'')sin(\alpha_3'+\alpha')}\right)^2\times$$

$$\left(\frac{\tau_{\prime\prime}+\tau_{\prime\prime}'+v_0}{sin(\alpha_{\prime\prime}+\alpha_{\prime\prime}')}\right)^2 S^2 : \left(1-\frac{\tau_3''-\tau'+v''}{\tau_3''+\tau_2''-v_2''}\frac{\varkappa''}{\varkappa_2''}\frac{sin(\alpha_1''-\alpha_2'')}{sin(\alpha_0''+\alpha'')}\right)^2 P^2.$$

2) Die Kante des Prisma's sei der Axe parallel, und die Einfalls-Ebene senkrecht auf derselben. Alsdann ist $D = 0$, $\cos a = 0$, $\alpha_2'' = \alpha''$ und sämmtliche $\delta = 0$, also

$$R' = \frac{2\tau_{\prime\prime}}{\tau_{\prime\prime} + \tau_{\prime\prime}'} P, \quad R'' = \frac{2\tau_{\prime\prime}}{\sin(\alpha_{\prime\prime} + \alpha_{\prime\prime}'')} S, \quad P' = R' \frac{2\tau' S}{\tau_3' + \tau''}$$

$$S' = 0, \quad P'' = 0, \quad S'' = R'' \frac{\sin(\alpha_0'' + \alpha'')}{\sin(\alpha_3'' + \alpha_0'')} \times \left(1 - \frac{\sin(\alpha_3'' - \alpha'')\sin(\alpha_1'' - \alpha_2'')}{\sin(\alpha_3'' + \alpha'')\sin(\alpha_0'' + \alpha'')}\right)$$

und sonach das Verhältnifs der Intensitäten der austretenden Strahlen:

$$P'^2 + S'^2 : P''^2 + S''^2 = \left(\frac{2\tau' \sin(\alpha_3'' + \alpha_0'')\sin(\alpha_{\prime\prime} + \alpha_{\prime\prime}'')}{\sin(\alpha_0'' + \alpha'')(\tau_{\prime\prime} + \tau_{\prime\prime}')(\tau_3' + \tau')}\right)^2 P^2 : \left(1 - \frac{\sin(\alpha_3'' - \alpha'')\sin(\alpha_1'' - \alpha_2'')}{\sin(\alpha_3'' + \alpha'')\sin(\alpha_0'' + \alpha'')}\right)^2 S^2.$$

3) Ist im Krystall die Eintrittsfläche der Austrittsfläche parallel, so ist $\varepsilon_{\prime\prime}' = \varepsilon'$, $\varepsilon_{\prime\prime}'' = \varepsilon''$, $\varepsilon_{\prime}' = \varepsilon_{\prime}''$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_1''$, $\varepsilon_0'' = \varepsilon_{\prime\prime}'$, $\alpha_3' = \alpha_3'' = \alpha_{\prime\prime}$, $\alpha' = \alpha_0'' = \alpha_{\prime\prime}'$, $\alpha'' = \alpha_{\prime\prime}''$, $\alpha_{\prime}' = \alpha_{\prime}'' = \alpha_{\prime\prime}'$, $\alpha_2' = \alpha_2''$, $\delta' = \delta_0''$, $\delta_{\prime}' = \delta_{\prime}''$, $\delta_2' = \delta_2''$. Ist hierbei das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt, also $\sin \varepsilon_{\prime\prime}'' = \cos \varepsilon_{\prime\prime}' = 0$, so ist der austretende ungewöhnliche Strahl senkrecht darauf polarisirt, da alsdann $S'' = 0$ wird. Ist der einfallende Strahl senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt, also $\cos \varepsilon_0'' = \sin \varepsilon_{\prime\prime}' = 0$, so ist der austretende ungewöhnliche Strahl dieser Ebene parallel polarisirt, da alsdann $P'' = 0$ wird.

C. *Gesetze für die zweiaxigen Krystalle.*

Richtung der gebrochenen Strahlen.

Wenn das aus einem einfachbrechenden Medium in ıen zweiaxigen Krystall dringende Licht sich in ebenen ʼellen verbreitet, so liegen die Normalen der gebroche- n Wellensysteme wiederum in der Einfalls-Ebene, und re Richtungen sind gegeben durch die Gleichungen

$$1)\quad \sin^2\alpha' = o^2 \sin^2\alpha$$

$$2)\quad \sin^2\alpha'' = e^2 \sin^2\alpha,$$

ährend nach Abschn. I. (XIII.)

$$o^2 = \frac{\pi^2+\mu^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}(u-u')$$

$$e^2 = \frac{\pi^2+\mu^2}{2} - \frac{\pi^2-\mu^2}{2}(w+w')$$

:, α, α', α'', o, e, u, u', w, w' in der diesen Buchstaben ;eite 207) beigelegten Bedeutung genommen.

Ist nun das einfallende Lichtwellensystem sphärisch, findet man die Lage der gebrochenen Strahlen (näm- :h die Brechungswinkel und die Ebenen, in denen sie :gen) auf folgende Weise.

Man beziehe die Richtung der Strahlen auf ein durch :n Einfallspunkt gehendes rechtwinkliges Coordinatensy- em, dessen Axen den Elasticitätsaxen des Krystalls par- lel laufen. Sind x_0, y_0, z_0 die Coordinaten desjenigen unktes des gewöhnlichen Strahls, in welchen das Licht om Einfallspunkt aus nach der Einheit der Zeit anlangt, nd ist r_0 dessen Länge, so hat man für die Cosinus der Vinkel, welche der Strahl mit den Axen bildet,

$$\frac{x_0}{r_0},\quad \frac{y_0}{r_0},\quad \frac{z_0}{r_0},$$

ährend nach Abschn. I. (XVI, *a.* und 60)

$$r_0^2 = o^2 + \frac{1}{o^2 O^2},\qquad x_0 = \beta'\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\mu^2)}\right),$$

$$= \gamma'\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\nu^2)}\right),\qquad z_0 = \delta'\left(o + \frac{1}{oO^2(o^2-\pi^2)}\right)$$

ist, wenn β', γ', δ' die Cosinus der Winkel zwischen der Normale und den Axen bedeuten, und O^2 den Werth $\left(\frac{\beta'}{o^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma'}{o^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{\delta'}{o^2-\pi^2}\right)^2$ hat.

Ist q' der Winkel zwischen dem gewöhnlichen Strahl und seiner Normale, so ist

$$\cos q' = \frac{\beta' x_0 + \gamma' y_0 + \delta' z_0}{r_0},$$

also — wenn man für x_0, y_0, z_0 ihre Werthe setzt, da nach Abschn. I. (X.) $\frac{\beta'^2}{o^2-\mu^2}+\frac{\gamma'^2}{o^2-\nu^2}+\frac{\delta'^2}{o^2-\pi^2}=0$ ist —

$$3)\quad \cos q' = \frac{o}{\sqrt{\left(o^2+\frac{o}{O^2 o^2}\right)}},$$

und daher

$$4)\quad \sin q' = \frac{1}{Oo\sqrt{o^2+\frac{1}{O^2 o^2}}},\qquad \operatorname{tang} q' = \frac{1}{Oo^2}.$$

Nennt man den Brechungswinkel des gewöhnlichen Strahls a', und bezeichnen B, C, D die Cosinus der Winkel zwischen dem Einfallsloth und den Axen, so hat man

$$\cos a' = \frac{Bx_0 + Cy_0 + Dz_0}{r_0},$$

oder, wenn man für x_0, y_0, z_0 ihre Werthe setzt, in sofern $B\beta' + C\gamma' + D\delta' = \cos \alpha'$ ist,

$$5)\quad \cos a' = \frac{o\cos\alpha' + \frac{1}{O^2 o}\left(\frac{B\beta'}{o^2-\mu^2}+\frac{C\gamma'}{o^2-\nu^2}+\frac{D\delta'}{o^2-\pi^2}\right)}{\sqrt{\left(o^2+\frac{1}{O^2 o^2}\right)}}.$$

Den Winkel (ψ'), welchen die durch den Strahl und seine Normale gehende Ebene mit der Einfalls-Ebene bildet, findet man aus dem körperlichen Dreieck (Fig. 32.), welches von dem Einfallsloth OL, dem gewöhnlichen Strahl OZ und seiner Normale ON gebildet wird, in welchem daher $LN = \alpha'$, $LZ = a'$, $NZ = q'$, und OLN die Einfalls-Ebene ist. Der Winkel LNZ sei gleich $180^\circ - \psi'$, so daſs also die Neigung ψ' von dem, jenseits der Nor-

male *ON* liegenden und vom Einfallsloth abgewendeten, Theil der Einfalls-Ebene an gerechnet wird. Man hat sodann

$$-\cos\psi' = \frac{\cos a' - \cos\alpha' \cos q'}{\sin\alpha' \sin q'},$$

oder wenn man für $\sin q'$, $\cos q'$, $\cos\alpha'$ ihre Werthe setzt

$$6)\quad \cos\psi' = -\frac{1}{O\cdot\sin\alpha'}\left[\frac{B\beta'}{o^2-\mu^2}+\frac{C\gamma'}{o^2-\nu^2}+\frac{D\delta'}{o^2-\pi^2}\right]*).$$

Ganz eben so erhält man für den Winkel (q''), welchen der ungewöhnliche Strahl mit seiner Normale macht:

$$7)\quad \tang q'' = \frac{1}{Ee^2},$$

---

*) Um zu untersuchen, welcher der Wurzelwerthe von

$$\frac{1}{O^2} = \left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\right)^2 \sin^2(u-u')\sin^2\varphi'$$

(siehe Abschn. I, (68)) für O hier zu nehmen ist, setze man $B = D = 0$. Hierdurch geht die Gleichung (6) über in:

$$\cos\psi' \sin\alpha' = -\frac{1}{O}\,\frac{\gamma'}{o^2-\nu^2}.$$

Da nun die Normale der gewöhnlich gebrochenen Well-Ebene mit den optischen Axen ein körperliches Dreieck bildet, dessen Seiten u, u' und $2n$ sind, so muſs $u-u'<2n$, also $\sin^2\frac{u-u'}{2}<\sin^2 n$, oder $\left(\text{da } \sin^2 n = \frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2} \text{ ist}\right)$ $\sin^2\frac{u-u'}{2}<\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}$ sein. Ferner ist nach Abschn. I. (XIII.)

$$o^2 = \tfrac{1}{2}(\pi^2+\mu^2)-\tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\cos(u-u') = \mu^2-(\mu^2-\pi^2)\sin^2\tfrac{1}{2}(u-u'),$$

folglich

$$\sin^2\frac{u-u'}{2} = \frac{o^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2},$$

mithin muſs

$$\frac{o^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}<\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2},$$

und somit, da $\pi^2-\mu^2$ positiv ist (wenn wir der Einfachheit der Behandlung wegen einen negativen Krystall zum Grunde legen), $o^2<\nu^2$, d. h. $o^2-\nu^2$ negativ sein. Auf der andern Seite ist $\cos\psi'$ für $B = D = 0$ positiv (da für $\delta' = 0$, $a'>\alpha'$, also ψ' ein spitzer Winkel wird), und demnach muſs auch $-\frac{1}{O}\cdot\frac{\gamma'}{o^2-\nu^2}$, folglich auch O positiv sein, vorausgesetzt, daſs man von den Winkeln u und u' den kleineren mit u' bezeichnet. Für positive Krystalle hat man nur nöthig, π und μ mit einander zu vertauschen.

für den Brechungswinkel (α'') dieses Strahls:

$$8) \quad \cos\alpha'' = \frac{e\cos\alpha'' + \frac{1}{E^2 e}\left(\frac{B\beta''}{e^2-\mu^2} + \frac{C\gamma''}{e^2-\nu^2} + \frac{D\delta''}{e^2-\pi^2}\right)}{\sqrt{\left(e^2 + \frac{1}{e^2 E^2}\right)}},$$

und für den Winkel (ψ''), welchen die Einfalls-Ebene mit der durch diesen Strahl und seine Normale gehende Ebene bildet:

$$9) \quad \cos\psi'' = -\frac{1}{E\cdot\sin\alpha''}\left[\frac{B\beta''}{e^2-\mu^2} + \frac{C\gamma''}{e^2-\nu^2} + \frac{D\delta''}{e^2-\pi^2}\right] \text{*)},$$

wo β'', γ'', δ'', E dieselbe Bedeutung in Bezug auf den ungewöhnlichen Strahl haben, welche β', γ', δ', O in Bezug auf den gewöhnlichen hatten. Durch die Gröfsen α' und ψ', α'' und ψ'' ist die Lage der Strahlen völlig bestimmt.

---

*) Um zu bestimmen, welches Vorzeichen für E aus

$$\frac{1}{E} = \pm\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin(w+w')\cos\varphi''$$

(siehe Abschn. I, 69) zu nehmen ist, setze man $C = D = 0$, wodurch sich (9) verwandelt in:

$$\cos\psi''\sin\alpha'' = -\frac{1}{E}\,\frac{\beta''}{e^2-\mu^2}.$$

Da $e^2-\mu^2$ stets positiv sein mufs, und $\cos\psi''$ negativ ist (indem für $\gamma''=0$ $\alpha''<\alpha''$ wird), δ'' mag positiv oder negativ sein, d. h. der Winkel zwischen der Normale und der Axe π mag spitz oder stumpf sein, so mufs $\frac{1}{E}$ positiv sein. In sofern aber $\sin(w+w')$ mit der Lage der Normale sein Zeichen ändert (nämlich positiv ist, wenn $w+w'<180°$, d. h. $\delta''<90°$ wird, und negativ, wenn $w+w'>180°$, d. h. $\delta''>90°$ wird), mufs man dem Ausdruck für $\frac{1}{E}$ das (+) oder (−) Zeichen geben, je nachdem δ'' kleiner oder gröfser als 90° ist, damit $\frac{1}{E}$ selbst positiv bleibe. In der Folge ist blofs das (+) Zeichen der Einfachheit wegen mit Vorbehalt angewendet.

Bestimmung der Schwingungsrichtung in den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Wellensystemen aus der Lage der brechenden Ebene gegen die optischen Axen.

Man bezeichne den Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der Einfalls-Ebene bildet, durch ε' oder ε'', je nachdem sie sich auf ein gewöhnliches oder ein ungewöhnliches Wellensystem bezieht, und zwar mögen sie in demselben Sinne gezählt werden, wie die Winkel ψ' und ψ'', so dafs $\varepsilon' = \psi' + 90^0$ und $\varepsilon'' = \psi'' + 90^0$ ist. Der Winkel, welchen diejenigen Ebenen mit einander bilden, die durch die Normale der gebrochenen ebenen Welle und die optischen Axen gehen, sei durch $2\varphi'$, oder $2\varphi''$ bezeichnet, je nachdem die Brechung eine gewöhnliche oder ungewöhnliche ist. Die Winkel, welche das Einfallsloth mit den optischen Axen bildet, seien U und U'; der Winkel, welchen die beiden durch die optischen Axen und das Einfallsloth gelegten Ebenen mit einander bilden, sei $2\Phi'$, und das Azimuth der Einfalls-Ebene von der den Winkel $2\Phi'$ halbirenden Ebene an gerechnet, sei E': dergestalt, dafs $\Phi' = \varphi' = \varphi''$ und $U = u = w$, $U' = u' = w'$ und $E' = \varepsilon' = \varepsilon''$ wird, wenn die Normalen der Well-Ebenen mit dem Einfallsloth zusammenfallen.

Da die Polarisations-Ebenen der gebrochenen Wellensysteme bekannt sind, sobald man die Lage ihrer Normalen gegen die optischen Axen (also u, u', w, w', φ', φ'') und die Winkel ε', ε'' kennt, so kommt es blofs darauf an, diese Gröfsen in U, E' und Φ' auszudrücken. Es seien (Fig. 44.) CA und CA' die optischen Axen; ferner sei CL das Einfallsloth, CN die Normale der gewöhnlich gebrochenen Well-Ebene; CLD, CNE mögen diejenigen Ebenen sein, welche die Winkel ALA' und ANA' beziehlich halbiren; endlich liege CK in der Ebene LCN senkrecht auf CN. Alsdann ist $NA = u$, $NA' = u'$, $ANA' = 2\varphi'$, $LN = \alpha'$, und da $\angle ENK$ die Neigung der Schwingungsrichtung gegen die Einfalls-Ebene $CLNK$, also gleich

ε' ist, so ist $\angle ANK = \varepsilon' + \varphi'$, $\angle LNA = 180^\circ - (\varepsilon' + \varphi')$ und $\angle LNA' = 180^\circ - (\varepsilon' - \varphi')$. Ferner ist $AL = U$, $A'L = U'$, $\angle ALA' = 2\Phi'$ und $\angle DLN = E'$, welcher letztere Winkel von der Ebene CLD an gerechnet werden möge.

Aus den Dreiecken LAN und $LA'N$ ergeben sich alsdann folgende Gleichungen:

$$10)\ \begin{cases} \cos u = \cos\alpha' \cos U + \sin\alpha' \sin U \cos(E' + \Phi') \\ \cos u' = \cos\alpha' \cos U' + \sin\alpha' \sin U' \cos(E' - \Phi'), \end{cases}$$

und

$$11)\ \begin{cases} \sin u \sin(\varepsilon' + \varphi') = \sin U \sin(E' + \Phi') \\ \sin u' \sin(\varepsilon' - \varphi') = \sin U' \sin(E' - \Phi'); \end{cases}$$

aus den Dreiecken ANK und $A'NK$:

$$\cos AK = \sin u \cos(\varepsilon' + \varphi'),\quad \cos A'K = \sin u' \cos(\varepsilon' - \varphi');$$

aus den Dreiecken ALK und $A'LK$:

$$\cos AK = -\sin\alpha' \cos U + \cos\alpha' \sin U \cos(E' + \Phi')$$
$$\cos A'K = -\sin\alpha' \cos U' + \cos\alpha' \sin U' \cos(E' - \Phi'),$$

folglich:

$$12)\ \begin{cases} -\sin u \cos(\varepsilon' + \varphi') = \sin\alpha' \cos U \\ \qquad\qquad - \cos\alpha' \sin U \cos(E' + \Phi') \\ -\sin u' \cos(\varepsilon' - \varphi') = \sin\alpha' \cos U' \\ \qquad\qquad - \cos\alpha' \sin U' \cos(E' - \Phi'). \end{cases}$$

Ferner hat man, wenn man statt des Winkels Φ' den von den optischen Axen gebildeten Winkel n einführen will,

$$\cos 2n = \cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos 2\Phi',$$

woraus sich findet:

$$13)\ \begin{cases} 2 \sin U \sin U' \cos^2 \Phi' = \cos 2n - \cos(U + U'), \text{ oder} \\ 2 \sin U \sin U' \sin^2 \Phi' = -\cos 2n + \cos(U - U'). \end{cases}$$

Eben so findet man für das ungewöhnliche Wellensystem:

$$14)\ \begin{cases} \cos w = \cos U \cos\alpha'' + \sin U \sin\alpha'' \cos(E' + \Phi') \\ \cos w' = \cos U' \cos\alpha'' + \sin U' \sin\alpha'' \cos(E' - \Phi') \\ -\sin w \sin(\varepsilon'' - \varphi'') = \sin U \sin(E' + \Phi') \\ -\sin w' \sin(\varepsilon'' + \varphi'') = \sin U' \sin(E' - \Phi') \\ \sin w \sin(\varepsilon'' - \varphi'') = \cos U \sin\alpha'' \\ \qquad\qquad - \sin U \cos\alpha'' \cos(E' + \Phi') \\ \sin w' \sin(\varepsilon'' + \varphi'') = \cos U' \sin\alpha'' \\ \qquad\qquad - \sin U' \cos\alpha'' \cos(E' - \Phi'). \end{cases}$$

Anmerkung. Sind die Systeme durch Reflexion im ... ern des Krystalls entstanden, so hat man nur $-\alpha'$ und α'' statt α' und α'' zu setzen. Vertauscht man der Un... scheidung wegen u, u', φ', ε', w, w', φ'', ε'' beziehlich ... t u_1, u_1', φ_1', ε_1', w_2, w_2', φ_2'', ε_2'', so werden die be... ffenden Gleichungen:

$$15)\left\{\begin{aligned}
&\cos u_1 = \cos U \cos\alpha_1' - \sin U \sin\alpha_1' \cos(E' + \Phi')\\
&\cos u_1' = \cos U' \cos\alpha_1' - \sin U' \sin\alpha_1' \cos(E' - \Phi')\\
&\sin u_1 \sin(\varepsilon_1' + \varphi_1') = \sin U \sin(E' + \Phi')\\
&\sin u_1' \sin(\varepsilon_1' - \varphi_1') = \sin U' \sin(E' - \Phi')\\
&\sin u_1 \cos(\varepsilon_1' + \varphi_1') = \cos U \sin\alpha_1'\\
&\qquad\qquad + \sin U \cos\alpha_1' \cos(E' + \Phi')\\
&\sin u_1' \cos(\varepsilon_1' - \varphi_1') = \cos U' \sin\alpha_1'\\
&\qquad\qquad + \sin U' \cos\alpha_1' \cos(E' - \Phi')
\end{aligned}\right.$$

d

$$16)\left\{\begin{aligned}
&\cos w_1 = \cos U \cos\alpha_2'' - \sin U \sin\alpha_2'' \cos(E' + \Phi')\\
&\cos w_1' = \cos U' \cos\alpha_2'' - \sin U' \sin\alpha_2'' \cos(E' - \Phi')\\
&-\sin w_1 \sin(\varepsilon_2'' - \varphi_2'') = \sin U \sin(E' + \Phi')\\
&-\sin w_1' \sin(\varepsilon_2'' + \varphi_2'') = \sin U' \sin(E' - \Phi')\\
&-\sin w_1 \sin(\varepsilon_2'' - \varphi_2'') = \cos U \sin\alpha_2''\\
&\qquad\qquad + \sin U \cos\alpha_2'' \cos(E' + \Phi')\\
&-\sin w_1' \sin(\varepsilon_2'' + \varphi_2'') = \cos U' \sin\alpha_2''\\
&\qquad\qquad + \sin U' \cos\alpha_2'' \cos(E' - \Phi').
\end{aligned}\right.$$

Abhängigkeit der Vibrations-Intensitäten von einander.

1) Gleichungen, welche sich aus dem Princip der ... leichheit der Bewegung an der Grenze beider Mittel er... ben.

Gebraucht man wiederum S, P, R_s, R_p, R', R'' in ... r (Seite 232) eingeführten Bedeutung, und nennt ε' und ... die Winkel, welche die Einfalls-Ebene beziehlich mit ... r Schwingungsrichtung im gewöhnlichen und ungewöhn... chen Wellensystem bildet, so erhält man

a) für die nach dem Loth auf der Einfalls-Ebene zer... gten Theile der Intensität der Bewegung:

$$\text{I, } a. \quad P + R_p = R' \sin\varepsilon' + R'' \sin\varepsilon'';$$

b) für die nach dem Einfallsloth gerichteten Componenten:

I, *b*. $(S+R_s)\sin\alpha = -R'\cos\varepsilon'\sin\alpha' + R''\cos\varepsilon''\sin\alpha''$;

c) für die nach der Durchschnittslinie der Einfalls-Ebene und der Krystallfläche gerichteten Componenten:

I, *c*. $(S-R_s)\cos\alpha = -R'\cos\varepsilon'\cos\alpha' + R''\cos\varepsilon''\sin\alpha''$.

2) Gleichung, die aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte folgt.

Behält man die Bezeichnungen (Seite 250) bei, indem man nur W' oder W'' für W setzt, je nachdem es sich um das gewöhnliche oder das ungewöhnliche Wellensystem handelt, so findet man, wie dort,

$$W' = \cos\alpha' - \sin\alpha'\cos\psi'\,\mathrm{tang}\,q',$$
$$W'' = \cos\alpha'' - \sin\alpha''\cos\psi''\,\mathrm{tang}\,q'',$$

oder da $\psi' = \varepsilon' - 90^0$ und $\psi'' = \varepsilon'' - 90^0$ ist, wenn ε' und ε'' nach derselben Richtung, wie ψ', ψ'' gezählt werden, in sofern die Schwingungsrichtung auf dem Strahl senkrecht steht,

$$W' = \cos\alpha' - \sin\alpha'\sin\varepsilon'\,\mathrm{tang}\,q',$$
$$W'' = \cos\alpha'' - \sin\alpha''\sin\varepsilon''\,\mathrm{tang}\,q'',$$

und die correspondirenden Massen sind: für die einfallende und reflektirte Welle $M = l\cos\alpha$, für die gewöhnlich gebrochene

$$M' = l'W' = \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha}W' = \frac{l}{\sin\alpha}[\tau' - \sin^2\alpha'\sin\varepsilon'\,tg\,q'],$$

und für die ungewöhnlich gebrochene

$$M'' = l''W'' = \frac{l\sin\alpha''}{\sin\alpha}W'' = \frac{l}{\sin\alpha}[\tau'' - \sin^2\alpha''\sin\varepsilon''\,tg\,q''].$$

Die resultirende Gleichung ist daher

$$17)\ (P^2 + S^2 - R_p - R_s)\tau = R'^2[\tau' - \sin\varepsilon'\sin^2\alpha'\,tg\,q'] + R''^2[\tau'' - \sin\varepsilon''\sin^2\alpha''\,tg\,q''].$$

Diese Gleichung läfst sich mit Hilfe der Relationen (I.) durch eine Gleichung des ersten Grades ersetzen. Subtrahirt man nämlich von derselben das Produkt der Gleichungen (I, *b*. und I, *c*.), d. h. $(S^2 - R_s^2)\tau =$
$R'^2\tau'\cos^2\varepsilon' + R''^2\tau''\cos^2\varepsilon'' - R'R''\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''\sin(\alpha' + \alpha'')$

so erhält man:

$$(P^2 - R_p^2)\tau = R'^2(\tau' \sin^2 \varepsilon' - \sin \varepsilon' \sin^2 \alpha' \tang q')$$
$$+ R''^2(\tau'' \sin^2 \varepsilon'' - \sin \varepsilon'' \sin^2 \alpha'' tg\, q'')$$
$$+ R'R'' \cos \varepsilon' \cos \varepsilon'' \sin(\alpha' + \alpha'').$$

Diese Gleichung durch (I, a) dividirt, giebt alsdann:

$$\text{II.} \quad (P - R_p)\tau = R'(\tau' \sin \varepsilon' - \sin^2 \alpha' tg\, q')$$
$$+ R''(\tau'' \sin \varepsilon'' - \sin^2 \alpha'' \tang q'')\ ^*).$$

---

*) Um sich von der Richtigkeit der Division zu überzeugen, multiplicire man (II.) mit der Gleichung (I, a). Man findet alsdann die Uebereinstimmung vollständig, sobald

$$\mathfrak{D}) \quad \sin(\alpha' + \alpha'')[\sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \cos(\alpha' - \alpha'') - \cos \varepsilon' \cos \varepsilon'']$$
$$= \sin^2 \alpha' tg\, q' \sin \varepsilon'' + \sin^2 \alpha'' tg\, q'' \cos \varepsilon'$$

erfüllt ist. Substituirt man hierin die Werthe für $\tang q'$ und $\tang q''$, nämlich $\frac{1}{Oo^2}$ und $\frac{1}{Ee^2}$, und beachtet, daſs

$$\left(\text{wegen } \frac{\sin^2 \alpha'}{o^2} = \frac{\sin^2 \alpha''}{e^2} = \sin^2 \alpha\right)$$

$$18) \quad \sin(\alpha' + \alpha'')\sin(\alpha' - \alpha'') = \sin^2 \alpha (o^2 - e^2)$$
$$= -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(w + w')] \sin^2 \alpha$$

ist, so erhält man

$$\sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \cos(\alpha' - \alpha'') - \cos \varepsilon' \cos \varepsilon''$$
$$= -\frac{\frac{\sin \varepsilon'}{E} + \frac{\sin \varepsilon''}{O}}{\frac{1}{2}(\pi^2 - \mu^2)[\cos(u - u') - \cos(w + w')]} \sin(\alpha' - \alpha''),$$

oder, da

$$\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u - u') \sin \varphi', \quad \frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(w + w') \cos \varphi'' \quad \text{ist,}$$

$$(A) \quad \cos \varepsilon' \cos \varepsilon'' - \sin \varepsilon' \sin \varepsilon'' \cos(\alpha' - \alpha'')$$
$$= \frac{\sin \varepsilon'' \sin \varphi' \sin(u - u') + \sin \varepsilon' \cos \varphi'' \sin(w + w')}{\cos(u - u') - \cos(w + w')} \sin(\alpha' - \alpha''),$$

wo φ' und φ'' die Hälften der Neigungswinkel sind, welche von den durch die optischen Axen und die respective Normale gehenden Ebenen gebildet werden. Die Richtigkeit dieser Gleichung läſst sich folgendermaſsen beweisen.

Man construire die körperlichen Dreiecke $BAA'O$ und $BAA'E$ (Fig. 45.) aus den optischen Axen BA und BA', der Normale der gewöhnlich gebrochenen Well-Ebene BO, und der Normale der ungewöhnlich gebrochenen BE; und ziehe das Einfallsloth BL. Alsdann ist $BLEO$ die Einfalls-Ebene, $EO = \alpha' - \alpha''$, $AA' = 2n$, $AO = u$, $A'O = u'$, $AE = w$, $A'E = w'$; $AOA' = 2\varphi'$, $AEA' = 2\varphi''$. Halbirt man den Winkel AOA'

durch die Ebene BOo, so ist Oo die Schwingungsrichtung im gewöhnlichen System, also $oOH = \varepsilon'$, $EOA' = 180^\circ - (\varepsilon' - \varphi')$, $EOA = 180^\circ - (\varepsilon' + \varphi')$. Halbirt man ferner den Winkel AEA' durch die Ebene BEe, so ist die auf diese Ebene Senkrechte die Schwingungsrichtung des ungewöhnlichen Systems, also $LEe = \varepsilon'' - 90^\circ$, $A'EO = 270 - (\varepsilon'' + \varphi'')$, $AEO = 270 - (\varepsilon'' - \varphi'')$. Theilt man nun das Dreieck EOA durch eine auf BOA senkrechte Ebene, welche durch OB geht, in zwei Dreiecke, so liefern dieselben, wenn man die Winkel EAO und $EA'O$ mit σ und σ' bezeichnet, die Gleichungen:

$$(a) \quad \sin\sigma \cos u = -\sin(\varepsilon'' - \varphi'')\sin(\varepsilon' + \varphi') + \cos(\varepsilon'' - \varphi'')\cos(\varepsilon' + \varphi')\cos(\alpha' - \alpha'').$$

Legt man ferner eine auf BEA senkrechte Ebene durch BE, so geben die resultirenden Dreiecke:

$$(b) \quad -\sin\sigma \cos w = -\cos(\varepsilon'' - \varphi'')\cos(\varepsilon' + \varphi') + \sin(\varepsilon'' - \varphi'')\sin(\varepsilon' + \varphi')\cos(\alpha' - \alpha'').$$

Behandelt man eben so das Dreieck $EA'O$, so kommt man auf:

$$(c) \quad \sin\sigma' \cos u' = -\sin(\varepsilon'' + \varphi'')\sin(\varepsilon' - \varphi') + \cos(\varepsilon'' + \varphi'')\cos(\varepsilon' - \varphi')\cos(\alpha' - \alpha'')$$

$$(d) \quad -\sin\sigma' \cos w' = -\cos(\varepsilon'' + \varphi'')\cos(\varepsilon' - \varphi') + \sin(\varepsilon'' + \varphi'')\sin(\varepsilon' - \varphi')\cos(\alpha' - \alpha'').$$

Multiplicirt man (a) und (c) mit $\sin\varepsilon''$, und (b) und (d) mit $\sin\varepsilon'$, so erhält man, in sofern man

$$\cos\varphi'' = \cos(\varepsilon'' + \varphi'')\cos\varepsilon'' + \sin(\varepsilon'' + \varphi'')\sin\varepsilon''$$
$$= \cos(\varepsilon'' - \varphi'')\cos\varepsilon'' + \sin(\varepsilon'' - \varphi'')\sin\varepsilon'',$$
$$\sin\varphi' = -\sin(\varepsilon' - \varphi')\cos\varepsilon' + \cos(\varepsilon' - \varphi')\sin\varepsilon'$$
$$= -\cos(\varepsilon' + \varphi')\sin\varepsilon' + \sin(\varepsilon' + \varphi')\cos\varepsilon'$$

setzen darf,

$$(e) \left\{ \begin{aligned} -\sin\sigma\cos u \sin\varepsilon'' &= \sin(\varepsilon' + \varphi')\cos\varphi'' - [\sin(\varepsilon' + \varphi')\cos\varepsilon'' \\ &\quad + \cos(\varepsilon' + \varphi')\sin\varepsilon''\cos(\alpha' - \alpha'')]\cos(\varepsilon'' - \varphi'') \\ -\sin\sigma\cos w \sin\varepsilon' &= \cos(\varepsilon'' - \varphi'')\sin\varphi' - [\cos(\varepsilon'' - \varphi'')\cos\varepsilon' \\ &\quad - \sin(\varepsilon'' - \varphi'')\sin\varepsilon'\cos(\alpha' - \alpha'')]\sin(\varepsilon' + \varphi') \\ -\sin\sigma'\cos u' \sin\varepsilon'' &= \sin(\varepsilon' - \varphi')\cos\varphi'' - [\sin(\varepsilon' - \varphi')\cos\varepsilon'' \\ &\quad + \cos(\varepsilon' - \varphi')\sin\varepsilon''\cos(\alpha' - \alpha'')]\cos(\varepsilon'' + \varphi'') \\ -\sin\sigma'\cos w' \sin\varepsilon' &= -\cos(\varepsilon'' + \varphi'')\sin\varphi' - [\cos(\varepsilon'' + \varphi'') \times \\ &\quad \cos\varepsilon' - \sin(\varepsilon'' + \varphi'')\sin\varepsilon'\cos(\alpha' - \alpha'')]\sin(\varepsilon' - \varphi'). \end{aligned} \right.$$

Die Dreiecke AOE und $A'OE$ geben aufserdem:

$$(f) \left\{ \begin{aligned} -\sin\sigma\sin u &= \cos(\varepsilon'' - \varphi'')\sin(\alpha' - \alpha'') \\ -\sin\sigma'\sin u' &= \cos(\varepsilon'' + \varphi'')\sin(\alpha' - \alpha'') \\ \sin\sigma\sin w &= \sin(\varepsilon' + \varphi')\sin(\alpha' - \alpha'') \\ \sin\sigma'\sin w' &= \sin(\varepsilon' - \varphi')\sin(\alpha' - \alpha''). \end{aligned} \right.$$

Subtrahirt man von dem Produkt der zwei ersten Gleichungen (f), nachdem man sie mit $\sin\varepsilon''$ multiplicirt hat, das Produkt der ersten und dritten der Gleichungen (e), so kommt:

Allgemeine Ausdrücke für die Intensität.

Die Gleichungen (I. u. II.) dienen zur Bestimmung von R_p, R_s, R' und R''. Eliminirt man nämlich R' und R'', so erhält man

III. $R_p = pP + s'S$ und $R_s = p'P + sS$,

wo

$$19)\left\{\begin{array}{l} N_p = \cos\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'')[\sin\varepsilon'(\tau-\tau')+\sin^2\alpha'\,tg\,q'] \\ \quad +\cos\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')[\sin\varepsilon''(\tau-\tau'')+\sin^2\alpha''\,tg\,q''] \\ N_s = -\cos\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha')[\sin\varepsilon''(\tau+\tau'')-\sin^2\alpha''\,tg\,q''] \\ \quad -\cos\varepsilon''\sin(\alpha-\alpha'')[\sin\varepsilon'(\tau+\tau')-\sin^2\alpha'\,tg\,q'] \\ N_p' = -\cos2\alpha\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''\sin(\alpha'-\alpha'') \\ N_s' = \sin2\alpha[\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''(\tau'-\tau'') \\ \qquad -\sin\varepsilon''\sin^2\alpha'\,tg\,q'+\sin\varepsilon'\sin^2\alpha''\,tg\,q''] \\ N = \cos\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'')[\sin\varepsilon'(\tau+\tau')-\sin^2\alpha'\,tg\,q'] \\ \quad +\cos\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')[\sin\varepsilon''(\tau+\tau'')-\sin^2\alpha''\,tg\,q''] \end{array}\right.$$

$$\frac{\sin\sigma\sin\sigma'}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\sin\varepsilon''\sin(u-u') = \cos\varphi''[\cos(\varepsilon''-\varphi'')\sin(\varepsilon'-\varphi')$$
$$-\cos(\varepsilon''+\varphi'')\sin(\varepsilon'+\varphi')]+2H\cos(\varepsilon''+\varphi'')\cos(\varepsilon''-\varphi'')\sin\varphi',$$

wo H für $\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''-\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos(\alpha'-\alpha'')$ steht.

Subtrahirt man ebenso von dem Produkt der beiden letzten Gleichungen (f), nachdem man sie mit $\sin\varepsilon'$ multiplicirt hat, das Produkt der zweiten und vierten der Gleichungen (e), so kommt:

$$\frac{\sin\sigma\sin\sigma'}{\sin(\alpha'-\alpha'')}\sin\varepsilon'\sin(w+w') = -\sin\varphi'[\cos(\varepsilon''-\varphi'')\sin(\varepsilon'-\varphi')$$
$$-\cos(\varepsilon''+\varphi'')\sin(\varepsilon'+\varphi')]+2H\sin(\varepsilon'-\varphi')\sin(\varepsilon+\varphi')\cos\varphi'',$$

und aus den beiden letzten Gleichungen zieht man:

$$(g)\quad \frac{\sin\sigma\sin\sigma'}{\sin(\alpha'-\alpha'')}[\sin\varepsilon''\sin\varphi'\sin(u-u')+\sin\varepsilon'\cos\varphi''\sin(w+w')]$$
$$=2H[\cos(\varepsilon''+\varphi'')\cos(\varepsilon''-\varphi'')\sin^2\varphi'+\sin(\varepsilon'+\varphi')\sin(\varepsilon'-\varphi')\cos^2\varphi''].$$

Da nun $\cos AA' = \cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos2\varphi'$

$$= \cos(u-u')-2\sin u\sin u'\sin^2\varphi$$

und $\cos AA' = \cos w\cos w'+\sin w\sin w'\cos2\varphi''$

$$= \cos(w+w')+2\sin w\sin w'\cos^2\varphi'',$$

mithin $\cos(u-u')-\cos(w+w') = 2(\sin u\sin u'\sin^2\varphi'+\sin w\sin w'\cos^2\varphi'')$ ist, so ergiebt sich, wenn man mittelst der Gleichungen (f) auf der rechten Seite u, u', w, w' eliminirt,

$$\frac{\sin\sigma\sin\sigma'}{\sin^2(\alpha'-\alpha'')}[\cos(u-u')-\cos(w+w')]$$
$$= 2[\cos(\varepsilon''-\varphi'')\cos(\varepsilon''+\varphi'')\sin^2\varphi'+\sin(\varepsilon'-\varphi')\sin(\varepsilon'+\varphi')\cos^2\varphi''],$$

welche Gleichung durch (g) dividirt die zu erweisende Relation (A) liefert.

ist. Ferner erhält man durch Elimination von R_p und R_s

$$\text{IV.}\quad NR' = 2\tau \{P \cos\varepsilon'' \sin(\alpha+\alpha'') - S[\sin\varepsilon''(\tau+\tau'') - \sin^2\alpha'' \operatorname{tg} q'']\}$$

$$\text{V.}\quad NR'' = 2\tau \{P \cos\varepsilon' \sin(\alpha+\alpha') + S[\sin\varepsilon'(\tau+\tau') - \sin^2\alpha' \operatorname{tg} q']\}.$$

Die Intensität in den reflektirten und gebrochenen Wellensystemen wird alsdann resp. $(R_p^2+R_s^2)M$, R'^2M', R''^2M''.

Die Intensitätsausdrücke für die Fälle, in denen die Einfalls-Ebene mit einem der Hauptschnitte zusammenfällt, ergeben sich sehr einfach aus den eben gefundenen allgemeinen.

Fällt nämlich 1) das Licht in der Ebene ein, welche durch die Axen ν und π geht, so wird $u = u'$, $w = w'$, also $\frac{1}{O} = 0$ (Abschn. I, 68), und daher $\operatorname{tg} q' = \frac{1}{o^2 O} = 0$. Die Normale der gewöhnlichen Well-Ebene fällt also mit ihrem Strahl zusammen. Da die Schwingungen des gewöhnlichen Strahls in der Einfalls-Ebene geschehen, so wird $\sin\varepsilon' = 0$; und da die des ungewöhnlichen senkrecht gegen diese Ebene geschehen, so wird $\cos\varepsilon'' = 0$; folglich $\cos\varepsilon' = \mp 1$ und $\sin\varepsilon'' = \pm 1$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Strahlen respective nach der Axe π oder nach der Axe ν hin gebrochen werden.

Demnach wird $p' = s' = 0$, und wenn man $\frac{\sin^2\alpha''}{E e^2}$ mit A, $\frac{M' \sin\alpha}{l}$ mit U', und $\frac{M'' \sin\alpha}{l}$ mit U'' bezeichnet,

$$20)\ \left\{\begin{array}{ll} R_s = -\dfrac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')} S, & R_p = \dfrac{(\tau-\tau'')\pm A}{(\tau+\tau'')\mp A} P, \\ R' = \pm\dfrac{2\tau}{\sin(\alpha+\alpha')} S, & R'' = \pm\dfrac{2\tau}{(\tau+\tau'')\mp A} P, \\ U' = \dfrac{\tau'}{\tau}, & U'' = \dfrac{\tau''\mp A}{\tau}. \end{array}\right.$$

Fällt 2) das Licht in der Ebene ein, welche durch die Axen μ und ν geht, so ist $u = 180 - u'$, $w = 180 - w'$, also $u - u' = 180 - 2u'$, $w + w' = 180$, und mithin $\frac{1}{E} = 0$

(Abschn. I, 69) und $tg\,q'' = \frac{1}{e^2 E} \mp 0$. Der ungewöhnliche Strahl fällt daher mit seiner Normale zusammen. Da die Schwingungen des ungewöhnlichen Wellensystems in der Einfalls-Ebene, und die des gewöhnlichen Wellensystems senkrecht darauf steht, so hat man $\cos\varepsilon' = 0$, $\sin\varepsilon'' = 0$, und es wird $\sin\varepsilon' = \pm 1$ und $\cos\varepsilon'' = \mp 1$, je nachdem die Strahlen nach der Axe μ oder ν hin gebrochen werden. Es wird daher wiederum $p' = 0$ und $s' = 0$, und wenn man $\frac{\sin^2\alpha'}{o^2 O}$ mit A_1 bezeichnet:

$$21)\left\{\begin{array}{ll} R_p = -\frac{\sin(\alpha-\alpha'')}{\sin(\alpha+\alpha'')}S, & R_p = \frac{(\tau-\tau')\pm A_1}{(\tau+\tau')\mp A_1}P, \\ R' = \pm\frac{2\tau}{\tau+\tau'\mp A_1}P, & R'' = \pm\frac{2\tau}{\sin(\alpha+\alpha'')}S, \\ U' = \frac{\tau'\mp A_1}{\tau}, & U'' = \frac{\tau''}{\tau}. \end{array}\right.$$

Fällt 3) das Licht in dem Hauptschnitt $\pi\mu$ ein, d. h. in der Ebene der optischen Axen, und liegen die Normalen der gebrochenen Wellensysteme in dem stumpfen Winkel dieser Axen, so geschehen die Schwingungen im gewöhnlichen Strahl der Einfalls-Ebene parallel, die im ungewöhnlichen Strahl senkrecht gegen dieselbe, und man hat daher $\sin\varepsilon' = 0$, $\cos\varepsilon'' = 0$, und $\cos\varepsilon' = \mp 1$, $\sin\varepsilon'' = \pm 1$, je nachdem das Licht nach der Axe μ oder der Axe π hin gebrochen wird. Ferner wird $\varphi' = \varphi'' = 0$, also auch $\frac{1}{O} = 0$, und man erhält daher genau wiederum die Formeln (20), in denen die oberen ($\pm$) Zeichen zu nehmen sind, wenn das Einfallsloth zwischen der Axe π und der Normale der gebrochenen Well-Ebene liegt; die unteren, wenn die Normale zwischen dem Einfallsloth und jener Axe liegt.

Liegen dagegen die Normalen in dem spitzen Winkel der optischen Axen, so hat man $\varphi' = \varphi'' = 90$, also $\frac{1}{E} = 0$, und $\tan g\,q'' = 0$; ferner wird $\sin\varepsilon' = 0$, $\cos\varepsilon'' = 0$, $\cos\varepsilon' = \pm 1$, $\sin\varepsilon'' \mp 1$, je nachdem die Brechungen nach der

Axe μ oder der Axe π hin geschehen. Dies sind aber genau die Bedingungen des Falles (2), und daher kommt man wiederum auf die Formeln (21), mit der letzten Bestimmung über die Vorzeichen.

Intensität des reflektirten und gebrochenen Lichtes bei der konischen Refraction.

Es seien BA und BA' (Fig. 46.) die Richtungen der optischen Axen: ferner sei BS die Richtung des einfallenden Strahls, BO und BE die der Normalen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Well-Ebene, und daher $BSOE$ die Einfalls-Ebene. Es möge zuvörderst die brechende Fläche auf der Ebene der optischen Axen senkrecht stehen, also das Einfallsloth in dieser Ebene und zwar in dem spitzen Winkel der optischen Axen liegen, so dafs sie mit ihnen Winkel bilden, welche zwischen 0^0 und $2n$ enthalten sind. Aendert der einfallende Strahl BS seine Lage, so thut das auch BO und BE, und im Allgemeinen auch die Einfalls-Ebene BSE. Läfst man die Aenderung so von statten gehen, dafs die Einfalls-Ebene kleinere und kleinere Winkel mit der Ebene der optischen Axen bildet, während die Ebene BOA ihre Lage beibehält, bis die Einfalls-Ebene mit der Ebene $BAAS'$ coincidirt, so rückt der Punkt O längs OA' nach A', während BE gleichfalls in BA' hineinrückt, und BS etwa die Lage BS' annimmt. Ist O dem Punkt A' unendlich nahe, so ist, da die Ebenen BOA und BEA im Zusammenfallen begriffen sind, $\angle AA'C = 2\varphi' = 2\varphi''$. Halbirt man diesen Winkel durch die Ebene Baa', so ist $A'a$ die Schwingungsrichtung des gewöhnlichen Strahls, und die darauf senkrechte Richtung bb' die des ungewöhnlichen, so dafs $S'A'a = \varepsilon'$ und $S'A'b = \varepsilon''$ ist. Da $u' = w' = 0$, und $u = w = 2n$ und $\varphi' = \varphi'' = 180 - \varepsilon'$ wird, so hat man

$$\frac{1}{O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u - u') \sin\varphi' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin 2n \sin\varepsilon' \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(w + w') \cos\varphi'' = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin 2n \cos\varepsilon',$$

und

und insofern $o^2 = e^2 = v^2$ ist,

$$tang\, q' = \frac{1}{o^2 O} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2v^2} sin\, 2n\, sin\, \varepsilon',$$

$$tang\, q'' = \frac{1}{e^2 E} = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2v^2} sin\, 2n\, cos\, \varepsilon'.$$

Da die Schwingungsrichtung senkrecht auf der durch den Strahl und seine Normale gehenden Ebene steht, so liegt der gewöhnliche Strahl in der Ebene Bbb' (seine Richtung möge Bb' sein). Der Winkel $a'A'S'$, welcher $180^0 - \varepsilon'$ ist, ist dann das oben mit ψ'' bezeichnete Azimuth des ungewöhnlichen Strahls gegen die Einfalls-Ebene; und der Winkel $b'A'S' = \varepsilon' - 90^0$ ist dann das oben mit ψ' bezeichnete Azimuth des gewöhnlichen Strahls gegen die Einfalls-Ebene. Führt man diese Azimuthe ψ' und ψ'' für die Neigungen der Schwingungsrichtungen, ε' und ε'' in die Ausdrücke für q' und q'' ein, so erhält man

$$22)\quad \begin{cases} tang\, q' = \dfrac{\pi^2 - \mu^2}{2v^2} sin\, 2n\, cos\, \psi' \\ tang\, q'' = \dfrac{\pi^2 - \mu^2}{2v^2} sin\, 2n\, cos\, \psi'' \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt einen anderen einfallenden Strahl, welcher durch Brechung ein gewöhnliches Wellensystem erzeugt, dessen Normale BO_1 (aufserhalb der Ebene OBA' liegend) ist, und denken den Strahl so bewegt, dafs diese Normale in der Ebene BO_1A' sich bewegend in die Lage BA' rückt, so wird der zugehörige einfallende Strahl gleichfalls die Richtung BS' annehmen, und man wird für die Lage des zugehörigen gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls wiederum die Ausdrücke (22) erhalten, mit dem Unterschiede, dafs ψ' und ψ'' andere sind. Während nämlich vorher $\psi' = \frac{1}{2} OA'S'$ war, wird jetzt $\psi' = \frac{1}{2} O_1A'S'$.

Denkt man sich nun von allen Seiten her gebrochene Strahlen, wie BO und BO_1 nach BA' hin rücken, so erhält man neue und neue Strahlenpaare, wie Bb' und Ba' es sind, welche demselben einfallenden Strahl BS' angehören, senkrecht gegen einander polarisirt sind und Werthen von ψ'' entsprechen, die zwischen 0^0 und $+90^0$ und

zwischen 0^0 und -90^0 liegen, da $OA'S'$ alle Werthe
0^0 bis $+180^0$ und von 0^0 bis -180^0 annehmen l
Die sämmtlichen gewöhnlichen und die sämmtlichen ι
wöhnlichen Strahlen werden daher Kegelflächen bi
deren Gleichungen die Gleichungen (22) sind. Da
$tang\, q'' = tang\, q'$ wird, wenn $\psi' = \psi''$ wird, so fällt
gewöhnliche Strahl eines jeden Strahlenpaares mit den
gewöhnlichen eines andern Strahlenpaares zusammen,
es bildet sich daher nur eine einzige Kegelfläche, c
Gleichung $tang\, q' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} sin\, 2n\, cos\, \psi'$ ist, wie es
schnitt I, p. 95 auf einem andern Wege gefunden wu
Nach dieser Betrachtung ist es leicht, die Inte
der reflektirten Strahlen und des gebrochenen Strahl
gels zu bestimmen.

Man denke sich den Strahl BS' durch das Zusam
treten von allen Richtungen her nach BS' sich bew
der Strahlen entstanden, so dafs dieselben in dem l
sten Moment vor ihrem Zusammenfallen einen Kegel
den, dessen jede Seite ein Strahlenpaar des gebroch
Strahlenkegels erzeugt. Ist I die Vibrations-Intensität
einfallenden Strahlenkegels, so kann man die einer ei
nen Seite desselben mit $\frac{I\theta}{2\pi}$ bezeichnen, wo θ ein sehr
ner Theil der Kreislinie 2π ist, welche die Basis des
gels vorstellen mag, vorausgesetzt, dafs alle Seiten de
ben gleiche Intensität haben. Man hat alsdann in den
meln (III, IV, V, 19) $P = \frac{P\theta}{2\pi}$ und $S = \frac{S\theta}{2\pi}$ zu se
ferner $s' = 180 - \psi''$, $\varepsilon'' = 90 + \psi''$, $\alpha' = \alpha''$, $\varphi' = \varphi'' =$
und man erhält für sämmtliche Partialstrahlen des refle
ten Lichtes:

$$R_p = \int (pP + s'S)\frac{\theta}{2\pi}, \qquad R_s = \int (p'P + sS)\frac{\theta}{2\pi},$$

wo das Summenzeichen $\int$ auf alle Werthe von ε' un
von 0 bis 2π zu beziehen ist. Man zieht alsdann aus
wenn man der Kürze wegen das Constante $\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}$ si

mit g bezeichnet, also $tg\,q' = g\,sin\,\varepsilon'$ und $tg\,q'' = -g\,cos\,\varepsilon'$ setzt, $Np = -sin(\alpha+\alpha')(\tau-\tau'+sin^2\alpha' g)$, $Ns = sin(\alpha-\alpha')(\tau+\tau'-sin^2\alpha' g)$, $Np' = 0$, $Ns' = 0$, $N\theta = -sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau'-sin^2\alpha' g)$, und demnach $\int p\theta = 2\pi p$, $\int s\theta = 2\pi s$, $\int p' = 0$, $\int s' = 0$, folglich

$$23)\quad \begin{cases} R_p = \dfrac{\tau-\tau'+sin^2\alpha' g}{\tau+\tau'-sin^2\alpha' g}\,P, \\ R_s = -\dfrac{sin(\alpha-\alpha')}{sin(\alpha+\alpha')}\,S. \end{cases}$$

Da für den in Rede stehenden Fall $\alpha' = \alpha''$ und $u+w' = u-u' = 2n$ ist, so gehen die Ausdrücke (20 u. 21) genau in die vorstehenden über, so dafs die konische Brechung durchaus keinen Einflufs auf die Intensität des reflektirten Lichtes hat.

Durch dieselben Substitutionen erhält man aus (IV. u. V.) für die Intensität je zwei zusammengehöriger (senkrecht auf einander polarisirter) Strahlen des gebrochenen Strahlenkegels, indem man $\frac{r'\theta}{2\pi}$, $\frac{r''\theta}{2\pi}$ für R' und R'' setzt:

$$Nr' = -2\tau[P\,sin(\alpha+\alpha')\,sin\,\psi'' + S\,cos\,\psi''(\tau+\tau'-sin^2\alpha' g)]$$

$$Nr'' = -2\tau[P\,sin(\alpha+\alpha')\,cos\,\psi'' - S\,sin\,\psi''(\tau+\tau'-sin^2\alpha' g)],$$

ferner
$$U' = \frac{\tau'-sin^2\psi''\,sin^2\alpha' g}{\tau},$$

$$U'' = \frac{\tau''-cos^2\psi''\,sin^2\alpha' g}{\tau}.$$

Der ungewöhnliche Strahl eines Strahlenpaares (einem Werthe von r'' entsprechend) fällt aber, wie vorher gezeigt wurde, mit dem gewöhnlichen Strahl eines anderen Strahlenpaares (einem Werthe von r' entsprechend) sowohl der Lage als der Schwingungsrichtung nach zusammen, nämlich wenn $\psi' = \psi''$ wird, also wenn das Azimuth des gewöhnlichen Strahls in dem einen Paare ψ'', in dem anderen $\psi''-90^0$ ist. In diesem Falle wird aber $r' = r''$. — Der ganze Strahlenkegel besteht also aus Doppelstrahlen von gleicher Intensität und Schwingungsrichtung, so dafs

in jedem Doppelstrahl die Intensität der Bewegung $2r'$ oder $2r''$ ist. Nennen wir dieselbe r, so hat man

$$24)\quad r = 4\tau \frac{P \sin(\alpha+\alpha')\cos\psi'' - S\sin\psi''(\tau+\tau'-\sin^2\alpha' g)}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau'-\sin^2\alpha' g)}$$

und mithin für die Lichtstärke

$$r^2 U' = \frac{r^2}{\tau}(\tau' - \cos^2\psi'' \sin^2\alpha' g),$$

während $\sin\alpha' = v \sin\alpha$ ist, insofern die Geschwindigkeit längs der optischen Axe $= v$ ist.

Steht die brechende Ebene auf der optischen Axe senkrecht, so wird $\alpha' = 0$ und $r = 4(P\cos\psi'' - S\sin\psi'')$.

Da $r = 0$ wird für $\frac{P}{S} = tang\,\psi''$, und $\frac{P}{S}$ die Tangente des Azimuths der Polarisationsebene des einfallenden Strahls ist, so verschwindet das Licht derjenigen Seite des Kegels welche in dieser Polarisations-Ebene liegt; während das Licht der darauf senkrechten Seite ein Maximum wird.

Die Summe der Vibrations-Intensitäten sämmtlicher Doppelstrahlen mufs den Werthen von R' und R'' gleich werden, welche oben für den allgemeinen Fall hingestellt sind, dafs das Licht in der Ebene der optischen Axen einfällt, nämlich den Werthen aus (20 oder 21). In der That, wenn man die Bewegungen r nach den Azimuthen 0^0 und 90^0 zerlegt, so erhält man für das Azimuth 0^0: $-r\sin\psi''\frac{\theta}{2\pi}$ und für das Azimuth 90^0: $r\cos\psi''\frac{\theta}{2\pi}$. Da nun θ sich als die Aenderung des Winkels $OA'S' = 2\psi''$ betrachten läfst und in dem Strahlenkegel ψ'' alle Werthe zwischen $+90^0$ und -90^0 annimmt, so hat man

$$-\int r\sin\psi''\frac{\theta}{2\pi} = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r\cos\psi''\frac{\partial\psi''}{\pi},$$

$$\int r\cos\psi''\frac{\theta}{2\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r\cos\psi''\frac{\partial\psi''}{\pi},$$

nd es findet sich, wenn man für r seinen Werth aus (24) nimmt:

$$-\int r \sin\psi'' \frac{\beta}{2\pi} = \frac{2\tau S}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

$$\int r \cos\psi'' \frac{\beta}{2\pi} = \frac{2\tau P}{\tau+\tau' - \sin^2\alpha' g},$$

welches genau die Ausdrücke in (20 u. 21.) sind.

Um die Intensität des gebrochenen Strahlenkegels zu erhalten, wenn die brechende Fläche nicht auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht, führe man wiederum den Winkel ψ'' statt ε' ein, so daſs $\psi'' = 180 - \varepsilon' = \varepsilon'' - 90$ ist. Da die gemeinschaftliche Normale der gebrochenen Strahlen die optische Axe ist, so ist α' der Winkel zwischen derselben und dem Einfallsloth, und die durch dasselbe und die Axe gehende Ebene wird die Einfalls-Ebene, welche gegen die Ebene der optischen Axen um den Winkel λ geneigt sei. Alsdann ist, da ψ'' das Azimuth des ungewöhnlichen Strahls ist, $\psi''+\lambda$ das Azimuth dieses Strahls gegen die Ebene der optischen Axen (welches im vorigen Fall ψ'' selbst war). Man erhält daher $tang\, q'$ und $tang\, q''$ aus (22), indem man $\psi''+\lambda$ statt ψ'' setzt, nämlich

$$tg\, q' = g \sin(\psi''+\lambda) \qquad tg\, q'' = g \cos(\psi''+\lambda).$$

Demnach ergiebt sich aus (IV. u. V.), indem man wiederum P und S durch $\frac{P\theta}{2\pi}$ und $\frac{S\theta}{2\pi}$, und R' und R'' durch $\frac{R'\theta}{2\pi}$, $\frac{R''\theta}{2\pi}$ ersetzt, für je zwei zusammengehörige Strahlen des Refractionskegels:

$$r' = 2\tau \frac{P \sin\psi'' \sin(\alpha+\alpha') + S[\cos\psi''(\tau+\tau') - g \sin^2\alpha' \cos(\psi''+\lambda)]}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau' - g \sin^2\alpha' \cos\lambda)}$$

$$r'' = 2\tau \frac{P \cos\psi'' \sin(\alpha+\alpha') - S[\sin\psi''(\tau+\tau') - g \sin^2\alpha' \sin(\psi''+\lambda)]}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau' - g \sin^2\alpha' \cos\lambda)},$$

Da $q' = q''$ und $r' = r''$ wird, wenn in den ersten dieser Ausdrücke $90+\psi''$ für ψ'' gesetzt wird, so läſst sich auch hier der gebrochene Lichtkegel vorstellen als gebildet aus Strahlenpaaren, von denen der eine ein gewöhnlicher,

der andere ein ungewöhnlicher ist, und welche gleiche Polarisationsrichtung und gleiche Vibrations-Intensität haben. Man darf daher nur r'' verdoppeln, um die Intensität eines jeden Doppelstrahls (r) zu haben, so dafs man erhält:

$$25)\quad r = 2r'' = 4\tau \times \frac{P \sin(\alpha+\alpha')\cos\psi'' - S[\sin\psi''(\tau+\tau') - g\sin^2\alpha' \sin(\psi''+\lambda)]}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau'-g\sin^2\alpha'\cos\lambda)}.$$

Für $\lambda = 0$, d. h. für den Fall, dafs das Einfallsloth in dem spitzen Winkel $A'CA$ der optischen Axen liegt, reducirt sich diese Formel auf (24). Für $\lambda = 180$, d. h. für den Fall, dafs das Einfallsloth im stumpfen Winkel liegt, geht dieselbe über in:

$$26)\quad r = -4\tau \frac{P\sin(\alpha+\alpha')\cos\psi'' - S\sin\psi''[\tau+\tau'+g\sin^2\alpha']}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau'+g\sin^2\alpha')}.$$

Summirt man die Intensitäten der jedem partialen Doppelstrahl des Refractionskegels zugehörigen reflektirten Strahlen, so ergiebt sich die Intensität des gesammten reflektirten Strahls, nämlich

$$R_p = P\int\frac{p\theta}{2\pi} + S\int\frac{s'\theta}{2\pi} \quad \text{und} \quad R_s = P\int\frac{p'\theta}{2\pi} + S\int\frac{s\theta}{2\pi},$$

während $Np = -\sin(\alpha+\alpha')[\tau-\tau'+g\sin^2\alpha'\cos\lambda]$,

$Ns = \sin(\alpha-\alpha')[\tau+\tau'-g\sin^2\alpha'\cos\lambda]$, $Np' = 0$,

$Ns' = -g\sin 2\alpha \sin^2\alpha' \sin\lambda$, also

$$\int\frac{p\theta}{2\pi} = \frac{\tau-\tau'+g\sin^2\alpha'\cos\lambda}{\tau+\tau'-g\sin^2\alpha'\cos\lambda}, \quad \int\frac{s\theta}{2\pi} = -\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

$$\int\frac{p'\theta}{2\pi} = 0, \quad \int\frac{s'\theta}{2\pi} = \frac{2\tau g\sin^2\alpha'\sin\lambda}{\sin(\alpha+\alpha')(\tau+\tau'-g\sin^2\alpha'\cos\lambda)}$$

wird.

Dieselben Resultate geben die allgemeinen Gleichungen (19), wenn man die brechende Fläche auf der Ebene der optischen Axen senkrecht stehend, d. h. $\varepsilon' = 180 + \frac{1}{2}\lambda$, $\varepsilon'' = 90 - \frac{1}{2}\lambda$ annimmt, woraus folgt, dafs die Reflexion durch die konische Brechung gar nicht modificirt wird.

Um die Intensität der verschiedenen Seiten des Refractionskegels zu erhalten, wenn das einfallende Licht unpolarisirt ist, zerlege man sämmtliche, nach allen Richtungen ohne Unterschied gerichteten Vibrationen nach einer

bestimmten Richtung, welche mit der Einfalls-Ebene etwa den Winkel ζ bildet, so dafs, wenn I^2 die Intensität des einfallenden Lichtes ist, $S = I\cos\zeta$ und $P = I\sin\zeta$ wird, während ζ innerhalb einer sehr kurzen Zeit alle Werthe von 0 bis 2π annimmt, und die Intensität (I'^2) jeder Seite des gebrochenen Lichtkegels daher $\int_0^{2\pi} r^2 U \frac{\partial\zeta}{2\pi}$ ist. Es ist also

$$I'^2 = 8I^2\tau^2 \times \frac{\cos^2(\psi''-\lambda)\sin^2(\alpha+\alpha') + [\sin(\psi''-\lambda)(\tau+\tau') - g\sin^2\alpha'\cos\lambda]^2}{(\tau+\tau'-g\sin^2\alpha'\cos\lambda)^2\sin^2(\alpha+\alpha')} U$$

und

$$U = \frac{\tau' - g\sin^2\alpha'\cos^2(\psi''-\lambda)}{\tau},$$

und näherungsweise, wenn man $\pi^2 - \mu^2$ vernachlässigt:

$$I'^2 = 8I^2 \frac{\tau\tau'}{\sin^2(\alpha+\alpha')}\left(\frac{\cos^2(\psi''-\lambda)}{\cos^2(\alpha-\alpha')} + \sin^2(\psi''-\lambda)\right).$$

Das Licht ist also am schwächsten für $\psi'' = \lambda$, d. h. in den Seiten des Kegels, welche in der Einfalls-Ebene liegen, und am stärksten für $\psi'' = \lambda - 90^0$, d. h. in den auf der Einfalls-Ebene senkrecht stehenden Kegelseiten. Die gröfste Lichtstärke verhält sich ferner zur geringsten wie $1 : \cos^2(\alpha - \alpha')$; die Helligkeit ist mithin um so gleichmäfsiger, je kleiner $\alpha - \alpha'$ ist, und sie ist überall gleich für $\alpha = \alpha'$, d. h. für den Fall, dafs die brechende Fläche auf der optischen Axe senkrecht steht.

Ist aber das auffallende Licht nicht ein einzelner Strahl, sondern ein Strahlencylinder, wie es in der Wirklichkeit immer der Fall ist, so entstehen eine unendliche Menge Strahlenkegel, welche eine modificirte Lichtvertheilung und Aenderungen in der Lage der Polarisations-Ebenen herbei-

Reflexion des unpolarisirten Lichtes.

a) Polarisationswinkel.

Der Polarisationswinkel, d. h. derjenige Einfallswinkel, bei welchem unpolarisirtes Licht durch Reflexion vollständig polarisirt wird, ist wie bei einaxigen Krystallen bestimmt durch die Gleichung

$$ps - p's' = 0.$$

Für die einfachen Fälle, in denen die Einfalls-Ebene mit einem der drei Hauptschnitte zusammenfällt, läfst sich diese Bedingungsgleichung durch $R_p = 0$ ersetzen.

Es falle 1) das Licht in der Ebene $\pi\nu$ ein, d. h. für negative Krystalle in der den spitzen Winkel der optischen Axen halbirenden Ebene. Alsdann hat man

$$R_p = \tau - \tau'' \pm \frac{\sin^2\alpha''}{e^2 E} = 0,$$

während, da $w = w'$ ist,

$$\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin 2w \cos\varphi'' \qquad \text{wird.}$$

Aus dem rechtwinkligen körperlichen Dreieck, gebildet, durch die eine optische Axe, die Axe π und die Normale der ungewöhnlichen Well-Ebene, folgt, wenn man den Winkel zwischen dieser Normale und der Axe π mit δ bezeichnet, $\sin w \sin\varphi'' = \sin n$ und $\cos w = \cos\delta \cos n$, und durch Multiplication dieser Gleichungen $\sin 2w \sin\varphi'' = \sin 2n \cos\delta$. Verbindet man diese letzte Gleichung mit der sich gleichfalls aus dem Dreieck ergebenden: $\sin\delta = \cot g\varphi'' tg\, n$, so findet sich $\cos\varphi'' \sin 2w = \cos^2 n \sin 2\delta$, und mithin $\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos^2 n \sin 2\delta$, oder wegen $\cos^2 n = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}$, $\frac{1}{E} = \frac{\pi^2 - \nu^2}{2} \sin 2\delta$, folglich

$$R_p = \tau - \tau'' \pm \tfrac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2) \sin 2\delta \sin^2\alpha = 0.$$

Statt des Winkels δ ist es bequemer, den Winkel zwischen dem Einfallsloth und der Axe π einzuführen. Bezeichnet man diesen mit ϱ, so hat man $\delta - \alpha'' = \varrho$, wenn

$\varrho < \delta$ ist (also wenn das (+) Zeichen vor $\frac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2)$ zu nehmen ist), und $\delta + \alpha'' = \varrho$, wenn $\varrho > \delta$ ist (also wenn das (—) Zeichen vor $\frac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2)$ zu nehmen ist). Legt man daher dem ϱ nach diesem Unterschiede positive und negative Werthe bei, so läfst sich statt der letzten Gleichung schreiben:

$$27)\quad R_r = \tau - \tau'' - \tfrac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2)\, sin\, 2(\varrho - \alpha'')\, sin^2 \alpha = 0.$$

Zur Elimination von α'' hat man die Gleichung:

$$sin^2 \alpha'' = e^2 sin^2 \alpha = (\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) sin^2 w) sin^2 \alpha,$$

während aus den Gleichungen, welche das oben erwähnte Dreieck liefert, nämlich aus $cos\,\varphi'' = tg\,\delta\, cot\, w$ und $cos\, w = cos\,\delta\, cos\, n$ sich findet: $cos^2 \varphi'' = \frac{sin^2 \delta\, cos^2 n}{1 - cos^2 \delta\, cos^2 n}$. Da aus demselben Dreieck folgt:

$$sin^2 w = \frac{sin^2 n}{sin^2 \varphi''},$$

so erhält man $sin^2 w = 1 - cos^2 \delta\, cos^2 n$ und somit, wenn man für $cos^2 n$ seinen Werth setzt,

$$\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) sin^2 w = \tfrac{1}{2}(\nu^2 + \pi^2) - \tfrac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2) cos\, 2\delta, \text{ also}$$

$$28)\quad sin^2 \alpha'' = sin^2 \alpha \left[\tfrac{1}{2}(\pi^2 + \nu^2) - \tfrac{1}{2}(\pi^2 - \nu^2) cos\, 2(\varrho - \alpha'')\right].$$

Aus (27 und 28) ergiebt sich leicht:

$$sin\, 2\alpha'' = \frac{(\pi^2-\nu^2)[1-(\pi^2+\nu^2)sin^2\alpha]sin^2\alpha\, sin 2\varrho - sin 2\alpha[1-(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, cos 2\varrho]}{[(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, sin 2\varrho]^2 + [1-(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, cos 2\varrho]^2}$$

$$cos\, 2\alpha'' = \frac{[1-(\pi^2+\nu^2)sin^2\alpha][1-(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, cos 2\varrho] + (\pi^2-\nu^2)sin 2\alpha\, sin^2\alpha\, cos 2\varrho}{[(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, sin 2\varrho]^2 + [1-(\pi^2-\nu^2)sin^2\alpha\, cos 2\varrho]^2},$$

und hieraus, wenn man quadrirt und addirt.

$$\text{VI.}\quad sin^2 \alpha = \frac{(1 - \nu^2) cos^2 \varrho + (1 - \pi^2) sin^2 \varrho}{1 - \pi^2 \nu^2}.$$

2) Fällt das Licht in der Ebene $\mu\nu$ ein, so darf man nur in (VI.) π mit μ vertauschen und unter ϱ den Winkel des Einfallsloths mit der Axe μ verstehen, um den Ausdruck für den Polarisationswinkel zu erhalten. Es wird dann nämlich

$$\text{VII.}\quad sin^2 \alpha = \frac{(1 - \nu^2) cos^2 \varrho + (1 - \mu^2) sin^2 \varrho}{1 - \nu^2 \mu^2}.$$

3) Fällt das Licht in der Ebene $\pi\mu$ ein, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\text{VIII.}\quad \sin^2\alpha = \frac{(1-\mu^2)\cos^2\varrho + (1-\pi^2)\sin^2\varrho}{1-\mu^2\pi^2},$$

die Normale der gebrochenen Welle mag im spitzen oder stumpfen Winkel der optischen Axen liegen, wenn nur ϱ den Winkel des Einfallslothes mit der Axe ν bedeutet.

Was den allgemeinen Fall betrifft, so findet man, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
\sin\varepsilon'(\tau-\tau') + \sin^2\alpha'\,tg\,q' &= A',\\
\sin\varepsilon'(\tau-\tau'') + \sin^2\alpha''\,tg\,q'' &= A'',\\
-\sin\varepsilon'(\tau+\tau') + \sin^2\alpha'\,tg\,q' &= B',\\
-\sin\varepsilon''(\tau+\tau'') + \sin^2\alpha''\,tg\,q'' &= B''
\end{aligned}$$

setzt, da hierdurch die Gleichungen (19) werden

$$\begin{aligned}
Np &= A'\cos\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'') + A''\cos\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha'),\\
Np' &= -\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''\sin 2\alpha\sin(\alpha'-\alpha''),\\
Ns &= B'\cos\varepsilon''\sin(\alpha-\alpha'') + B''\cos\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha'),\\
Ns' &= A'B''-A''B',
\end{aligned}$$

indem man diese Werthe in $ps - p's' = 0$ substituirt, leicht:

$$[A'\cos\varepsilon''\sin(\alpha-\alpha'') + A''\cos\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha')]\times$$
$$[B'\cos\varepsilon''\sin(\alpha+\alpha'') + B''\cos\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')] = 0.$$

Nur das Verschwinden des ersten Faktors giebt die Bedingung der Polarisation, denn der zweite Faktor kann für den speciellen Fall, dafs $\pi = \mu = \nu$ wird, nicht verschwinden.

Der erste Faktor giebt, wenn man die Werthe für A' und A'' restituirt, zur Bestimmung des Polarisationswinkels die Gleichung:

$$29)\quad \sin\varepsilon'\cos\varepsilon''\cos(\alpha+\alpha') + \sin\varepsilon''\cos\varepsilon'\cos(\alpha+\alpha'')$$
$$+\frac{\sin^2\alpha'\,tg\,q'\cos\varepsilon''}{\sin(\alpha-\alpha')} + \frac{\sin^2\alpha''\,tang\,q''\cos\varepsilon'}{\sin(\alpha-\alpha'')} = 0,$$

oder da $\dfrac{\sin^2\alpha'}{o^2} = \dfrac{\sin^2\alpha''}{e^2} = \sin^2\alpha,$

$$\sin^2\alpha'\,tg\,q' = \tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\sin(u-u')\sin\varphi'\sin^2\alpha \quad \text{und}$$
$$\sin^2\alpha''\,tg\,q'' = \tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\sin(w+w')\cos\varphi''\sin^2\alpha \quad \text{ist,}$$

: Gleichung:

$$\text{XI.}\quad \sin\varepsilon'\cos\varepsilon''\cos(\alpha+\alpha')+\sin\varepsilon''\cos\varepsilon'\cos(\alpha+\alpha'')$$
$$+\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\left(\frac{\cos\varepsilon''\sin(u-u')\sin\varphi'}{\sin(\alpha-\alpha')}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\varepsilon'\sin(w+w')\cos\varphi''}{\sin(\alpha-\alpha'')}\right)\sin^2\alpha = 0.$$

Läfst man, um einen genäherten Werth für α zu ha-n, die 2ten und höheren Potenzen von $\pi^2-\mu^2$ aufser :ht, so darf man nur in dem Faktor von $\pi^2-\mu^2$ alle :öfsen vernachlässigen, welche mit $\pi^2-\mu^2$ zugleich ver-hwinden, oder, was dasselbe ist, $\alpha'=\alpha''$, $\varphi'=\varphi''$, $u=w$, $=w'$, $\cos\varepsilon''=-\sin\varepsilon'$ und $\sin\varepsilon''=-\cos\varepsilon'$ setzen. Inso-rn $\cos(\alpha+\alpha'')=\cos(\alpha+\alpha')+\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha-\alpha'')$ ist, hält man alsdann aus (IX.), wenn man $\pi^2-\mu^2=2k_1$ setzt,

$$\cos(\alpha+\alpha')+\cos^2\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha')\sin(\alpha'-\alpha'') =$$
$$\frac{k_1\sin^2\alpha}{\sin(\alpha-\alpha')}(\cos\varepsilon'\sin(u+u')\cos\varphi'-\sin\varepsilon'\sin(u-u')\sin\varphi').$$

a ferner $\sin(\alpha'-\alpha'')\sin(\alpha'+\alpha'')=\sin^2\alpha'-\sin^2\alpha''=$ $^2-e^2)\sin^2\alpha=k_1[\cos(w+w')-\cos(u-u')]\sin^2\alpha$ ist, so ndet sich, wenn man in dem Faktor von k_1 wiederum is von der Differenz $\pi^2-\mu^2$ Abhängige vernachlässigt,

$$\sin(\alpha'-\alpha'') = -k_1\frac{\sin u\sin u'\sin^2\alpha}{\tau'},$$

id demnach geht die vorige Gleichung über in:

$$30)\quad \cos(\alpha+\alpha') =$$
$$k_1\sin^2\alpha\left[\frac{\sin(u+u')\cos\varepsilon'\cos\varphi'-\sin(u-u')\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\sin(\alpha-\alpha')}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\tau'}\cos^2\varepsilon'\sin u\sin u')\right].$$

Um das noch Uebrige, was mit $(\pi^2-\mu^2)^2$ zugleich ver-hwindet, fortzuschaffen, bezeichne man einstweilen den oefficienten von k_1 mit A, so dafs man $\cos(\alpha+\alpha')=k_1A$ it; und multiplicire mit $\cos(\alpha-\alpha')$, wodurch man

$$31)\quad 1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha' = k_1A\cos(\alpha-\alpha')$$

hält. Bedenkt man alsdann, dafs die Gleichung (30) r $k_1=0$ giebt $\cos(\alpha+\alpha')=0$, also $\alpha=90-\alpha'$ und $s(\alpha-\alpha')=\sin^2\alpha$, so erhält man, wenn man diesen Nä-

herungswerth von $\cos(\alpha-\alpha')$ in den Faktor von k_1 in (31) substituirt:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\alpha' = 1-k_1 A \sin 2\alpha.$$

Da ferner, wenn man abkürzend k für $\frac{1}{2}(\varkappa^2+\mu^2)$ schreibt, $\sin^2\alpha' = e^2\sin^2\alpha = k-k_1\cos(u-u')\sin^2\alpha'$ ist, so hat man

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}[1+k_1(\cos(u-u')\sin^2\alpha - A\sin 2\alpha)].$$

Restituirt man hierin den Werth für A, so ergiebt sich, da in dem mit k_1 multiplicirten Theil $\cos(\alpha+\alpha') = 0$, also auch $\sin(\alpha-\alpha') = -\cos 2\alpha$ und $\sin(\alpha+\alpha')\sin 2\alpha = 2\varepsilon'$ gesetzt werden darf, und $\cos^2\varepsilon' = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varepsilon')$ ist,

$$32)\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}\{1+k_1\sin^2\alpha(\cos u\cos u' + \sin u\sin u'\cos 2\varepsilon' - \tang 2\alpha[\cos\varepsilon'\cos\varphi'\sin(u+u') - \sin\varepsilon'\sin\varphi'\sin(u-u')])\}.$$

Durch Elimination von u, u', ε', φ' aus (32) mittelst (10, 11, 12) erhält man, wenn man in dem mit k_1 multiplicirten Theil wiederum $\alpha' = 90-\alpha$ setzt,

$$33)\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}\Big[1-k_1\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}(\cos U\cos U' - \sin U\sin U'[\cos(E'-\Phi')\cos(E'+\Phi') + \sin(E'-\Phi')\sin(E'+\Phi')\cos 2\alpha])\Big].$$

Der eingeklammerte Faktor von $\sin U\sin U'$ läfst sich schreiben:

$$\cos^2\Phi'(\cos^2E'+\sin^2E'\cos 2\alpha)-\sin^2\Phi'(\sin^2E'+\cos^2E'\cos 2\alpha),$$

oder $\cos^2E'+\sin^2E'\cos 2\alpha-2\sin^2\Phi'\cos^2\alpha$. Setzt man dann hierin für $\sin^2\Phi$ seinen Werth aus (13), so geht (33) über in:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}\Big[1-(\cos U\cos U'-\sin U\sin U'\times [\cos^2E'+\sin^2E'\cos 2\alpha]+\cos^2\alpha[\cos(U-U')-\cos 2n])\frac{\sin^2\alpha k_1}{\cos 2\alpha}\Big]$$

$$= \frac{1}{1+k}\Big[1+k_1\cos 2n\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}-k_1\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}(\cos U\cos U'\times (1+\cos^2\alpha)-\sin U\sin U'[\sin^2\alpha-\sin^2E'(1-\cos 2\alpha)])\Big].$$

Da für $k_1 = 0$, $sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}$, also $cos^2\alpha = \frac{k}{k+1}$ und $cos 2\alpha = \frac{k-1}{k+1}$ wird, so verwandelt sich der letzte Ausdruck, wenn man in den mit k_1 afficirten Gliedern diese Werthe substituirt, um die von k_1^2 abhängigen Gröfsen herauszuschaffen,

$$sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}\Big(1 + \frac{kk_1}{k^2-1} cos\, 2n$$
$$- \frac{k_1}{k^2-1}[cos\, U cos\, U'(2k+1) - sin\, U sin\, U' cos\, 2E]\Big)$$

oder, da $k_1 cos\, 2n = k - v^2$ ist,

$$\text{X.} \quad sin^2\alpha = \frac{1}{1+k}\Big(1 - \frac{k(k-v^2)}{1-k^2}$$
$$+ \frac{k_1}{1-k^2}[cos\, U cos\, U'(2k+1) - sin\, U sin\, U' cos\, 2E']\Big).$$

Man ersieht aus dieser Gleichung 1) dafs, wenn $U' = 0$ ist, d. h. wenn die Krystallfläche senkrecht auf einer optischen Axe steht, der Polarisationswinkel α von E' unabhängig ist, d. h. dafs derselbe in allen Azimuthen derselbe bleibt.

2) Dafs für jede bestimmte Werthe von U und U', d. h. für jede gegebene Krystallfläche, α ein Maximum oder Minimum wird für $E = 0$ und $E' = 90^0$, also für zwei auf einander senkrechte Lagen der Einfalls-Ebene.

Da ferner $cos\, 2E' = cos(-2E')$ und $cos(180 - 2E') = cos(180 + 2E')$ ist, so sind die Polarisationswinkel gleich für jede zwei Einfalls-Ebenen, welche mit den Ebenen des Maximums und Minimums gleiche Winkel bilden.

b) Ablenkung der Polarisations-Ebene.

Der Winkel, welchen die Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls mit der Einfalls-Ebene bildet, ist, wenn man denselben mit ω bezeichnet, bestimmt durch die Gleichung

$$tang\, \omega = \frac{s'}{s}.$$

Verbindet man den Werth von Ns aus (19) mit der Gleichung (29), so ergiebt sich

$$Ns = -sin 2\alpha[cos\varepsilon' sin\varepsilon'' sin(\alpha - \alpha') + cos\varepsilon'' sin\varepsilon' sin(\alpha - \alpha'')];$$

und eliminirt man q' und q'' aus Ns' in (19) mittelst

$$tg\,q'\sin^2\alpha' = \frac{\sin^2\alpha}{O} = k_1\sin(u-u')\sin\varphi'\sin^2\alpha,$$

$$tg\,q''\sin^2\alpha'' = \frac{\sin^2\alpha}{E} = k_1\sin(w+w')\cos\varphi''\sin^2\alpha \text{ und}$$

$$k_1\sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha' - \sin^2\alpha''}{\cos(w+w') - \cos(u-u')}\;{}^{*}),$$

so findet sich

$$\text{XI.}\quad tg\,\omega = \frac{s'}{s} = -\sin(\alpha'-\alpha'')\times$$

$$\left[\frac{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos(\alpha'+\alpha'') + Q\sin(\alpha'+\alpha'')}{\cos\varepsilon'\sin\varepsilon''\sin(\alpha-\alpha') + \cos\varepsilon''\sin\varepsilon'\sin(\alpha-\alpha'')}\right],$$

wo Q für den Quotienten

$$\frac{\sin(u-u')\sin\varphi'\sin\varepsilon'' - \sin(w+w')\cos\varphi''\sin\varepsilon'}{\cos(u-u') - \cos(w+w')} \text{ steht.}$$

Mittelst dieser Gleichung läfst sich die Ablenkung für jeden gegebenen Fall berechnen, nachdem man aus der Lage der Krystallfläche und der Reflexions-Ebene u, u', w, w', ε', ε'' ausgewerthet hat.

Für den Näherungswerth von $tang\,\omega$, in welchem die höheren Potenzen von k_1 (also auch von $\sin(\alpha'-\alpha'')$) fortgelassen sind, läfst sich die Elimination allgemein folgendermafsen ausführen.

Man setze in dem Faktor von $\sin(\alpha'-\alpha'')$: $u = w$, $u' = w'$, $\sin\varepsilon'' = -\cos\varepsilon'$, $\cos\varepsilon'' = -\sin\varepsilon'$, $\varphi' = \varphi''$, $\alpha' = \alpha''$. Dies giebt:

$$34)\quad tg\,\omega = -\frac{\sin(\alpha'-\alpha'')}{2\sin u\sin u'\sin(\alpha-\alpha')}\times$$

$$\{\sin u\sin u'\sin 2\varepsilon'\cos 2\alpha' + [\sin u\cos u'\sin(\varepsilon'+\varphi') + \sin u'\cos u\sin(\varepsilon'-\varphi')]\sin 2\alpha'\}.$$

Gebraucht man die Abkürzungen:

$$\sin U\cos U'\sin(E'+\Phi') + \sin U'\cos U\sin(E'-\Phi')$$
$$= \sin(U+U')\sin E'\cos\Phi' + \sin(U-U')\cos E'\sin\Phi' = Z$$

und $\sin U\sin U'\sin 2E' = Y$, so bekommt man durch die

---

*) Dieser Werth von $k_1\sin^2\alpha$ folgt unmittelbar aus $\sin^2\alpha' - \sin^2\alpha'' = \sin^2\alpha(o^2 - e^2)$.

erbindung der Gleichungen (10, 11):

$$\sin u \cos u' \sin(\varepsilon' + \varphi') + \sin u' \cos u \sin(\varepsilon' - \varphi')$$
$$= Z \cos\alpha' + Y \sin\alpha'$$

nd $\sin u \sin u' \sin 2\varepsilon' = -Z \sin\alpha' + Y \cos\alpha'$.

Der eingeklammerte Faktor in (34) wird demnach

$$Z(\cos\alpha' \sin 2\alpha' - \sin\alpha' \cos 2\alpha')$$
$$+ Y(\cos\alpha' \cos 2\alpha' + \sin\alpha' \sin 2\alpha') = Z \sin\alpha' + Y \cos\alpha',$$

ie Gleichung (34) geht also, da wegen (18)

$$-\frac{\sin(\alpha' - \alpha'')}{2 \sin u \sin u'} = k_1 \frac{\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha'}$$

it, über in:

$$\text{XI}, \alpha. \quad tg\,\omega = \frac{k_1 \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha' \sin(\alpha - \alpha')} (Z \sin\alpha' + Y \cos\alpha').$$

Um zu übersehen, wie die Ablenkungen bei einer und erselben reflektirenden Ebene sich mit der Aenderung der Einfalls-Ebene ändern, suche man die Richtungen derselben auf, in welchen gar keine Ablenkung stattfindet. Die Bedingung dafür ist:

$$\text{XII.} \quad Z \sin\alpha' + Y \cos\alpha' = 0.$$

Ist 1) die reflektirende Fläche der Axe μ parallel, lso $U - U' = 0$, so wird $Z = \sin 2U \sin E' \cos\Phi'$ und $Y = \sin^2 U \sin 2E'$.

Die Gleichung (XII.) wird demnach:

$$(\sin U \cos E' \cos\alpha' + \cos U \cos\Phi' \sin\alpha') \sin E' = 0.$$

Es giebt also in diesem Fall 4 Azimuthe ohne Ablenenkung, welche bestimmt sind durch

$$\sin E' = 0 \quad \text{und} \quad \cos E' = -\operatorname{cotg} U \cos\Phi' \, tg\,\alpha'.$$

n den letzten Ausdruck läfst sich leicht für U und Φ ie Neigung des Einfallslothes gegen die Axe π einführen. Nennt man dieselbe ξ, so hat man $\cos U = \cos\xi \cos n$ und

$\sin \Phi' = \frac{\sin n}{\sin U}$, also

$$\operatorname{cotg} U = \frac{\cos\xi \cos n}{\sqrt{1 - \cos^2\xi \cos^2 n}}, \quad \cos\Phi' = \frac{\cos n \sin\xi}{\sqrt{1 - \cos^2\xi \cos^2 n}},$$

o dafs man für die beiden Azimuthe, in welchen die Einalls-Ebene nicht in den Hauptschnitt fällt, erhält:

$$35)\quad \cos E = -\frac{\cos^2 n \sin\xi \cos\xi}{1-\cos^2\xi\cos^2 n} tg\,\alpha'$$

$$= -\frac{\cos^2 n\, tg\,\xi}{\sin^2 n + tg^2\xi} tg\,\alpha'.$$

2) Wenn die reflektirende Fläche der Axe n parallel ist, so wird $U+U'=180°$, $Z=-\sin 2U\cos E'\cos\Phi'$, $Y=\sin^2 U\sin 2E'$, und (XII.) geht über in:

$$(\sin U\sin E'\cos\alpha' - \cos U\sin\Phi'\sin\alpha')\cos E' = 0.$$

Die 4 Azimuthe sind daher bestimmt durch:

$$\cos E' = 0 \quad \text{und} \quad \sin E' = cotg\, U\sin\Phi'\, tg\,\alpha',$$

oder wenn man die Neigung des Einfallsloths gegen die Axe ω mit ξ_1 benennt,

$$36)\quad \cos E' = -\frac{\sin^2 n\, tg\,\xi_1}{\cos^2 n + tg^2\xi} tg\,\alpha'.$$

3) Wenn die Krystallfläche der Axe ν parallel ist, so wird, wenn das Einfallsloth im stumpfen Winkel der optischen Axen liegt, $\Phi'=0$, wenn dasselbe im spitzen liegt, $\Phi'=90$.

Für $\Phi'=0$ wird $Z=\sin(U+U')\sin E'$,
$Y=\sin U\sin U'\sin 2E'$,

also die Bedingungsgleichung:

$$[\sin(U+U')\sin\alpha' + 2\sin U\sin U'\cos E'\cos\alpha']\sin E' = 0,$$

und die 4 Azimuthe sind gegeben durch:

$$\sin\varepsilon' = 0 \quad \text{und} \quad 37)\quad \cos E' = -\frac{\sin(U+U')}{2\sin U\sin U'} tg\,\alpha'$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\cot U + \cot U')\, tg\,\alpha'.$$

Für $\Phi'=90°$ wird aus (XII.)

$$(\sin(U-U')\sin\alpha' + 2\sin U\sin U'\sin E'\cos\alpha')\cos E' = 0,$$

und die Azimuthe sind:

$$\cos E' = 0 \quad \text{und} \quad 38)\quad \sin E' = -\frac{\sin U - U'}{2\sin U\sin U'} tg\,\alpha'$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\cot U' - \cot U)\, tg\,\alpha'.$$

Es findet also auf allen diesen Flächen keine Ablenkung statt, wenn das Licht in einem Hauptschnitt einfällt, in zwei Azimuthen der Einfalls-Ebene, die durch die Gleichungen (35—38) bestimmt sind, für die Fälle, in denen

diese

diese reele Werthe für E' liefern. Um diese Fälle zu bestimmen, ziehe man aus (35):

$$tg\xi = -\frac{\cos^2 n}{2\cos E'}\,tg\,\alpha' \pm \sqrt{\frac{\cos^4 n\,tg^2\alpha'}{4\cos^2 E'} - \sin^2 n.}$$

ξ wird also nur reel, wenn $\cos^2 E' < \frac{tg^2\alpha' \cos^4 n}{4\sin^2 n}$ ist.

Es existirt daher nur dann auf jeder Fläche das zweite Paar Azimuthe ohne Ablenkung, wenn $\frac{tg^2\alpha' \cos^4 n}{4\sin^2 n} \overline{\underline{<}}\, 1$, also wenn $tg^2\alpha' \overline{\underline{<}}\, \frac{4\,tg^2 n}{\cos^2 n}$ ist. Ist $tg^2\alpha' < \frac{4\,tg^2 n}{\cos^2 n}$, existirt dieses Paar der Azimuthe also stets, so ist der gröfste Werth von E' bestimmt durch $\cos E' = -\frac{tg\,\alpha' \cos^2 n}{2\sin n}$, und die entsprechende Neigung ξ der reflektirenden Fläche gegen den Hauptschnitt $\mu\nu$ ist bestimmt durch $tang\,\xi = \sin n$.

Ist $tg^2\alpha' = \frac{4\,tg^2 n}{\cos^2 n}$, so ist das Maximum von $\cos E'$, -1 und gleichfalls dafür $tg\xi = \sin n$.

Ist aber $tg^2\alpha' > \frac{4\,tg^2 n}{\cos^2 n}$, so werden für den gröfsten Werth von $\cos E'$, d. h. für $\cos E' = -1$, die entsprechenden Lagen der reflektirenden Ebenen bestimmt durch

$$tg\xi = \tfrac{1}{2} tg\,\alpha' \cos^2 n - \tfrac{1}{2}\sqrt{tg^2\alpha' \cos^4 n - 4\sin^2 n},$$
$$tg\xi'' = \tfrac{1}{2} tg\,\alpha' \cos^2 n + \tfrac{1}{2}\sqrt{tg^2\alpha' \cos^4 n - 4\sin^2 n}.$$

Das zweite Paar Azimuthe ohne Ablenkung existirt also nur stets auf den Flächen, für welche ξ zwischen 0^0 und ξ', und zwischen ξ'' und 90^0 liegt.

Da der Polarisationswinkel, also auch α' wenig variirt, so lassen sich sogleich aus der Gröfse des Neigunngswinkels $2n$ der optischen Axen und einem der Polarisationswinkel die Flächen ziemlich genau bestimmen, in denen 2 oder 4 Azimuthe ohne Ablenkung vorhanden sind.

Die analogen Resultate für den Fall, dafs die Krystallfläche der Axe π parallel ist, erhält man aus dem vorigen, indem man $90 - n$ statt n setzt.

Was den dritten Fall betrifft, in welchem die reflektirende Fläche auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht, so hat man, wenn man den Winkel zwischen dem Einfallsloth und der Axe π mit ξ bezeichnet, $U = n + \xi$ und $U' = \xi - n$ für den Fall in (37), und $U = n + \xi$ und $U' = n - \xi$ für den Fall in (38). Der Ausdruck für $\cos E'$ in (37) und der für $\sin E'$ in (38) erhalten daher genau dieselbe Form, und beide lassen sich folglich zusammenfassen, wenn man in (38) ebenso, wie es in (37) der Fall ist, den Winkel E' von der Ebene der optischen Axen an zählt, also darin $E' - 90^0$ statt E' setzt, nämlich in

$$\cos E' = -\frac{\sin\xi \cos\xi}{\sin^2\xi - \sin^2 n}\, tg\,\alpha'.$$

Es ist daher

$$tg\,\xi = \sqrt{\frac{tg^2\alpha'}{4\cos^4 n \cos^2 E'} + tg^2 n} - \frac{tang\,\alpha'}{2\cos^2 n \cos E'}.$$

Wird $\cos^2 E' = 1$, so wird $\sin E' = 0$; das zweite Paar Einfalls-Ebenen ohne Ablenkung fällt daher mit dem ersten zusammen, und die entsprechenden Werthe von ξ sind dann

$$tg\,\xi' = -\frac{tg\,\alpha'}{2\cos^2 n} + \sqrt{\frac{tg^2\alpha'}{4\cos^4 n} + tg^2 n},$$

$$tg\,\xi'' = \frac{tg\,\alpha'}{2\cos^2 n} + \sqrt{\frac{tg^2\alpha'}{4\cos^4 n} + tg^2 n}.$$

Den zwischen ξ' und ξ'' liegenden Werthen von ξ entsprechen nur imaginäre Werthe von $\cos E'$; also existirt das 2te Paar Azimuthe nur auf den Flächen zwischen 0^0 und ξ' und zwischen ξ'' und 90^0.

Für den Fall, dafs die reflektirende Fläche genau auf der optischen Axe senkrecht steht, liefert die Gleichung (XI, a) wegen $U = 2n$, $U' = \Phi' = 0$,

$$tg\,\omega = \frac{k_1 \sin^2\alpha \sin 2n \sin E'}{2\cos\alpha' \sin(\alpha - \alpha')}.$$

Die Polarisations-Ebene wird daher hier nur dann nicht abgelenkt, wenn das Licht im Hauptschnitt einfällt.

Reflexion des polarisirten Lichtes.

Ist das einfallende Licht polarisirt, so ist es auch das reflektirte, aber im Allgemeinen nach einer anderen Ebene. Bezeichnet man die Drehung der Polarisations-Ebene für senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt einfallendes Licht mit φ_p', für derselben parallel polarisirt einfallendes Licht mit φ_s'; ferner für Licht, welches nach der Reflexion senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist, mit φ_p, und für Licht, welches nach der Reflexion dieser Ebene parallel polarisirt ist, mit φ_s, so findet man wie bei einaxigen Krystallen:

$$tg\,\varphi_s' = \frac{R_p}{R_s} = \frac{s'}{s}, \quad tg\,\varphi_p' = \frac{R_s}{R_p} = \frac{p'}{p},$$

$$tg\,\varphi_s = \frac{P}{S} = -\frac{s'}{p}, \quad tg\,\varphi_p = \frac{S}{P} = -\frac{p'}{s},$$

also
$$tg\,\varphi_p'\,tg\,\varphi_s' = tg\,\varphi_p\,tg\,\varphi_s.$$

Ist ferner das Azimuth der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls φ, und das des reflektirten φ_1, so hat man

$$tg\,\varphi_1 = \frac{p\,tg\,\varphi + s'}{p'\,tg\,\varphi + s} = \frac{\frac{p}{s}\,tg\,\varphi + tg\,\varphi_s'}{1 - tg\,\varphi_p\,tg\,\varphi}.$$

Durch dasselbe Raisonnement, wie es bei den einaxigen Krystallen geführt ist, kommt man auf das Theorem, dafs bei einem gewissen Azimuth der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls unter dem Polarisationswinkel gar kein Licht reflektirt wird.

Die Bedingung, dafs keine Drehung der Polarisations-Ebene des reflektirten Lichtes stattfindet, für nach der Einfalls-Ebene polarisirt einfallendes Licht ist: $s' = 0$, für senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt einfallendes Licht dagegen: $p' = 0$.

Nimmt man die Werthe von s' und p' aus (19), so werden diese Bedingungen:

$$\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''(\tau'-\tau'') - \sin\varepsilon''\sin^2\alpha'\,tg\,q' + \sin\varepsilon'\sin^2\alpha''\,tg\,q'' = 0,$$

und $\sin 2\varepsilon' = 0$, oder wenn man die höheren Pot[...] von $\sin(\alpha' - \alpha'')$ vernachlässigt, und für ε', φ', κ, κ' [...] Werthe aus (10—13) setzt,

$$39)\quad Z \sin\alpha' + Y \cos\alpha' = 0$$

$$40)\quad Z \sin\alpha' - Y \cos\alpha' = 0.$$

Diese Gleichungen stellen Kegelflächen dritter Ord[...] vor, deren Axe das Einfallsloth ist, und deren Seiten [...] den Normalen derjenigen gewöhnlich gebrochenen We[...] Ebenen gebildet werden, deren Einfallsstrahlen nach [...] Reflexion ihre Polarisations-Ebene nicht ändern. Be[...] Kegelflächen sind von derselben Form, aber so gele[...] dafs sich die entsprechenden α' zu 180^0 ergänzen.

Betrachten wir daher blofs den Kegel $tg\,\alpha' = \frac{Y}{Z}$.

Für $\sin E' = 0$ und $\cos E' = 0$ verschwindet Y, [...] mithin auch $tg\,\alpha'$; es gehen daher zwei Zweige des Ke[...] durch das Einfallsloth.

Für $E' = \Phi'$ wird $Z = \sin 2E' \sin U \cos U'$, also [...] $= tg\,U'$; für $E' = -\Phi'$ wird $tg\,\alpha' = tg\,U$; folglich [...] die Kegelfläche durch beide optische Axen. Ferner gi[...] es stets eine Einfalls-Ebene, für welche $Z = 0$, also $\alpha' =$ 90^0 wird, nämlich, wenn $tg\,E' = -\frac{\sin(U - U')}{\sin(U + U')} tg\,\Phi'$ wird.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos E' \cos \Phi'$, [...] erhält man $tg\,U' \sin(\Phi' + E') = tg\,U \sin(\Phi' - E')$, wen[...] man $-E'$ statt E' setzt, da E' immer negativ ist.

Um die Richtung zu construiren, welche die de[...] Werthe von $\alpha' = 90^0$ entsprechende Seite der Kegelfläch[...] einnimmt, lege man in Fig. 44, in welcher CL das Ei[...] fallsloth und CA, CA' die optischen Axen bedeuten, [...] die Kugelfläche LAK durch L eine Tangential-Ebene (d[...] reflektirende Krystallfläche) und verzeichne in derselb[...] eine Linie LN' so, dafs $\sin ALN' : \sin A'LN' = tg\,U' : tg$[...] wird. Alsdann ist CLN' die Einfalls-Ebene, welche de[...] Werthe $\alpha' = 90$ entspricht, so dafs LN' der zugehörige Kegelseite parallel ist.

Ist ferner (Fig. 47.) CL das Einfallsloth, und sind C[...]

ıd CA' die optischen Axen, und LCN eine auf CAA' ınkrechte Ebene, so ist CN eine fünfte Seite der Kegelıche.

Es ist noch interessant, die Form dieser Kegelfläche untersuchen, wenn die reflektirende Krystallfläche einer lasticitätsaxe parallel ist.

1) Ist sie der Axe μ parallel, also $U - U' = 0$, so ird die Gleichung der Kegelfläche:

$$\sin E' \sin U(\cos U \cos \Phi' \sin \alpha' - \sin U \cos E' \cos \alpha') = 0.$$

e besteht also aus einer Ebene ($\sin E' = 0$), welche auf r Axe μ senkrecht steht, und aus einer Kegelfläche der reiten Ordnung, deren Gleichung $tg\,\alpha' = tg\,U \frac{\cos E'}{\cos \Phi'}$ ist. enkt man sich in der reflektirenden Fläche, deren Norıle CL (Fig. 48.) sei, einen Kreis $LARA'$, welcher durch e Durchschnittspunkte dieser Fläche mit dem Einfallsloth L, und den beiden optischen Axen CA und CA' geht, ıd denkt den Winkel ALA' durch die Linie LR halbirt, ist $\angle LCA = U$, $LCA' = U'$ und $ALR = \Phi'$. Denkt an sich ferner unter CV die Normale einer gebrochenen Vell-Ebene, so ist $\angle LCV = \alpha'$, $\angle VLR = E'$, und man ıt $\cos E' = tg\,\alpha' \frac{CL}{RL}$ und $\cos \Phi' = tg\,U \frac{CL}{RL}$, also $tg\,\alpha' = U \frac{\cos E'}{\cos \Phi'}$. Mithin ist der Kreis $LARA'$ die Basis und der Scheitel des in Rede stehenden Kegels.

Fällt dabei das Einfallsloth in die Axe π, so wird $\Phi' = 0$, und die Kegelfläche reducirt sich auf eine Ebene $E' = 0$), welche auf der Axe π senkrecht steht.

2) Ist die reflektirende Fläche der Axe π parallel, so $U + U' = 180^0$, so wird die Gleichung der Kegelıche:

$$\cos E' (\cos U \sin \Phi' \sin \alpha' - \sin U \sin E' \cos \alpha') = 0;$$

besteht daher wiederum aus einer auf π senkrechten bene ($\cos E' = 0$), und aus einer Kegelfläche zweiter rdnung $\left(tg\,\alpha' = tg\,U \frac{\sin E'}{\sin \Phi'}\right)$, welche gleichfalls die re-

flektirende Ebene in einem Kreise schneidet, welcher durch deren Durchschnittspunkte mit dem Einfallsloth und den optischen Axen geht. Fällt dabei das Einfallsloth in die Axe μ, so wird die Gleichung der Kegelfläche $\sin E = 0$, also eine auf der ersten senkrechte Ebene.

3) Ist endlich die reflektirende Ebene der Axe ν parallel, so ist für $\Phi' = 0$ die Gleichung der Kegelfläche:

$$\sin E (\sin(U + U') \operatorname{tg} \alpha' - 2 \sin U \sin U' \cos E) = 0,$$

bestehend aus der Ebene der optischen Axen ($\sin E = 0$) und einer Kegelfläche der zweiten Ordnung, welche die reflektirende Ebene in einem Kreise schneidet. Ist nämlich Fig. 49. LVL' ein in der reflektirenden Ebene liegender Kreis, CL das Einfallsloth; sind ferner CU' und CU die optischen Axen; und ist der Durchmesser so gewählt, dafs $\sin UCL' : \sin U'CL' = \sin UCL : \sin U'CL$ ist; stellt endlich CV die Richtung der Normale einer gebrochenen Well-Ebene vor (so dafs $VCL = \alpha'$ und $VLU = E$ wird), und bezeichnet man den Winkel LCL' durch A: so ist $\cos E = \frac{VL}{LL'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} A}$. Die Gleichung, welche die Lage von L' bestimmt, ist aber

$$\sin(U - A) : \sin(A - U') = \sin U : \sin U',$$

folglich hat man $\operatorname{tg} A = \frac{2 \sin U \sin U'}{(\sin U + U')}$, und daher

$$\operatorname{tg} \alpha' \sin(U + U') = 2 \sin U \sin U' \cos E,$$

welches die obige Kegelfläche ist. Der Kreis LNL' ist mithin der Durchschnitt dieser Fläche.

Ebenso zerfällt die Kegelfläche dritter Ordnung für $\Phi' = 90$ in eine Ebene, in welcher die optischen Axen liegen, und in einen Kegel zweiter Ordnung, welcher die Krystallfläche in einem Kreise schneidet.

Intensität der gebrochenen Strahlen.

1) Wenn das einfallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist, so ergiebt sich aus (IV., V.) als Verhältnifs der Oscillations-Geschwindigkeiten der beiden gebrochenen Strahlen:

$$R' : R'' = \cos\varepsilon'' \sin(\alpha + \alpha'') : \cos\varepsilon' \sin(\alpha + \alpha').$$

Der gewöhnliche Strahl verschwindet daher, wenn $\cos\varepsilon'' = 0$ ist, und der ungewöhnliche, wenn $\cos\varepsilon' = 0$ ist. In sofern für $\alpha' = \alpha''$, $\cos\varepsilon'' = -\sin\varepsilon'$ wird, ist das Verschwinden des einen oder des andern Strahls durch die Bedingung $\sin 2\varepsilon' = 0$ ausgesprochen; die Richtungen der verschwindenden Strahlen bilden daher die oben betrachtete Kegelfläche $Z \sin\alpha' - Y \cos\alpha' = 0$.

Man denke sich (Fig. 41.) von C ausgehend das Einfallsloth CL und die beiden optischen Axen CA und CA', und um diesen Punkt C eine Kugel beschrieben, in deren Oberfläche die Punkte A, A', L liegen; ferner durch L einen gröfsten Kreis PQ so, dafs $\sin ALP : \sin A'LP = tg A'L : tg AL = tg\, U' : tg\, U$ wird. Die Kegelfläche $tg\,\alpha' = \frac{Y}{Z}$, deren Durchschnitt mit der Kegelfläche ungefähr die Form $PALA'LQ$ hat, schneidet diesen Kreis in zwei Punkten P und Q, welche dem Obigen zufolge 90^0 von L entfernt liegen. Alle Punkte der Durchschnittscurve zwischen A und A' sind diejenigen Punkte, nach welchen von C aus die Normalen derjenigen gewöhnlich gebrochenen Well-Ebenen hingehen, für welche die ungewöhnlichen Strahlen verschwinden, wenn das auffallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist. Ist N' ein solcher Punkt, also CN' die Normale einer gewöhnlich gebrochenen Well-Ebene, so liegt die Curve so, dafs $\angle LN'n' = \varepsilon' = 90^0$ ist, wo $N'n'$ die den Winkel $AN'A'$ halbirende Schwingungsrichtung bedeutet. Die Zweige AP und $A'Q$ sind die Zweige der Kegelfläche, deren Punkte mit C verbunden, die Richtungen der Normalen derjenigen ungewöhnlichen

Well-Ebenen sind, für welche die gewöhnlichen Strahlen verschwinden, wenn das auffallende Licht senkrecht gegen die Einfalls-Ebene polarisirt ist. Es ist nämlich alsdann die Schwingungsrichtung senkrecht auf der Ebene $LN''C$, also $\cos\varepsilon'' = 0$.

Ist $U - U' = 0$, d. h. die brechende Fläche der Axe μ parallel, so gehören von den Punkten des Kreisdurchschnittes $LARA'$ der Kegelfläche (Fig. 48.) die Punkte des Bogens ALA' (für welche $\alpha' < U$ und $\cos\varepsilon' = 0$ ist) den Normalen der ungewöhnlichen Well-Ebenen an, welchen keine gewöhnliche Strahlen entsprechen; die Punkte des Bogens ARA' (für welche $\alpha' > U$ und $\sin\varepsilon' = 0$ ist), so wie die Punkte des Hauptschnittes den Normalen der gewöhnlichen Well-Ebenen an, welchen keine ungewöhnliche Strahlen entsprechen. Umgekehrt verhält es sich mit den der Axe π parallelen brechenden Flächen.

Ist die brechende Fläche der Axe ν parallel, so gehören die dem elliptischen Kegel angehörigen Normalen den allein bleibenden gewöhnlichen Well-Ebenen, und die in der Ebene der optischen Axen liegenden den allein bleibenden ungewöhnlichen Well-Ebenen an, sobald das Einfallsloth im spitzen Winkel der optischen Axen liegt. Das Umgekehrte findet statt, wenn dasselbe im stumpfen Winkel derselben liegt.

2) Wenn das einfallende Licht nach der Einfalls-Ebene polarisirt ist, so liefern die Gleichungen (IV, V.) als Verhältnifs der Vibrations-Intensitäten:

$$R' : R'' = \sin\varepsilon''(\tau + \tau'') - \sin^2\alpha'' \, tg\, q'' : \sin\varepsilon'(\tau + \tau') - \sin^2\alpha' \, tg\, q'.$$

Der gewöhnliche Strahl verschwindet daher, wenn

$$\sin\varepsilon'' = \frac{\sin^2\alpha'' \, tg\, q''}{\tau + \tau''} = \frac{k_1 \sin^2\alpha \sin(w + w') \sin\varphi''}{\tau + \tau''}$$

wird, und der ungewöhnliche, wenn

$$\sin\varepsilon' = \frac{\sin^2\alpha' \, tg\, q'}{\tau + \tau'} = \frac{k_1 \sin^2\alpha \sin(u - u') \sin\varphi'}{\tau + \tau'}.$$

Multiplicirt man jene Gleichung mit $2\cos\varepsilon''$, diese mit $2\cos\varepsilon'$, so erhält man statt derselben:

$$41)\begin{cases} \sin 2\varepsilon'' = \dfrac{k_1 \sin^2\alpha \cos\varepsilon'' \sin(w+w') \sin\varphi''}{2(\tau+\tau'')} & \text{und} \\ \sin 2\varepsilon' = \dfrac{k_1 \sin^2\alpha \cos\varepsilon' \sin(u-u') \sin\varphi}{2(\tau+\tau')}. \end{cases}$$

'egen der Kleinheit der Differenz k_1 läfst sich die Glei-
ung $$\sin 2\varepsilon'' = \sin 2\varepsilon' = 0$$
; erste Näherung betrachten.

Dies ist aber die Gleichung der oben betrachteten Ke-
lfläche, deren Seiten daher auch die Normalen derjenigen
brochenen gewöhnlichen und ungewöhnlichen Well-Ebe-
:n enthalten, deren zugehörige ungewöhnliche und gewöhn-
:he Strahlen nahe verschwinden; nur sind es die Seiten
:r Kegelfläche, welche im vorigen Fall den gewöhnlichen
Vell-Ebenen angehörten, hier die den ungewöhnlichen zu-
:hörigen, und umgekehrt. Genähertere Werthe von ε' und
, in denen noch die erste Potenz von k_1 berücksichtigt
t, erhält man aus (41), wenn man auf den rechten Sei-
n die der Kegelfläche $\sin 2\varepsilon' = 0$ entnommenen Werthe
ıbstituirt.

3) Wenn das einfallende Licht nach einem beliebigen
zimuth φ polarisirt ist, so dafs man $\frac{P}{S} = tang\,\varphi$ hat, so
hält man die Azimuthe $\varphi_{,}$, für welche der ungewöhnliche
rahl verschwindet aus (V.)

$$tang\,\varphi_{,} = -tang\,\varepsilon' \cos(\alpha-\alpha') + \frac{\sin^2\alpha'\, tg\, q')}{\cos\varepsilon' \sin(\alpha+\alpha')}$$

d die Azimuthe $\varphi_{,,}$, für welche der gewöhnliche ver-
ıwindet, aus (IV.)

$$tang\,\varphi_{,,} = tg\,\varepsilon'' \cos(\alpha-\alpha') - \frac{\sin^2\alpha''\, tg\, q''}{\cos\varepsilon'' \sin(\alpha+\alpha'')}.$$

Reflexion und Refraction beim Uebergange des Lichtes aus zweiaxigen Krystallen in ein einfachbrechendes Mittel.

Man bezeichne die Winkel, welche die Normalen der Well-Ebenen mit dem Einfallsloth bilden, mit einem gezeichneten α dergestalt, dafs α', α_1', α_2', α_3' beziehlich zur einfallenden, gewöhnlich reflektirten, ungewöhnlich reflektirten und gebrochenen Welle gehören, wenn der einfallende Strahl ein gewöhnlicher ist; dagegen α'', α_1'', α_2'', α_3''', wenn der einfallende Strahl ein ungewöhnlicher ist. Ferner mögen α_0'' und α_0' den ungewöhnlichen und den gewöhnlichen Wellensystemen angehören, welche sich bilden würden, wenn die zu α_3' und α_3'' gehörenden Strahlen rückwärts in den Krystall zurückträten. Ueberdies seien o, o_1, o_2, e, e_1, e_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beziehlich zu α', α_1', α_1'', α'', α_2', α_2'' gehörenden Wellensysteme, und u, u'; u_1, u_1'; u_2, u_2'; w, w'; w_1, w_1'; w_2, w_2' die Winkel zwischen den Normalen ebendieser Wellen-Ebenen mit den optischen Axen.

Die Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Einfalls-, Reflexions- und Brechungswinkel von einander ausdrücken, sind alsdann:

$$\text{XIII.}\left\{\begin{array}{ll}
1) & \sin^2\alpha' = o^2 \sin\alpha_3' = [k - k_1 \cos(u - u')] \sin^2\alpha_3' \\
2) & \sin^2\alpha_1' = o_1^2 \sin^2\alpha_3' = [k - k_1 \cos(u_1 + u_1')] \sin^2\alpha_3' \\
3) & \sin^2\alpha_2' = e_1^2 \sin^2\alpha_3' = [k - k_1 \cos(w_1 + w_1')] \sin^2\alpha_3' \\
4) & \sin^2\alpha'' = e^2 \sin^2\alpha_3'' = [k - k_1 \cos(w + w')] \sin^2\alpha_3'' \\
5) & \sin^2\alpha_1'' = o_2^2 \sin^2\alpha_3'' = [k - k_1 \cos(u_2 - u_2')] \sin^2\alpha_3'' \\
6) & \sin^2\alpha_2'' = e_2^2 \sin^2\alpha_3'' = [k - k_1 \cos(w_2 + w_2')] \sin^2\alpha_3''.
\end{array}\right.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die Brechungswinkel und Reflexionswinkel in U, U', E' (in dem früher gebrauchten Sinne genommen), und α ausdrücken.

Bezeichnet man nämlich die Azimuthe der Schwingungsrichtungen (in Bezug auf die Einfalls-Ebene) durch ein mit dem zugehörigen α gleichgezeichnetes ε; und durch ein ebenso gezeichnetes φ die halben Winkel zwischen den Ebenen,

:lche durch die optischen Axen und die Normale der be-
:ffenden Well-Ebene gehen — so hat man die Gleichun-
n (10—16) zur Elimination der verschiedenen u und w,
:nn man noch bemerkt, daſs man aus (15) die Systeme
r Gleichungen zur Elimination von u_2 und u_2' erhält, wenn
ınn ε_1', φ_1', α_1' durch ε_1'', φ_1'', α_1'' ersetzt, und die Glei-
ungen zur Elimination von w_1, w_1', wenn man in (16)
, φ_2'', α_2'' durch ε_2', φ_2', α_2' ersetzt.

Vollzieht man die Elimination, so werden die Glei-
ungen (XIII, 1, 2, 3), so wie die Gleichungen (XIII,
5, 6) in der Art vollkommen einander gleich, daſs sie
:h nur durch die Zeichnung des α unterscheiden. Sie
:rden überdies vom vierten Grade, so daſs α', α_1', α_2'
ei der Wurzeln der ersten Gleichung, und α'', α_1'', α_2''
ei der Wurzeln der zweiten Gleichung sind. Es ist nicht
hwer, sich zu überzeugen, daſs die 4ten Wurzeln be-
:hlich α_0' und α_0'' sind.

Will man aus den Gleichungen (XIII.) die Brechungs-
ıd Reflexionswinkel bestimmen, so kann man, da die all-
meine Lösung von einer Gleichung des 4ten Grades ab-
ıngt, folgendes Näherungsverfahren anwenden.

Da U, U', E', α' (oder α'') gegeben sind, so findet
an aus (XIII, 1 oder 4) und (10, 11, 12, 15) genau α_3'
der α_3''). Da ferner α' nahe gleich α_1' und α_2' (oder α''
ıhe gleich α_1'' und α_2'') ist, so erhält man einen genäher-
n Werth der Reflexionswinkel (in welchem der Fehler
oportional k_1 ist), wenn man in (15, 16) $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha'$
ıd $\alpha_1'' = \alpha_2'' = \alpha''$ und für α_3', α_3'' die ebengefundenen
Werthe setzt, und so die u und w bestimmt. Diese so
:stimmten Näherungswerthe für die u und w substituirt
an in (XIII, 2, 3 und XIII, 5, 6), leitet daraus die nä-
:ren Werthe für α_1', α_2', α_1'', α_2'' ab, und geht damit
ıch einmal in die Gleichungen (15 und 16), erhält für
e u und w daraus nähere Werthe, mittelst deren man
s (XIII.) für die Reflexionswinkel Werthe findet, in de-
:n der Fehler mit k_1^2 von derselben Ordnung ist, etc.

Das Princip der Gleichheit der Bewegung an der

Grenze beider Mittel liefert 6 Gleichungen zwischen den Vibrations-Intensitäten der 8 Wellensysteme.

Bezeichnet man diese Intensitäten für die im Kystall befindlichen Wellensysteme durch ein dem zugehörigen α gleichgezeichnetes R; die nach der Einfalls-Ebene und senkrecht darauf zerlegten Bewegungen in dem zu α_3' gehörigen System durch S' und P'; und in dem zu α_3'' gehörigen System durch S'', P'' — so erhält man für die senkrecht gegen die Einfalls-Ebene gerichteten Componenten der Bewegungen:

$$P', \quad P'', \quad R' \sin\varepsilon', \quad R'' \sin\varepsilon'', \quad R_1' \sin\varepsilon_1', \quad R_2' \sin\varepsilon_2', \quad R_1'' \sin\varepsilon_1'', \quad R_2'' \sin\varepsilon_2'';$$

für die dem Einfallsloth parallelen Componenten:

$$-S' \sin\alpha_3', \quad -S'' \sin\alpha_3'', \quad R' \cos\varepsilon' \sin\alpha', \quad -R'' \cos\varepsilon'' \sin\alpha'', \quad -R_1' \cos\varepsilon_1' \sin\alpha_1', \quad R_2' \cos\varepsilon_2' \sin\alpha_2', \quad -R_1'' \cos\varepsilon_1'' \sin\alpha_1'', \quad R_2'' \cos\varepsilon_2'' \sin\alpha_2'',$$

und für die auf den vorigen beiden senkrechten Componenten:

$$-S' \cos\alpha_3', \quad -S'' \cos\alpha_3'', \quad R' \cos\varepsilon' \cos\alpha', \quad -R'' \cos\varepsilon'' \cos\alpha'', \quad R_1' \cos\varepsilon_1' \cos\alpha_1', \quad -R_2' \cos\varepsilon_2' \cos\alpha_2', \quad R_1'' \cos\varepsilon_1'' \cos\alpha_1'', \quad -R_2'' \cos\varepsilon_2'' \cos\alpha_2''.$$

Dem erwähnten Princip zufolge hat man daher

$$\text{XIV.} \quad \begin{cases} P' = R' \sin\varepsilon' + R_1' \sin\varepsilon_1' + R_2' \sin\varepsilon_2' \\ -S' \sin\alpha_3' = R' \cos\varepsilon' \sin\alpha' - R_1' \cos\varepsilon_1' \sin\alpha_1' \\ \qquad\qquad + R_2' \cos\varepsilon_2' \sin\alpha_2' \\ -S' \cos\alpha_3' = R' \cos\varepsilon' \cos\alpha' + R_1' \cos\varepsilon_1' \cos\alpha_1' \\ \qquad\qquad - R_2' \cos\varepsilon_2' \cos\alpha_2'. \end{cases}$$

und

$$\text{XV.} \quad \begin{cases} P'' = R'' \sin\varepsilon'' + R_1'' \sin\varepsilon_1'' + R_2'' \sin\varepsilon_2'' \\ -S'' \sin\alpha_3'' = -R'' \cos\varepsilon'' \sin\alpha'' \\ \qquad\qquad - R_1'' \cos\varepsilon_1'' \sin\alpha_1'' + R_2'' \cos\varepsilon_2'' \sin\alpha_2'' \\ -S'' \cos\alpha_3'' = -R'' \cos\varepsilon'' \cos\alpha'' \\ \qquad\qquad + R_1'' \cos\varepsilon_1'' \cos\alpha_1'' - R_2'' \cos\varepsilon_2'' \cos\alpha_2''. \end{cases}$$

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte liefert 2 Gleichungen:

Bezeichnet man die correspondirenden Massen in den verschiedenen Systemen mit einem gehörig gezeichneten M,

ie Winkel zwischen den Strahlen und ihren Normalen
it einem ebenso gezeichneten r, und das Produkt $\sin\alpha \times$
$\cos\alpha$ mit τ, so ergiebt sich

$$M' = \frac{l}{\sin\alpha_3'}[\tau' - \sin^2\alpha' \sin\varepsilon' \, tg\, r']$$

$$M_1' = \frac{l}{\sin\alpha_3'}[\tau_1' + \sin^2\alpha_1' \sin\varepsilon_1' \, tg\, r_1']$$

$$M_2' = \frac{l}{\sin\alpha_3'}[\tau_2' + \sin^2\alpha_2' \sin\varepsilon_2' \, tg\, r_2']$$

$$M_3' = l\cos\alpha_3'$$

$$M'' = \frac{l}{\sin\alpha_3''}[\tau'' - \sin^2\alpha'' \sin\varepsilon'' \, tg\, r'']$$

$$M_1'' = \frac{l}{\sin\alpha_3''}[\tau_1'' + \sin^2\alpha_1'' \sin\varepsilon_1'' \, tg\, r_1'']$$

$$M_2'' = \frac{l}{\sin\alpha_3''}[\tau_2'' + \sin^2\alpha_2'' \sin\varepsilon_2'' \, tg\, r_2'']$$

$$M_3'' = l\cos\alpha_3''.$$

Dem Princip zufolge hat man daher

$$R'^2 M' = R_1'^2 M_1' + R_2'^2 M_2' + (P'^2 + S'^2) M_3' \quad \text{und}$$

$$R''^2 M''^2 = R_1''^2 M_1'' + R_2''^2 M_2'' + (P''^2 + S''^2) M_3'', \quad \text{oder}$$

$$42)\quad (P'^2 + S'^2)\tau_3' = R'^2(\tau' - \sin^2\alpha' \sin\varepsilon' \, tg\, r') - R_1'^2(\tau_1' + \sin^2\alpha_1' \sin\varepsilon_1' \, tg\, r_1') - R_2'^2(\tau_2' + \sin^2\alpha_2' \sin\varepsilon_2' \, tg\, r_2')$$

$$43)\quad (P''^2 + S''^2)\tau_3'' = R''^2(\tau'' - \sin^2\alpha'' \sin\varepsilon'' \, tg\, r'') - R_1''^2(\tau_1'' + \sin^2\alpha_1'' \sin\varepsilon_1'' \, tg\, r_1'') - R_2''^2(\tau_2'' + \sin^2\alpha_2'' \sin\varepsilon_2'' \, tg\, r_2'').$$

Durch das schon öfter angewendete Verfahren lassen
ich diese beiden Gleichungen in Gleichungen des ersten
rades verwandeln. Subtrahirt man nämlich das Produkt
er 2ten und 3ten Gleichung aus (XIV.) von (42), so er-
ält man:

$$P'^2\tau_3' = R'^2(\tau' \sin^2\varepsilon' - \sin^2\alpha' \sin\varepsilon' \, tg\, r') - R_1'^2(\tau_1' \sin^2\varepsilon_1' + \sin^2\alpha_1' \sin\varepsilon_1' \, tg\, r_1') - R_2'^2(\tau_2' \sin^2\varepsilon_2' + \sin^2\alpha_2' \sin\varepsilon_2' \, tg\, r_2') - R' R_1' \cos\varepsilon' \cos\varepsilon_1' \sin(\alpha' - \alpha_1') + R' R_2' \cos\varepsilon' \cos\varepsilon_2' \sin(\alpha' - \alpha_2') - R_1' R_2' \cos\varepsilon_1' \cos\varepsilon_2' \sin(\alpha_1' + \alpha_2'),$$

welches, durch die erste der Gleichungen (XIV.) dividirt, giebt:

$$\text{XVI.}\quad P\tau_3' = R'(\tau' \sin\varepsilon' - \sin^2\alpha' \operatorname{tg} r') - R_1'(\tau_1' \sin\varepsilon_1' + \sin^2\alpha_1' \operatorname{tg} r_1') - R_2'(\tau_2' \sin\varepsilon_2' + \sin^2\alpha_2' \operatorname{tg} r_2')\ ^{*)}.$$

Zur Reduction der Formel (43) subtrahirt man von derselben das Produkt der beiden letzten der Gleichungen (XV.), wodurch man erhält:

---

*) Der Beweis der Richtigkeit dieser Division ist dem oben (p. 299) gegebenen ähnlich. Man findet nämlich, daſs das Produkt der Gleichungen (XVI und XIV., 1) mit dem Ausdruck für $P'^2\tau_3$ identisch ist, sobald folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(\odot)\left\{\begin{aligned}
&\sin(\alpha'-\alpha_1')[\sin\varepsilon'\sin\varepsilon_1'\cos(\alpha'+\alpha_1')+\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_1']\\
&\qquad = \sin^2\alpha_1'\operatorname{tg} r_1'\sin\varepsilon'+\sin^2\alpha'\operatorname{tg} r'\sin\varepsilon_1\\
&\sin(\alpha'-\alpha_2')[\sin\varepsilon'\sin\varepsilon_2'\cos(\alpha'+\alpha_2')-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_2']\\
&\qquad = \sin^2\alpha_2'\operatorname{tg} r_2'\sin\varepsilon'+\sin^2\alpha'\operatorname{tg} r'\sin\varepsilon_2'\\
&-\sin(\alpha_1'+\alpha_2')[\sin\varepsilon_1'\sin\varepsilon_2'\cos(\alpha_1'-\alpha_2')-\cos\varepsilon_1'\cos\varepsilon_2']\\
&\qquad = \sin^2\alpha_1'\operatorname{tg} r_1'\sin\varepsilon_2'+\sin^2\alpha_2'\operatorname{tg} r_2'\sin\varepsilon_1'.
\end{aligned}\right.$$

Genau so, wie p. 299 die Gleichung ($☽$) in die Gleichung (A) umgewandelt wurde, lassen sich die vorstehenden Gleichungen reduciren auf folgende:

$$(B)\quad H_1 = -\left(\frac{\sin\varphi_1'\sin\varepsilon'\sin(u_1-u_1')+\sin\varphi'\sin\varepsilon_1'\sin(u-u')}{\cos(u-u')-\cos(u_1-u_1')}\right)\sin(\alpha'+\alpha_1')$$

$$(C)\quad H_2 = -\left(\frac{\cos\varphi_2'\sin\varepsilon'\sin(w_1+w_1')+\sin\varphi'\sin\varepsilon_2'\sin(u-u')}{\cos(u-u')-\cos(w_1+w_1')}\right)\sin(\alpha'+\alpha_2')$$

$$(D)\quad H_3 = \left(\frac{\sin\varphi_1'\sin\varepsilon_2'\sin(u_1-u_1')+\cos\varphi_2'\sin\varepsilon_1'\sin(w_1+w_1')}{\cos(u_1-u_1')-\cos(w_1+w_1')}\right)\sin(\alpha_1'-\alpha_2'),$$

wo

$$\cos(\alpha'+\alpha_1')\sin\varepsilon'\sin\varepsilon_1'+\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_1' = H_1,$$
$$\cos(\alpha'+\alpha_2')\sin\varepsilon'\sin\varepsilon_2'-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_2' = H_2,$$
$$\cos(\alpha_1'-\alpha_2')\sin\varepsilon_1'\sin\varepsilon_2'-\cos\varepsilon_1'\cos\varepsilon_2' = H_3$$

gesetzt ist. Die Gleichung (C) ist identisch, da sie aus der Gleichung (A) entsteht, wenn man in der letzteren $-\alpha_2'$, φ_2', w_1, w_1', ε_2' für α'', φ'', w, w', ε'' setzt, welche Substitutionen gerade nöthig sind, wenn man die Gleichung (A) statt auf die Systeme R' und R'' auf die Systeme R' und R_2' beziehen will. Ebenso geht dieselbe Gleichung (A) in die Gleichung (D) über, wenn man die nöthigen Substitutionen macht, um sie auf die Systeme R_1' und R_2' anzuwenden. Die Gleichung (B) endlich läſst sich auf demselben Wege verificiren, wie die Gleichung (A), wenn man nur dort die Gleichungen (a und c) statt mit $\sin\varepsilon''$, mit $\cos\varepsilon''$ multiplicirt, und nachher, um statt des Systems R'', das System R_1' einzuführen, ω, ω', φ'', α'', ε'' durch u_1, u_1', φ_1', $-\alpha_1'$, $270^0 - E_1'$ ersetzt (letzteres insofern $\varepsilon_1'+\varepsilon_2' = 270^0$ ist). Vergl. Neumann Ueber den Einfluſs der Krystallflächen bei der Reflexion des Lichtes p. 152.

$$\begin{aligned}P''^2\tau_3'' = R''^2(\tau''\sin^2\varepsilon'' - \sin^2\alpha''\sin\varepsilon''\,tg\,r'')\\ - R_1''^2(\tau_1''\sin^2\varepsilon_1'' + \sin^2\alpha_1''\sin\varepsilon_1''\,tg\,r_1'')\\ - R_2''^2(\tau_2''\sin^2\varepsilon_2'' + \sin^2\alpha_2''\sin\varepsilon_2''\,tg\,r_2'')\\ + R''R_1''\sin(\alpha''-\alpha_1'')\cos\varepsilon''\cos\varepsilon_1''\\ - R''R_2''\sin(\alpha''-\alpha_2'')\cos\varepsilon''\cos\varepsilon_2''\\ - R_1''R_2''\sin(\alpha_1''+\alpha_2'')\cos\varepsilon_1''\cos\varepsilon_2'';\end{aligned}$$

und dividirt durch die erste Gleichung in (XV.), welches giebt:

$$\text{XVII.}\quad \begin{aligned}P''\tau_3'' = R''(\tau''\sin\varepsilon'' - \sin^2\alpha''\,tg\,r'')\\ - R_1''(\tau_1''\sin\varepsilon_1'' + \sin^2\alpha_1''\,tg\,r_1'')\\ - R_2''(\tau_2''\sin\varepsilon_2'' + \sin^2\alpha_2''\,tg\,r_2'')\ ^{*}).\end{aligned}$$

Eliminirt man aus (XIV—XVII.) P', S', P'', S'', so erhält man

$$44)\quad R_1' = -\frac{R'}{N'}\Big\{\sin(\alpha_3'-\alpha')\sin(\alpha_3'+\alpha_2')\times$$
$$\begin{aligned}[\cos(\alpha_3'+\alpha')\sin\varepsilon'\cos\varepsilon_2' + \cos(\alpha_3'-\alpha_2')\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_2']\\ + \sin^2\alpha'\sin(\alpha_3'+\alpha_2')\,tg\,r'\cos\varepsilon_2'\\ + \sin^2\alpha_2'\sin(\alpha_3'-\alpha')\,tg\,r_2'\cos\varepsilon'\Big\},\end{aligned}$$

$$45)\quad R_2' = -\frac{R'}{N'}\Big\{\sin(\alpha_3'-\alpha')\sin(\alpha_3'+\alpha_1')\times$$
$$\begin{aligned}[\cos(\alpha_3'+\alpha')\sin\varepsilon'\cos\varepsilon_1' - \cos(\alpha_3'-\alpha_1')\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_1']\\ + \sin^2\alpha'\sin(\alpha_3'+\alpha_1')\,tg\,r'\cos\varepsilon_1'\\ - \sin^2\alpha_1'\sin(\alpha_3'-\alpha')\,tg\,r_1'\cos\varepsilon'\Big\},\end{aligned}$$

$$46)\quad R_1'' = -\frac{R''}{N''}(R_2')'', \qquad R_2'' = +\frac{R''}{N''}(R_1')_2'',$$

wo

$$\begin{aligned}N' = \sin(\alpha_3'+\alpha_2')\sin(\alpha_3'+\alpha_1')[\cos(\alpha_3'-\alpha_1')\sin\varepsilon_1'\cos\varepsilon_2'\\ + \cos(\alpha_3'-\alpha_2')\sin\varepsilon_2'\cos\varepsilon_1']\\ + \sin^2\alpha_1'\sin(\alpha_3'+\alpha_2')\,tg\,r_1'\cos\varepsilon_2'\\ + \sin^2\alpha_2'\sin(\alpha_3'+\alpha_1')\,tg\,r_1'\cos\varepsilon_1'\end{aligned}$$

ist; N'' derjenige Ausdruck, welcher aus N' entsteht, wenn man die Accente verdoppelt; $(R_2')''$, derjenige Ausdruck, welcher aus dem Faktor von $-\frac{R'}{N'}$ in R_2' entsteht, wenn

---

*) Die Richtigkeit der Division läſst sich ganz ähnlich wie die Richtigkeit der (XVI.) erweisen.

man α'', α_3'', α_2'', r_2'', ε'', ε_2'' statt α', α_3', α_1', r_1', ε', ε_1' setzt; endlich $(R_1')_2''$ der Ausdruck, welcher aus dem Faktor von $-\frac{R'}{N'}$ in R_1' entsteht, wenn man α'', α_3'', α_1'', r_1'', ε'', ε_1'' statt α', α_3', α_2', r_2', ε', ε_2' setzt.

Als erste Näherung für R_1', R_2', R_1'', R_2'' erhält man, wenn man die Elasticitätsunterschiede $(\pi^2-\mu^2)$ vernachlässigt, indem alsdann $\alpha_1'=\alpha_2'$, $\alpha_1''=\alpha_2''$, $\sin\varepsilon_2'=-\cos\varepsilon_1'$, $\cos\varepsilon_2'=-\sin\varepsilon_1'$, $\sin\varepsilon_2''=-\cos\varepsilon_1''$, $\cos\varepsilon_2''=-\sin\varepsilon_1''$ wird,

$$47)\quad\left\{\begin{aligned}
R_1' &= -R'\frac{\sin(\alpha_3'-\alpha')}{\sin(\alpha_3'+\alpha_1')}\times\\
&\quad\left(\frac{\cos(\alpha_3'+\alpha')}{\cos(\alpha_3'-\alpha_1')}\sin\varepsilon'\sin\varepsilon_1'+\cos\varepsilon'\cos\varepsilon_1'\right)\\
R_2' &= +R'\frac{\sin(\alpha_3'-\alpha')}{\sin(\alpha_3'+\alpha_1')}\times\\
&\quad\left(\frac{\cos(\alpha_3'+\alpha')}{\cos(\alpha_3'-\alpha_1')}\sin\varepsilon'\cos\varepsilon_1'-\cos\varepsilon'\sin\varepsilon_1'\right)\\
R_1'' &= +R''\frac{\sin(\alpha_3''-\alpha'')}{\sin(\alpha_3''+\alpha_2'')}\times\\
&\quad\left(\frac{\cos(\alpha_3''+\alpha'')}{\cos(\alpha_3''-\alpha_2'')}\sin\varepsilon''\cos\varepsilon_2''-\cos\varepsilon''\sin\varepsilon_2''\right)\\
R_2'' &= -R''\frac{\sin(\alpha_3''-\alpha'')}{\sin(\alpha_3''+\alpha_2'')}\times\\
&\quad\left(\frac{\cos(\alpha_3''+\alpha'')}{\cos(\alpha_3''-\alpha_2'')}\sin\varepsilon''\sin\varepsilon_2''+\cos\varepsilon''\cos\varepsilon_2''\right).
\end{aligned}\right.$$

Um eine bequeme Form für P', S', P'', S'' zu haben, multiplicirt man (XVI.) mit $\sin\varepsilon'$ und die erste der Gleichungen (XIV.) mit $t'\sin\varepsilon'-\sin^2\alpha'\,tg\,r'$, und addirt Beides. Berücksichtigt man dabei die erste der Gleichungen (⊙), so erhält man:

$$48)\quad \begin{cases} P' = \dfrac{R' \sin \varepsilon' (2\tau' \sin \varepsilon' - \sin^2 \alpha' \, tg \, r') - \cos \varepsilon' [R_1' \cos \varepsilon_1' \sin(\alpha' - \alpha_1') - R_2' \cos \varepsilon_2' \sin(\alpha' - \alpha_2')]}{(\tau_3' + \tau') \sin \varepsilon' - \sin^2 \alpha' \, tg \, r'} \\[2ex] S' = -\dfrac{2R' \tau' \cos \varepsilon' + R_1' \cos \varepsilon_1' \sin(\alpha' - \alpha_1') - R_2' \cos \varepsilon_2' \sin(\alpha' - \alpha_2')}{\sin(\alpha_3' + \alpha')}, \end{cases}$$

und ebenso ergiebt sich:

$$49)\quad \begin{cases} P'' = \dfrac{R'' \sin \varepsilon'' (2\tau'' \sin \varepsilon'' - \sin^2 \alpha'' \, tg \, r'') - \cos \varepsilon'' [R_1'' \cos \varepsilon_1'' \sin(\alpha'' - \alpha_1'') - R_2'' \cos \varepsilon_2'' \sin(\alpha'' - \alpha_2'')]}{(\tau_3' + \tau'') \sin \varepsilon'' - \sin^2 \alpha'' \, tg \, r''} \\[2ex] S'' = \dfrac{2R'' \tau'' \cos \varepsilon'' - R_1'' \cos \varepsilon_1'' \sin(\alpha'' - \alpha_1'') + R_2'' \cos \varepsilon_2'' \sin(\alpha'' - \alpha_2'')}{\sin(\alpha_3'' + \alpha'')}. \end{cases}$$

Die zu P', S' und P'', S'' gehörigen Wellensysteme lassen sich als demjenigen Lichte zugehörig betrachten, welches durch einen zweiaxigen Krystall hindurch gegangen ist, indem man die brechende Fläche der letzten Untersuchungen als Austrittsfläche, die Systeme von R' und R'' als die durch Brechung an der Eintrittsfläche entstandenen Systeme ansieht, während R' und R'', mit den ebenso bezeichneten Gröfsen in (IV, V.) identisch, zum einfallenden Wellensystem das System (P, S) haben. Will man daher die Intensität des Lichtes nach seinem Durchgange durch einen zweiaxigen Krystall bestimmen, so berechnet man R' und R'' aus (IV, V.), hieraus R_1', R_2', R_1'', R_2'' aus (47) und endlich P', S', P'', S'' aus (48 und 49).

Ist die Eintrittsfläche der Austrittsfläche parallel, so wird zugleich $\alpha_3' = \alpha_3'' = \alpha$, $r' = q'$, $r'' = q''$, $\alpha_1' = \alpha_1''$, $\alpha_2' = \alpha_2''$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_1''$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2''$, $\tau_3' = \tau_3'' = \tau$. Die Gleichungen (48, 49) liefern, wenn man die Elasticitätsunterschiede vernachlässigt:

$$P' = \frac{2R'\tau'\sin\varepsilon'}{\tau+\tau'},\quad S' = -\frac{2R'\tau'\cos\varepsilon'}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

$$P'' = -\frac{2R''\tau'\cos\varepsilon'}{\tau+\tau'},\quad S'' = -\frac{2R''\tau'\sin\varepsilon'}{\sin(\alpha+\alpha')},$$

während $R' = \frac{2\tau(P\sin\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha') - S\cos\varepsilon'(\tau+\tau')}{(\tau+\tau')\sin(\alpha+\alpha')}$

$$= 2\tau\left(\frac{P\sin\varepsilon'}{\tau+\tau'} - \frac{S\cos\varepsilon'}{\sin(\alpha+\alpha')}\right)$$

und $R'' = -\frac{2\tau(P\cos\varepsilon'\sin(\alpha+\alpha') + S\sin\varepsilon'(\tau+\tau')}{(\tau+\tau')\sin(\alpha+\alpha')}$

$$= -2\tau\left(\frac{P\cos\varepsilon'}{\tau+\tau'} + \frac{S\sin\varepsilon'}{\sin(\alpha+\alpha')}\right)$$

wird. Es wird sonach

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} P' &= \frac{4\tau\tau'\sin\varepsilon'}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{P\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} - S\cos\varepsilon'\right) \\ S' &= -\frac{4\tau\tau'\cos\varepsilon'}{\sin^2(\alpha+\alpha')}\left(\frac{P\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} - S\cos\varepsilon'\right) \\ P'' &= \frac{4\tau\tau'\cos\varepsilon'}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{P\cos\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} + S\sin\varepsilon'\right) \\ S'' &= \frac{4\tau\tau'\sin\varepsilon'}{\sin^2(\alpha+\alpha')}\left(\frac{P\cos\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')} + S\sin\varepsilon'\right). \end{aligned}\right.$$

D. *Reflexion an Metallen.*

Bezeichnet man wiederum durch R_s die Intensität des nach der Reflexions-Ebene, und durch R_p die Intensität des senkrecht gegen diese Ebene gerichteten Theils der Schwingungsbewegung im reflektirten Strahl; ferner durch δ die (ganze oder gebrochene) Zahl der Wellenlängen, um welche dieser Theil gegen jenen zurückbleibt, und durch ξ die Phase des ersteren: so erhält man für die Oscillations-Amplitude, wenn man dieselbe für den Theil R_p mit x, für den Theil R_s mit y benennt,

$$x = \frac{T}{2\pi} R_p \cos(\xi - 2\pi\delta)$$

$$y = \frac{T}{2\pi} R_s \cos\xi,$$

und die Elimination von ξ giebt

$$\text{I.} \quad \left(\frac{x}{R_p}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_s}\right)^2 - 2\frac{xy}{R_p R_s}\cos 2\pi\delta = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sin^2 2\pi\delta$$

als Gleichung für die elliptische Bahn der Aethertheilchen wenn man x und y als rechtwinklige Coordinaten ansieht.

Ist φ der Winkel, welchen die eine Axe der Ellipse mit der Axe der x macht, so hat man

$$\tan 2\varphi = \frac{2R_p R_s}{R_s^2 - R_p^2}\cos 2\pi\delta,$$

oder wenn man $\quad 1) \quad \frac{R_p}{R_s} = \tan\beta \quad$ setzt,

$$\text{II.} \quad \tan 2\varphi = \tan 2\beta \cos 2\pi\delta.$$

Die Form und Lage der Ellipse, und somit der Polarisationszustand des reflektirten Strahls, ist daher völlig bestimmt, sobald δ und $\frac{R_p}{R_s}$ als Funktionen des Einfallswinkels α dargestellt sind.

Nimmt man für δ dieselbe Funktion von α, welche sich für die Total-Reflexion im Innern einfachbrechender Mittel (p. 243) ergab, so erhält man, da man darin n mit $\frac{1}{n}$

vertauschen mufs, wenn man die Luft als das umgebende, das Licht zuführende, Mittel betrachtet,

$$\cos 2\pi\delta = -\frac{1-(n^2+1)\sin^2\alpha+2n^2\sin^4\alpha}{1-(n^2+1)\sin^2\alpha},$$

wo das Brechungsverhältnifs in dem p. 224 eingeführten Sinne zu nehmen ist. Setzt man $n\sin\alpha = \sin\alpha'$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\cos 2\pi\delta = -\frac{1+tg^2\alpha\, tg^2\alpha'}{1-tg^2\alpha\, tg^2\alpha'}, \qquad \text{woraus}$$

$$\cot\pi\delta = \sqrt{-tg^2\alpha\, tg^2\alpha'}$$

folgt, und wenn man $\tang\alpha'$ mit $tg\alpha'\sqrt{-1}$ vertauscht, um das bei der Total-Reflexion hineingebrachte $\sqrt{-1}$ wieder fortzuschaffen,

$$\cot\pi\delta = \tang\alpha\,\tang\alpha'.$$

Bei der Metallreflexion scheinen die Verzögerungen den umgekehrten Gang zu befolgen, indem die Gleichung

$$\text{III.}\quad \tang\pi\delta = \tang\alpha\,\tang\alpha'$$

die betreffenden Erscheinungen mit einem hohen Grad von Genauigkeit darstellt.

Setzt man diese Gleichung als richtig voraus, so findet sich aus derselben der Werth des Brechungsverhältnisses n, mit Hilfe der Gleichung $\sin\alpha' = n\sin\alpha$, sobald man δ für einen bestimmten Werth von α kennt. Ist aber n bekannt, so ergiebt sich aus (III.) die Verzögerung δ für jede gegebene Incidenz α.

Zu jener Bestimmung von n (und demnächst von δ) liefern die Beobachtungen Brewster's für die p. 225 angeführten Metalle das Nöthige. Derselbe mafs nämlich die Einfallswinkel, unter welchem Licht, welches 45° gegen die Einfalls-Ebene polarisirt war, nach zwei Reflexionen an parallelen Platten desselben Metalls linear polarisirt wurde, so wie das Azimuth der Polarisations-Ebene des zweimal reflektirten Strahls. Das Linear-Sein der Polarisation erfordert, dafs die Verzögerung nach den zwei Reflexionen irgend eine Zahl halber Wellenlängen ist, die Lage des Azimuths bestimmt, ob diese Zahl gerade oder ungerade ist. Aus der Verzögerung nach 2 Reflexionen (unter den gemessenen

nfallswinkeln) läfst sich alsdann auf die Verzögerung nach ner einmaligen Reflexion schliefsen. Die Ausführung macht ch, wie folgt:

Die Bahn der Aethertheilchen würde nach einer einaligen Reflexion geradlinig werden, wenn $\sin 2\pi\delta = 0$, $s\,2\pi\delta = \pm 1$, also $\delta = \frac{1}{2}a$ ist (unter a irgend eine ganze ahl verstanden). Für diesen Fall geht die Gleichung (I.) die lineare:

$$\frac{x}{R_p} \pm \frac{y}{R_s} = 0$$

er, in welcher das (+) oder (−) Zeichen zu nehmen t, je nachdem a eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. s wird daher $\tang\varphi = \mp(R_p : R_s) = \mp \tang\beta$, während φ s Azimuth der Polarisations-Ebene des reflektirten Strahls edeutet.

Sind nun P und S beziehlich die Vibrations-Intensiiten der Theile des einfallenden Strahls, welche senkrecht egen die Reflexions-Ebene und derselben parallel polariirt sind, so sind $\frac{R_p}{P}$ und $\frac{R_s}{S}$ die Schwächungen, welche lie Schwingungsbewegungen durch die Reflexion erlitten aben. Liefse man nun einen Strahl $r$mal in derselben Ebene und unter demselben Einfallswinkel an Platten deselben Metalls reflektiren, so würden die Schwächungen nach der $r$ten Reflexion $\left(\frac{R_p}{P}\right)^r$, $\left(\frac{R_s}{S}\right)^r$ und die gesammte Verzögerung $r\delta$ sein. Ist überdies der Einfallsstrahl im Azimuth 45° polarisirt, so ist $P = S$, und mithin, wenn nan $P = S = 1$ setzt, die Schwächung nach der ersten Reflexion R_p und R_s, und nach der $r$ten $R_p{}^r$, $R_s{}^r$. Ersetzt man daher in (I.) R_p, R_s, δ durch $R_p{}^r$, $R_s{}^r$, $r\delta$, o erhält man für die Schwingungsbahn nach der $r$ten Reflexion

$$2)\quad \left(\frac{x}{R_p{}^r}\right)^2 + \left(\frac{y}{R_s{}^r}\right)^2 - \frac{2xy}{R_p{}^r R_s{}^r}\cos 2r\pi\delta = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sin^2 2r\pi\delta,$$

und als Bedingung der Geradlinigkeit der Polarisation:

3) $\sin 2r\pi\delta = 0, \quad \cos 2r\pi\delta = \mp 1,$ während

4) $\tang\varphi = \pm\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^{r^s}$ wird.

Den Brewster'schen Beobachtungen zufolge tritt diese Geradlinigkeit nach zwei Reflexionen ein, wenn dieselben unter einem bestimmten Einfallswinkel (dem Polarisationswinkel) geschehen, und demnach mufs für diesen Winkel, wegen $r = 2$, $\sin 4\pi\delta = 0$ sein. Dabei fand sich, dafs die Polarisations-Ebene nach den Reflexionen stets zur Linken der Einfalls-Ebene lag, wenn sie im einfallenden Lichte sich rechts befand.

Was das Vorzeichen des Azimuths betrifft, so fällt das Positiv- und Negativsein desselben nicht überall mit dem Rechts- und Links-Liegen der Polarisations-Ebene zusammen. Wählt man nämlich die Vorzeichen von R_p und R_s so, dafs $\frac{R_p}{R_s}$ bei senkrechter Incidenz dasselbe Vorzeichen hat als $\frac{P}{S}$, so befindet sich die Polarisations-Ebene des Lichtes nach einer einmaligen Reflexion links, wenn dieselbe vor der Reflexion rechts lag, sobald nur $\frac{R_p}{R_s}$ sein Zeichen nicht geändert hat, d. h. bei positivem Azimuthe, wenn das Azimuth vor der Reflexion positiv war *).

Nach zwei Reflexionen liegt die einem positiven Azimuthe angehörige Polarisations-Ebene daher wiederum rechts,

*) Um sich dies zu veranschaulichen, denke man das Licht senkrecht einfallend, den einfallenden und reflektirten Strahl neben einander auf der reflektirenden Ebene stehend und durch dieselben ihre (auf der reflektirenden Ebene senkrechten) Polarisations-Ebenen, welche parallel sein werden. Neigt man alsdann die beiden Strahlen in ihrer Reflexions-Ebene (d. h. läfst man den Einfalls- und Reflexionswinkel von 0 ab wachsen), so dafs sich die Polarisations-Ebenen mit ihnen (bei constanter Neigung gegen die Einfalls-Ebene) bewegen, so kommen wegen der in entgegengesetzter Richtung vom Einfallsloth ab erfolgenden Bewegung, die Polarisations-Ebenen auf verschiedenen Seiten der Einfalls-Ebene zu liegen.

ach 3 Reflexionen links u. s. w., oder mit andern Worten: Nach einer geraden Zahl Reflexionen liegen die zu positiven Azimuthen gehörigen Polarisations-Ebenen rechts, ach einer ungeraden Zahl links, vorausgesetzt dafs die chwingungs-Ebene des Einfallslichtes rechts liegt«.

Für den vorliegenden Fall (für 2 Reflexionen) ist daer φ negativ zu nehmen, so dafs für den Polarisationsinkel

$$tang\,\varphi = -\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 \quad \text{und} \quad cos\,4\pi\delta = -1$$

ird. Man hat daher $\delta = \frac{2a+1}{4}$, d. h. die Verzögerung ach **einer** Reflexion unter dem Polarisationswinkel beägt eine ungerade Zahl Viertel-Undulationen. Aus Grünen, die später angeführt werden sollen, schliefst man überies, dafs a eine gerade Zahl sein mufs, so dafs $\delta = \frac{4a+1}{4}$, der die ganzen Wellenlängen als einflufslos fortlassend, $= \frac{1}{4}$ folgt.

Die Gleichung (III.) liefert für $\delta = \frac{1}{4}$, $\alpha + \alpha' = 90°$ lso das Gesetz des Polarisationswinkels für durchsichtige infachbrechende Mittel.

Der Winkel φ ist für verschiedene Metalle von Brewster gemessen, und in der folgenden Tafel nebst er aus $\frac{R_p}{R_s} = \sqrt{tang\,\varphi} = tang\,\beta$ berechneten Schwächung nthalten:

Tab. I.

Metalle.	φ	$R_p : R_s$	β
Reines Silber	39° 48′	0,91	42° 23′
Kupfer	29	0,74	36 40
Quecksilber . .	26	0,70	34 56
Platin	22	0,64	32 27
Spiegelmetall .	21	0,62	31 44
Stahl	17	0,55	28 56
Blei	11	0,44	23 48
Bleiganz	2	0,18	10 35

Reflexion an parallelen Metallplatten unter beliebigem Einfallswinkel bei einem Polarisations-Azimuth von 45°.

Sind die Einfallswinkel nicht dem Winkel des Polarisationsmaximums gleich, so werden mehr als zwei Reflexionen zur Herstellung der linearen Polarisation erfordert, und zwar ist die nöthige Zahl der Reflexionen um so gröfser, je weiter sich die Einfallswinkel vom Polarisationswinkel entfernen.

Für den Fall, dafs sämmtliche Reflexionen an demselben Metall, unter gleichen Einfallswinkeln, und in derselben Ebene geschehen, gilt, wie schon oben p. 226, 2) angeführt wurde, folgendes aus den Brewster'schen Beobachtungen sich ergebende Gesetz:

Ist r die kleinste Zahl der Reflexionen, nach welchen ein polarisirter Lichtstrahl unter einem Einfallswinkel α_1, welcher gröfser als der Polarisationswinkel ist, linear polarisirt wird, und zwar in einem Azimuthe φ_1: so giebt es jedesmal einen Einfallswinkel α_2, der kleiner als der Polarisationswinkel ist, unter welchem das Licht nach gleich vielen Reflexionen linear polarisirt wird, und zwar in einem Azimuthe φ_2, welches absolut genommen, dem φ_1 gleich ist. Liegt die Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls auf der rechten Seite der Einfalls-Ebene, so liegt diejenige, welche dem Azimuthe φ_1 angehört, stets links, dagegen die zum Azimuthe φ_2 gehörige nur dann links, wenn r eine gerade Zahl ist. Da nun die positiven Azimuthe nach einer geraden Zahl Reflexionen rechts, nach einer ungeraden Zahl links liegen, so ist φ_2 stets negativ, und φ_1 negativ für einen geraden Zahlenwerth von r, positiv für einen ungeraden.

Aus (3) erhält man daher, wenn δ_2 die zu α_2 gehörige Endverzögerung ist, $\sin 2r\pi\delta_2 = 0$, $\cos 2r\pi\delta_2 = -1$, also $\delta_2 = \frac{2a+1}{2r}$, oder da für $r=2$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$ werden mufs, $\delta_2 = \frac{1}{2r}$, und überdies aus (4) $\tang \varphi_2 = -\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^r$. Fer-

ner ergiebt sich, wenn δ_1 die zu α_1 gehörige Verzögerung bedeutet, $2r\pi\delta_1 = [2a+(r-1)]\pi$, also $\delta_1 = \frac{2a+(r-1)}{2r}$, oder da für $r=2$, $\delta_1 = \frac{1}{4}$ werden mufs, $\delta_1 = \frac{r-1}{2r}$. Es ist daher $\delta_1 + \delta_2 = \frac{1}{2}$, d. h. die Summe der Verzögerungen für zwei so zusammengehörige Einfallswinkel beträgt eine halbe Wellenlänge.

Dies Gesetz wird durch die Brewster'schen Beobachtungen bestätigt. Folgende Tafel enthält die hierauf Bezug habenden Messungen dieses Physikers für die Reflexion am Stahl, nebst den nach (III.) berechneten Incidenzen:

Tab. II.

r	δ_1	Beobachtete α_1	Berechnete α_1	Diff.
2	$\frac{1}{4}$	75° 0'	75° 0'	0
3	$\frac{1}{3}$	79 0	81 0	— 2° 0'
4	$\frac{3}{8}$	82 20	83 28	— 1 8
5	$\frac{2}{5}$	84 0	84 50	— 0 50
6	$\frac{5}{12}$	86 0	85 45	+ 0 15

r	δ_2	Beobachtete α_2	Berechnete α_2	Diff.
2	$\frac{1}{4}$	75° 0'	75° 0'	0
3	$\frac{1}{6}$	67 40	66 19	+ 1° 21'
4	$\frac{1}{8}$	60 20	60 3	+ 0 17
5	$\frac{1}{10}$	56 25	55 12	+ 1 13
6	$\frac{1}{12}$	52 20	51 21	+ 1 1

Bei der Schwierigkeit der Beobachtung kann die Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung als völlig befriedigend gelten.

Die folgende Tafel enthält die von Neumann für Stahl und Silber berechneten Werthe von δ für alle Einfallswinkel von 50° bis 88° von 2 zu 2 Graden:

Tab. III.

α	Stahl ($n = 3{,}732$) α'	$2\pi\delta$	Silber ($n = 3{,}271$) α'	$2\pi\delta$
50°	11° 51′	28° 6′	13° 33′	32° 4′
52	12 11	30 54	13 56	35 14
54	12 32	34 2	14 19	38 42
56	12 50	37 20	14 41	42 28
58	13 8	40 58	15 2	46 32
60	13 25	44 54	15 21	50 52
62	13 41	49 12	15 40	55 36
64	13 56	53 56	15 56	60 40
66	14 10	59 6	16 13	66 18
68	14 23	64 48	16 28	72 22
70	14 35	71 8	16 42	79 0
72	14 46	78 6	16 54	80 10
74	14 55	85 48	17 5	93 56
76	15 4	94 24	17 15	102 28
78	15 12	103 56	17 24	111 45
80	15 18	114 24	17 31	121 38
82	15 23	125 52	17 37	132 14
84	15 27	138 21	17 42	143 32
86	15 31	151 44	17 45	155 22
88	15 32	165 40	17 48	167 36

Was die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{R_p}{R_s}$ vom Einfallswinkel betrifft, so bemerke man, dafs $\frac{R_p}{R_s} = tang\,\beta = \sqrt[r]{tang\,\varphi}$ ist, und dafs φ absolut genommen, für zusammengehörige Werthe von α_1 und α_2 dasselbe bleibt, dafs also, da die zu α_1 und α_2 gehörenden Werthe von $2\pi\delta$ sich zu 180° ergänzen, $\frac{R_p}{R_s}$ eine Funktion von $sin\,2\pi\delta$ sein mufs. Der von Neumann gegebene, und durch die Erfahrung bewährte Ausdruck dafür ist

$$\text{IV.}\quad tang\,2\beta = \frac{tang\,2\beta'}{sin\,2\pi\delta},$$

wo β' der Werth von β für den Polarisationswinkel ist, und von der specifischen Natur des Metalls abhängt. Durch

diese Form der Gleichung wird die Bedingung erfüllt, dafs das Verhältnifs $\frac{R_p}{R_s}$, welches mit 2β zugleich ab- und zunimmt, sein Maximum erlangt für $\delta = \frac{1}{4}$, also für den Polarisationswinkel, und zu beiden Seiten dieses Winkels abnimmt bis es für $\alpha = 0$ und $\alpha = 90$ die Einheit als Grenze erreicht.

Brewster hat eine Reihe Azimuthe φ gemessen für eine zweimalige Reflexion an Silber und Stahl, welche mit den nach (IV.) berechneten Werthen zur Vergleichung hier folgen:

Tab. IV.

Silber.

	α		$2\pi\delta$		β		Berechn. φ.		Beobacht. φ.	
	73°	0′	90°	0′	42°	23′	39°	48′	39°	48′
	79	40	120	0	42	44	38	18	38	28
	82	30	135	0	43	9	37	41	37	45
?	77	13	144	0	43	28	37	25	33	10
?	85	6	150	0	43	42	37	15	35	0
?	84	5	154	17	43	52	37	9	26	0

Stahl.

α		$2\pi\delta$		Beobacht. φ.		Beobacht. β.		Berechn. β.		Diff.	
75°	0′	90°	0′	17°	0′	28°	56′	28°	56′	0°	0′
77	0	99	2	18	0	29	41	29	5	+0	36
79	37	120	0	13	15	31	42	30	44	+0	58
80	0	114	24	19	0	30	24	30	7	+0	17
83	30	135	0	11	30	33	53	33	1	+0	52
84	38	144	0	10	30	35	31	34	52	+0	39
85	0	144	56	26	0	34	56	35	5	−0	9
85	45	150	0	9	30	36	35	36	17	+0	18
90	0	180	0	45	0	45	0	45	0	0	0

Die grofsen Differenzen in den drei letzten Reihen der ersten Tabelle lassen auf Fehler in den angegebenen beobachteten Winkelwerthen schliefsen.

Reflexion an parallelen Metallplatten bei beliebigem Azimuth der Polarisations-Ebene des Einfallslichtes.

Ist I die Vibrations-Intensität eines im Azimuthe a polarisirten Einfallsstrahls, so dafs $I\cos a$ und $I\sin a$ dessen Componenten sind, wenn man die Bewegung nach der Reflexions-Ebene und senkrecht darauf zerlegt; so erhält man, wenn man $I = 1$ setzt, für die entsprechenden Componenten der Bewegung des reflektirten Strahls: $R_s\cos a$ und $R_p\sin a$, und nach r Reflexionen unter gleichem Einfallswinkel und in gleicher Ebene: $R_s^r\cos a$, $R_p^r\sin a$. Soll das Licht nach r Reflexionen linear polarisirt sein, so hat man nach (3) wiederum $\sin 2r\pi\delta = 0$, $\cos 2r\pi\delta = \mp 1$, und wenn man φ' das Azimuth der Polarisations-Ebene des reflektirten Lichtes nennt,

$$\tang\varphi' = \mp\tang a\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^r = \mp\tang a\tang^r\beta_r.$$

wo das (+) oder (—) Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\cos 2r\pi\delta$ positiv oder negativ ist. Es war aber $\tang^r\beta = \pm\tang\varphi$ für den Fall, dafs $a = 45^0$ ist, wenn nur r die kleinste Zahl Reflexionen ist, nach welchen die lineare Polarisation hergestellt wird. Versteht man daher unter φ den Werth von φ' für $a = 45^0$, so erhält man:

$$5)\quad \tang\varphi' = \tang a\tang\varphi.$$

Folgende Tafel enthält die beobachteten und berechneten Werthe von φ' für die Werthe von a von 10° zu 10° in Bezug auf die Reflexion am Silber:

Tab. V.

a	Beobachtete φ'	Berechnete φ'	a	Beobacht. φ'	Berechnete φ'
90°	— 90°	— 50°	45°	39° 48′	39° 48 = φ
85	84 36′	84	35	32 23	30 28
75	74 10	72 10′	25	23 10	21 14
65	63 51	60 46	15	13 16	12 35
55	52 18	49 57	5	4 40	4 10
			0	0 0	0 0

Nach mr Reflexionen wird $\tang\varphi' = \mp\tang a\tang^{mr}\beta = \tang a\tang^m\varphi$. Für $a = 45^0$ wird das $\tang\varphi' = \tang^m\varphi$.

Bei einer Incidenz von 75° fanden sich für Stahl folgende Werthe von φ':

Tab. VI.

r	φ' beobachtet.	φ' berechnet.
2	$-17°$	$-17°$
4	$+5\ 10'$	$+5\ 22'$
6	-2	$-1\ 38$
8	0	$+0\ 30$
10	0	$-0\ 9$
12	0	$+0\ 3$

Reflexion an Metallplatten bei beliebig gegen einander geneigten Reflexions-Ebenen.

Sind die Metallplatten nicht einander parallel, so dafs die Reflexions-Ebenen bei wiederholter Reflexion zwischen ihnen nicht mehr dieselben bleiben, sondern irgend einen Winkel b bilden — so läfst sich für jeden bestimmten Einfallswinkel α an der ersten Platte, derjenige Winkel α_1 finden, unter welchem bei nachmaliger Reflexion die lineare Polarisation des Einfallsstrahls hergestellt wird. Ist nämlich der (gegebene) Phasenunterschied nach der ersten Reflexion $2\pi\delta'$, so darf man α_1 nur so bestimmen, dafs der zweite $2\pi\delta''$ so wird, dafs der Gesammt-Phasenunterschied eine halbe Wellenlänge beträgt, d. h. die Gleichung

$$\sin 2\pi(\delta' + \delta'') = 0 \quad \text{erfüllt.}$$

Es seien r_p und r_s die Componenten der Bewegung nach der ersten Reflexion (unter 90° und 0° gegen die erste Reflexions-Ebene), so dafs man hat:

$$r_p = R_p \sin a \sin(\xi - 2\pi\delta), \quad r_s = R_s \cos a \sin \xi.$$

Zerlegt man r_p und r_s nach der zweiten Reflexions-Ebene und senkrecht darauf, und nennt die neuen Componenten r_p' und r_s', so wird

$$r_p' = r_p \cos b - r_s \sin b \quad \text{und} \quad r_s' = r_p \sin b + r_s \cos b,$$

oder

$$r_p' = r_p \cos b + r_s \sin b \quad \text{und} \quad r_s' = r_p \sin b - r_s \cos b,$$

je nach den Richtungen, in welchen sich die Moleküle in den Componenten gleichzeitig von ihrer Gleichgewichtslage entfernen *).

Legt man die erste Richtung der Schwingungen zum Grunde, welches der Allgemeinheit nicht schadet, und setzt

$$r_p' = A\sin(\xi - 2\pi d) \quad \text{und} \quad r_s' = A'\sin(\xi - 2\pi d'),$$

so bekommt man

$$A\cos 2\pi d = R_p \sin a \cos b \cos 2\pi d - R_s \cos a \sin b,$$
$$A\sin 2\pi d = R_p \sin a \cos b \sin 2\pi \delta,$$
$$A'\cos 2\pi d' = R_p \sin a \sin b \cos 2\pi\delta + R_s \cos a \cos b,$$
$$A'\sin 2\pi d' = R_p \sin a \sin b \sin 2\pi\delta,$$

folglich

$$6)\quad \tang 2\pi d = -\frac{\tang\gamma \cot b \sin 2\pi\delta}{1 - \tang\gamma \cot b \cos 2\pi\delta} \quad \text{und}$$

$$7)\quad \tang 2\pi d' = \frac{\tang\gamma \tang b \sin 2\pi\delta}{1 + \tang\gamma \tang b \cos 2\pi\delta},$$

wo $\frac{R_p}{R_s}\tang a = \tang\gamma$ gesetzt ist.

Der vorher mit $2\pi\delta'$ bezeichnete Phasenunterschied ist jetzt $2\pi(d - d')$, und die Bedingung der linearen Polarisation demnach

$$8)\quad \sin 2\pi(d - d' + \delta'') = \tang 2\pi(d - d') + \tang 2\pi\delta'' = 0.$$

Aus (6 und 7) ergiebt sich

$$\tang 2\pi(d - d') = \frac{\sin 2\pi\delta}{\cos 2b \cos 2\pi\delta - \sin 2b \cot 2\gamma}.$$

---

*) Ist nämlich AB (Fig. 50.) die ursprüngliche Polarisations-Ebene, PP' die erste und QQ' die zweite Reflexions-Ebene, also $\angle QCP = b$ und $\angle BCP = a$, und sind CP und Cp die Richtungen r_s und r_p, so vereinigen sich nach CQ (der Richtung von r'_s): von der Bewegung r_s der Theil $r_s\cos b$, und von r_p der Theil $r_p \sin b$; während nach der darauf senkrechten Richtung Cq nur von r_p der Theil $r_p\cos b$ hinfällt, und der zweite Theil von r_s, der nach CP gerichtet ist, nach der Richtung Cq' hinfällt und gleich $r_p \sin b$ ist, so daſs r_p' der Differenz beider Schwingungsbewegungen gleich wird. Umgekehrt verhält es sich, d. h. jene Theile müssen subtrahirt, und diese addirt werden, wenn r_s nach CP' oder r_p nach Cp' gerichtet wäre.

Setzt man $tang\,2\gamma\,cos\,2\pi\delta = tang\,C$,
und $sin\,2\pi\delta\,tang\,2\gamma\,cos\,C = tang\,B$,
so wird

$$9)\quad tang\,2\pi(d-d') = \frac{tang\,B}{sin(C-2b)}.$$

Mittelst dieses Werthes läſst sich δ'' aus (8) bestimmen, und dazu aus (III.) das gesuchte α_1 finden, oder bequemer mittelst einer Tafel, wie die Tafel III. durch Interpolation.

Geschieht die erste Reflexion unter dem Polarisationswinkel, so wird $sin\,2\pi\delta = 1$, $cos\,2\pi\delta = 0$, also

$$tang\,2\pi(d-d') = -\frac{tang\,2\gamma}{sin\,2b}.$$

Hierher gehörige Beobachtungen sind von Brewster am Stahl und Silber angestellt, und zwar 1) am Stahl unter dem Polarisationswinkel (75°) für $a=45$, wofür also $tang\,\gamma = \frac{R_p}{R_s} = tang\,28^\circ\,56'$, mithin $tang\,2\pi(d-d') = -\frac{tang\,57^\circ\,52'}{sin\,2b}$ ist. Sie sind in der folgenden Tafel mit den berechneten Werthen von α_1 zusammengestellt:

Tab. VII.

b		$d-d'$		$2\pi\delta$		Beob. α_1	Berechn. α_1		Diff.	
0° u.	180°	90°	0'	90°	0'	75°	75°	0'	0°	0'
22½	202½	113	52	113	52	77	79	54	+2	54
45	225	122	8	122	8	78	81	20	+3	20
67½	247½	113	52	113	52	77¾	79	54	+2	9
90	270	90	0	90	0	75	75	0	0	0
112½	292½	66	8	66	8	70	68	25	−1	35
135	315	57	52	57	52	68	65	32	−2	28
157½	337½	66	8	66	8	70	68	25	−1	35
180	360	90	0	90	0	75	75	0	0	0

2) am Stahl für $\alpha = 80^\circ$ und $\alpha = 68^\circ$ bei $a = 45^\circ$. Für $\alpha = 80^\circ$ liefert die Tafel (IV.) $2\pi\delta = 114^\circ\,24'$, und $a = 45^\circ$ giebt $tang\,\gamma = \frac{R_p}{R_s} = tang\,30^\circ\,7'$ und

$$10)\quad tang\,2\pi(d-d') = \frac{tang\,B}{sin(C-2b)} = \frac{tang\,52^\circ\,14'}{sin(35^\circ\,50'+2b)}.$$

Da 80° und 68° 14′ solche Einfallswinkel sind, deren zugehörige Phasenunterschiede $2\pi\delta$ sich zu 180° ergänzen, so darf man nur, um das zu $\alpha = 68^0\ 14'$ gehörige α' zu bestimmen, in den Ausdruck (10) $-\cos 2\pi\delta$ statt $\cos 2\pi\delta$ setzen, um für $\alpha = 68^0\ 14'$ $\operatorname{tang} 2\pi(d - d')$ zu bekommen. Es giebt dies $-\frac{\operatorname{tang} B}{\sin(C + 2b)}$, oder wenn man $b = 90 - b_1$ setzt,

$$\operatorname{tang} 2\pi(d - d') = \frac{\operatorname{tang} B}{\sin(C - 2b_1)}.$$

Es wird daher $d - d'$, also auch δ'' und α_1 für $\alpha = 68^0\ 14'$ demselben Werth für $\alpha = 80^0$ gleich, wenn man statt des Azimuthes b, das Azimuth $90 - b$ nimmt. Betrachtet man daher die für $\alpha = 68^0$ beobachteten Werthe für identisch mit denen, die sich für $\alpha = 68^0\ 14'$ finden würden, so lassen sich beide Beobachtungsreihen verknüpfen, wie es in der nachstehenden Tafel geschehen ist, wo die Columne I der Incidenz 80°, die Columne II der Incidenz 68° angehört.

Tab. VIII.

$-b$	$2\pi\delta''$	Berechn. α_1	Beobachtet I	Beobachtet II	$+b$	$2\pi\delta''$	Berechn. α_1	Beobachtet I	Beobachtet II
0°	65° 36′	68° 15′	67°	68°	0°	65° 36′	68° 15′	67°	68°
$11\frac{1}{4}$	79 52	72 26	70	70	$11\frac{1}{4}$	56 36	65 0	65	69
$22\frac{1}{2}$	97 2	76 32	$73\frac{2}{3}$	72	$22\frac{1}{2}$	52 36	63 26	64	70
$33\frac{3}{4}$	115 8	79 34	77	75	$33\frac{3}{4}$	52 59	63 36	66	$64\frac{2}{3}$
45	122 8	81 21	$78\frac{1}{2}$	$78\frac{1}{2}$	45	57 52	66 25	$69\frac{1}{2}$	$63\frac{2}{3}$
$56\frac{1}{4}$	127 1	82 11	80	$80\frac{1}{4}$	$56\frac{1}{4}$	67 52	68 58	72	$64\frac{1}{2}$
$67\frac{1}{2}$	127 24	82 15	$80\frac{1}{2}$	81	$67\frac{1}{2}$	82 58	73 15	$74\frac{2}{3}$	$65\frac{1}{2}$
$78\frac{3}{4}$	123 24	81 34	$80\frac{1}{4}$	80	$78\frac{3}{4}$	100 8	77 12	79	66
90	114 24	80 0	80	79	90	114 24	80 0	80	79

Da die Abweichungen der berechneten Werthe von den Resultaten der Beobachtung alle nach derselben Seite hingehen, und diese auf 2 und 3° steigen, so schliefst Neumann auf eine constante Fehlerquelle, wie etwa auf eine Ungenauigkeit der zum Grunde liegenden Einfallswinkel (80° und 68°).

Aehn-

Aehnliche Abweichungen zeigen sich bei den von Brewster an Silber angestellten Messungen. Aendert man den ersten Einfallswinkel ein Weniges, und nimmt statt 80°, 79° 40′, so wird die Uebereinstimmung fast vollkommen. Für dieses α wird $2\pi\delta = 160°$ und wegen $a = 45°$

$$tang\,2\pi(d-d') = \frac{tg\,84°46'\,cos\,80°59'}{sin\,[80°59'+2b]}.$$

Tab. IX.

$-b$	$2\pi\delta''$		Berechn. α_1.		Beobacht. α_1.		$+b$	$2\pi\delta''$		Berechn. α_1.		Beobacht. α_1.	
0°	60°	0′	63°	42′	61°	58′	0°	60°	0′	63°	42′	61°	58′
$11\frac{1}{4}$	59	30	68	8	65	20	$11\frac{1}{4}$	60	23	63	53	63	25
$22\frac{1}{2}$	71	27	67	41	69	0	$22\frac{1}{2}$	64	42	65	25	64	40
$33\frac{3}{4}$	82	14	70	54	73	20	$33\frac{3}{4}$	73	51	68	26	68	47
45	95	14	74	17	75	25	45	84	46	71	33	71	40
$56\frac{1}{4}$	106	59	77	0	78	50	$56\frac{1}{4}$	97	46	74	54	75	40
$67\frac{1}{2}$	115	18	78	44	80	0	$67\frac{1}{2}$	108	33	77	10	78	28
$78\frac{3}{4}$	119	37	79	35	80	0	$78\frac{3}{4}$	116	29	79	0	79	45
90	120	0	79	40	80	0	90	120	0	79	40	80	0

b) Reflexionen an verschiedenen Metallen.

Wird Licht, welches im Azimuthe 45° polarisirt ist, von Platten, welche aus verschiedenen Metallen gefertigt sind, in einer und derselben Ebene reflektirt und zwar am ersten, zweiten, dritten u. s. w. Metall beziehlich unter den jenen Metallen zugehörigen Polarisationswinkeln α_1, α_2, $\alpha_3\ldots$; sind ferner

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)_{\alpha_1} = tg\,\beta_1, \quad \left(\frac{R_p}{R_s}\right)_{\alpha_2} = tg\,\beta_2, \quad \left(\frac{R_p}{R_s}\right)_{\alpha_3} = tg\,\beta_3\ldots$$

die correspondirenden Schwächungen, und δ_1, δ_2, $\delta_3\ldots$ die entsprechenden Verzögerungen, so ist die Bedingung der linearen Polarisation:

$$sin\,2\pi(\delta_1+\delta_2+\delta_3\ldots) = 0,$$

also je nachdem $cos\,2\pi(\delta_1+\delta_2+\delta_3\ldots) = \pm 1$ ist,

$$tg\,\varphi = \pm tg\,\beta_1\,tg\,\beta_2\,tg\,\beta_3\ldots$$

wo φ das Azimuth der Polarisations-Ebene nach der letzten Reflexion bedeutet.

Für die Combination von Stahl und Silber wird z. B. $tang\,\varphi = tg\,29^0\,53'\,tg\,42^0\,23' = tg\,27^0\,40'$, während Brewster $\varphi = 28^0\,30'$ fand.

Statt Metalle mit Metallen zu combiniren, kann man auch das durch Total-Reflexion in unkrystallinischen Körpern circular polarisirte Licht durch Reflexion an einem Metall zur geradlinigen Polarisation zurückführen. Man hat alsdann nur die totale Reflexion als eine Metall-Reflexion zu denken, für welche $\frac{R_p}{R_s} = 1$, und $\delta = \frac{1}{4}$ ist. Unterwirft man daher das Licht noch, nachdem es durch Total-Reflexion circular polarisirt worden ist, einer Metall-Reflexion unter dem Polarisationswinkel, und so dafs die Reflexions-Ebenen parallel werden, so wird die Gesammt-Verzögerung eine halbe Wellenlänge, und das Licht ist in einem Azimuthe φ linear polarisirt, welches bestimmt ist durch:

$$tang\,\varphi = \frac{R_p}{R_s} = tang\,\beta.$$

Für Stahl wird $\varphi = 29^0\,53'$ (Brewster fand $30^0\,30'$), und für Silber $\varphi = 42^0\,24'$ (Brewster fand $42^0\,30'$).

Erleidet ein Strahl, der im Azimuthe von 45^0 polarisirt ist, mehrere Total-Reflexionen, und ist die hervorgebrachte Verzögerung δ, so findet man den Einfallswinkel, unter welchem ein gegebenes Metall, wenn dessen Reflexions-Ebene sich im Azimuthe b befindet, die lineare Polarisation wieder herstellt, indem man in (8) $a = 45^0$, $\frac{R_p}{R_s} = 1$ setzt, wodurch $tang\,2\pi\delta'' = -\frac{tg\,2\pi\delta}{cos\,2b}$ wird, und mittelst des gefundenen δ'' das zugehörige α_1 bestimmt. Ist $\delta = \frac{1}{4}$, also das Licht durch Total-Reflexion circular polarisirt, so wird mit δ'' zugleich auch α_1 von b unabhängig und dem Polarisationswinkel gleich.

Man sieht ferner, dafs für $b = 45^0$, für jegliches δ α_1 dem Polarisationswinkel gleich wird; und dafs, wenn $\delta < \frac{1}{4}$ und $b < 45^0$, oder wenn $\delta > \frac{1}{4}$ und b zwischen 45^0 und 90^0 liegt, α_1 gröfser als der Polarisationswinkel wird, dafs dagegen α_1 kleiner als der Polarisationswinkel wird, wenn $\delta < \frac{1}{4}$ und $b > 45$, oder $\delta > \frac{1}{4}$ und $b < 45^0$ ist.

Dritter Abschnitt.

Die Interferenz-Erscheinungen, welche durch die ungleiche Geschwindigkeit des Lichtes in doppelbrechenden Mitteln erzeugt werden.

Erste Abtheilung.

Uebersichtliche Darstellung der Erscheinungen und ihrer Gesetze.

Die zahlreichen Erscheinungen, welche der Interferenz ihre Entstehung verdanken, lassen sich nach der Ursache der Gangverschiedenheit der interferirenden Strahlen in zwei Klassen theilen. Die Gangverschiedenheit der Strahlen eines und desselben Lichtbündels kann nämlich entweder 1) durch die ungleiche Geschwindigkeit derselben verursacht werden, mit welcher sie sich in einem ihnen entgegentretenden doppelbrechenden Mittel fortpflanzen; 2) durch Ungleichheit in den Wegen, die sie zu durchlaufen haben, um zu einem und demselben Punkt zu gelangen. Die erste Klasse von Erscheinungen sind der Gegenstand der zunächst folgenden Betrachtungen.

Weifses Licht entsteht, wie wir gesehen haben, durch Zusammenwirken der verschiedenen homogenen Farbenstrahlen, vorausgesetzt, dafs das Verhältnifs der Lichtstärke in den letzteren ein ganz bestimmtes sei (nämlich so, wie es sich im Sonnenspektrum ausdrückt). Wird das Intensitätsverhältnifs geändert, so verwandelt sich das weifse Licht

in gemischtfarbiges, und zwar in Licht von um so gröſserer Farbenreinheit und von um so gröſserer Lebhaftigkeit, je mehr Farbenstrahlen gänzlich verschwinden. Da nun die Wirkung der Interferenz Aenderung der Intensität ist, so wird jede Interferenz weiſses Licht in farbiges verwandeln, sobald nur die Intensitäts-Aenderung sich nicht gleichmäſsig auf alle Farbenstrahlen erstreckt.

Die Bedingungen, daſs zwei Strahlenbündel zur Interferenz kommen, sind 1) daſs beide von derselben Lichtquelle kommen, damit die Schwingungen in beiden von genau gleichartigen Impulsen herrühren, und nicht kleine, nebensächliche Störungen im Gange eine ungleichmäſsige Einwirkung auf die schwingenden Theilchen ausüben; — 2) daſs beide nahe zusammenfallen und der eine dem andern um eine constante Stärke voraus ist; — 3) daſs beide nach derselben Ebene polarisirt sind.

Die zweite dieser Bedingungen wird erfüllt von den gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen nach ihrem Austritt aus einem nicht zu dicken Krystallplättchen mit parallelen Begrenzungsflächen. Dadurch nämlich, daſs die beiderlei Strahlen sich mit ungleicher Geschwindigkeit durch den Krystall hindurch bewegen, befinden sie sich beim Austritt in ungleichen Phasen, und insofern sie nach dem Austritt (in der Luft) sich wiederum mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, behalten sie diesen Phasenunterschied fortan bei. Der Krystall darf deswegen nicht zu dick sein, einerseits weil die mit der Dicke sehr rasch zunehmende Gangverschiedenheit, wie man aus der Erfahrung schlieſst, der Reinheit des Effekts, d. h. der genauen Zusammenstimmung in den verschiedenen Phasen Eintrag thut; andrerseits weil dadurch für sehr nahe liegende Paare der zur Interferenz disponirten Strahlenbüschel eine so groſse Verschiedenheit in den Gangunterschieden herbeigeführt werden kann, daſs die verschiedenen Farben einander decken und sich zu weiſslichem Licht vereinigen. Um das letztere sich klar zu machen, denke man sich (Fig. 51.) *ab* und *cd* als die Grenzflächen eines Krystallscheibchens, und verfolge

die, zu dem in *A* befindlich zu denkenden Auge kommenden, Strahlen rückwärts. Ist *AB* die Richtung eines Strahlenpaars, welches von einem gewöhnlich gebrochenen in der Richtung *OB*, und von einem ungewöhnlich gebrochenen in der Richtung *EB* sich bewegenden Strahl herrührt, so sind die zugehörigen einfallenden Strahlen *SO* und *SE*, parallel *AB*, und wenn das Licht von einem sehr entfernten Gegenstande kommt, so daſs sich *SO* und *SE* als zu demselben Lichtpunkt gehörige Strahlen ansehen lassen, so ist die auf *SO* gezogene Senkrechte *EC* eine in der Wellenfläche derselben liegende Linie, und das Licht ist in *C* und *E* in gleicher Phase. Der Unterschied der Zahl der Wellenlängen, die auf dem Wege *EB*, und auf dem Wege *CO*+*OB* liegen, ist der Gangunterschied beider Strahlen bei ihrer Ankunft in *B*. Ist ferner *AG* ein zweites Strahlenpaar, welches vor dem Eintritt in den Krystall die parallelen Richtungen *TH* und *TI* hatte, so ist der Gangunterschied, wie man leicht übersieht, wegen des schieferen Einfalls im Allgemeinen gröſser als beim vorigen Paar, und zwar um so gröſser, je gröſser *BG* und je gröſser die Dicke des Scheibchens ist. Wenn nun der Gangunterschied des Paares *AG* den des Paares *AB* um eine halbe Wellenlänge übertrifft (homogenes Licht vorausgesetzt), so ist, wenn die Paare zur Interferenz kommen, und z. B. die Schwingungsbewegungen in *BA* sich aufheben, in *AG* die gröſste Lichtverstärkung. Da endlich die Entfernung *BG* um so geringer sein muſs, je gröſser die Dicke ist, so werden bei einer bestimmten Dicke *G* und *B* so nahe liegen, daſs die Dunkelheit des Punktes *B* wegen der groſsen Nähe des hellen Punktes *G* für das in *A* befindliche Auge nicht mehr wahrnehmbar ist.

Insofern der Gangunterschied mit dem Geschwindigkeitsunterschied der beiderlei Strahlen zugleich wächst, so wird, wenn die durch den Krystall gehenden Strahlen nur kleine Winkel mit den optischen Axen bilden, wegen der nahe gleichen Geschwindigkeit, die Dicke bedeutender sein dürfen; aus demselben Grunde wird bei schwach doppel-

brechenden Krystallen allgemein nicht eine so grofse Dünnheit erfordert werden, als bei stark doppelbrechenden.

Aus der Nothwendigkeit der Erfüllung der dritten Bedingung folgt, dafs unmittelbar nach dem Austritt aus dem krystallinischen Plättchen keine Interferenz möglich ist, da die Doppelstrahlen, welche gleiche Richtung haben, senkrecht oder wenigstens nahe senkrecht auf einander polarisirt sind, und daher im Allgemeinen elliptische Schwingungen erzeugen. Um sie zur Interferenz zu bringen, darf man die austretenden Strahlen nur durch einen neuen doppelbrechenden Krystall leiten, in welchem sich jedes Strahlenpaar (wie in der vorigen Figur das Paar *BA* und das Paar *GA*) in einen gewöhnlichen und einen ungewöhnlichen Strahl theilt, so dafs ein Theil der im Gange differirenden Schwingungen sich nach der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen, der andere Theil nach der Polarisations-Ebene des ungewöhnlichen Strahls wendet, und zwei Lichtportionen sich bilden, deren jede nach einer einzigen Ebene polarisirte aber in verschiedenen Phasen befindliche Theile enthält. Um diese Lichtportionen von einander zu scheiden, mufs man entweder den Krystall von bedeutenderer Dicke nehmen, damit eine hinlängliche Divergenz bewirkt werde, oder ein Nicol'sches Prisma, oder einen Turmalin anwenden, damit die eine am Durchgang gehindert werde. Statt durch Brechung in einem Krystall kann man auch durch Reflexion unter dem Polarisationswinkel die Schwingungen der austretenden Strahlenpaare auf eine einzige Polarisations-Ebene zurückführen.

Endlich scheint schon eine regelmäfsige Schwingungsweise des Lichtes vor dem Eintritt in das Krystallplättchen nöthig zu sein, da die Interferenz-Erscheinungen ausbleiben, wenn dasselbe nicht schon nach einer und derselben Ebene polarisirt einfällt.

Zur Erzeugung der Interferenz-Erscheinungen gebraucht man am bequemsten entweder die Verbindung der beiden Polarisationsspiegel mit dem Rohr (p. 170.), dessen Axe unter dem Complement des Polarisationswinkels gegen die

Spiegel-Ebene geneigt ist (Biotscher Polarisationsapparat), indem man das die Interferenz bedingende Krystallplättchen in dem Rohr anbringt; oder zwei hintereinander aufgestellte Nicol'sche Prismen, zwischen denen das Plättchen aufgestellt wird (Dove'scher Polarisationsapparat). Der erste Spiegel oder das erste Prisma dient zur vorläufigen linearen Polarisation, der zweite Spiegel oder das zweite Prisma zur Zurückführung des durch das Plättchen gegangenen Lichtes auf dieselbe Polarisations-Ebene. Die beiden Prismen lassen sich auch durch der Axe parallel geschnittene Turmaline ersetzen *).

In der Folge soll der Einheit der Redeweise wegen immer der Apparat mit den Prismen vorausgesetzt werden. Ferner sollen, um schleppende Wiederholungen zu vermeiden, folgende abkürzende Bezeichnungen angewendet werden:

Das erste Nicol sei dasjenige Nicol'sche Prisma, welches das Licht dem Krystall zuführt, und welches man auch wohl das polarisirende Prisma nennt; das zweite Nicol sei das andere Prisma, welches das den Krystall verlassende Licht zum Auge führt, und welches man auch analysirendes Prisma nennt. Unter dem »Winkel der Nicols« sei derjenige Winkel verstanden, welchen die Durchgangs-Ebenen, d. h. die Polarisations-Ebenen der die Prismen allein durchdringenden ungewöhnlichen Strahlen mit einander bilden, und welcher dem Winkel zwischen den Reflexions-Ebenen der beiden Spiegel im Biotschen Apparat entspricht. In diesem Sinne ist auch das parallel Sein und das einander senkrecht Kreuzen der Nicols zu verstehen.

Endlich ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, die Krystallplatte, welche die Interferenz-Erscheinungen hervorbringt, mit seinen beiden (parallelen) Grenzflächen senkrecht auf der geometrischen Axe der beiden Nicols zu denken.

---

*) Das Nähere über die Polarisationsapparate siehe am Schlusse des zweiten Bandes.

brechenden Krystallen allgemein nicht eine ...)l-
heit erfordert werden, als bei stark dopp

Aus der Nothwendigkeit der Erfüll
dingung folgt, dafs unmittelbar nach
krystallinischen Plättchen keine Inte
die Doppelstrahlen, welche gleich ... he
recht oder wenigstens nahe ser
sirt sind, und daher im Allger
gen erzeugen. Um sie zur ... en wegen der
man die austretenden Strah ... schwindigkeit der
pelbrechenden Krystall ... nterschiede in allen
lenpaar (wie in der ... sein. so dafs bei homo-
Paar *GA*) in einen ... durch das zweite Prisma
chen Strahl theilt, ... fast gleich erhellt, und
renden Schwingu ... allen Punkten wegen des überall
des gewöhnlich ... sämmtlicher Farben, gleich
Ebene des ... man das Scheibchen in seiner
portionen ... Farbe nicht ändern, da die Gang-
polarisirte ... durch das Blättchen gehenden
enthält. ... also die der benachbarten
den, ... ändern. In den beiden Stel-
Dick ... der Hauptschnitt des Blättchens
wer ... des ersten Nicols parallel ist oder
an ... steht, wird das Licht im Krystall
S ... und es kann zu keiner Interferenz
... findet statt, wenn der Hauptschnitt eine
... das zweite Nicol einnimmt, weil dann
... verlassenden Doppelstrahlen nur der
... durchgelassen wird. Es wird daher
... Umdrehung des Blättchens 8 mal das
... als ob kein Blättchen vorhanden wäre,
... gegen einander geneigt sind; 4 mal,
... parallel sind, oder auf einander senk-
... letzteren Fall erscheint natürlich das Ge-
... 2 Stellungen völlig dunkel, da die
... gebrochenen Strahlen vom zweiten
... durchgelassen werden.

einer Zwischenstellung (Figur 52.) *OP*
's Richtungen der Durchgangs-Ebe-
'en Prisma, *OH* als Hauptschnitt
darauf senkrecht, so zerlegen
gerichteten Schwingungen
sich im zweiten Prisma
'oment des Eintritts in
und *H* gerichtet sind.
-Ebene des zweiten Prisma's
ut auf OP_1, so würden sich die
Schwingungen nach OP_4, die nach
..ach OP_3 hin wenden. Es würden dem-
OP_3 und OP_4 gerichteten Schwingungen
gengesetzten Richtungen erfolgen, und da die
..er halben Oscillationsdauer vergeht, ehe die von *O*
P_3 gehende Bewegung in die entsprechende von *O*
ich P_4 gehende übergeht, so verhalten sich die Bewegun-
n so, als ob zu dem Gangunterschiede, welchen die
rahlen beim Eintritt in das zweite Nicol haben, noch
ne halbe Wellenlänge hinzukäme. Die Gangunterschiede
r interferirenden Strahlen sind daher für je zwei auf ein-
der senkrechte Stellungen des zweiten Prisma's um eine
lbe Wellenlänge verschieden, und mithin ist das Gesichts-
ld, wenn es in der einen Stellung in homogenem Licht
nkel ist, in der andern im Maximum der Helligkeit. In
eifsem Licht ist es wegen des verschiedenen Intensitäts-
rhältnisses der einzelnen Farbenstrahlen verschieden ge-
bt, und zwar so, dafs sich die beiden Färbungen zu
eifsem Licht ergänzen, also complementar sind. Zu dem-
lben Schlufs kommt man, wenn man annimmt, dafs beim
ntritt in das zweite Prisma die Schwingungen statt nach
H_1 nach OH_2 gerichtet sind.

Betrachten wir jetzt die Aenderung der Farbe bei zu-
hmender Dicke des Blättchens.

Stehen die Nicols auf einander senkrecht, ist also das
sichtsfeld dunkel, wenn man das Blättchen fortnimmt,
d wendet man homogenes Licht an, so bleibt jenes dun-

kel, sobald das Blättchen eine solche Dicke d hat, dafs der Gangunterschied eine Wellenlänge ist. Es bleibt aber dann auch dunkel, wenn die Dicke $2d$, $3d$, $4d$.... ist, weil sich der Gangunterschied um ebensovielmal vervielfacht. Da ferner jeder anderen Farbe ein anderer Werth von d entspricht, so wird im weifsen Lichte bei keiner Dicke Dunkelheit eintreten, und es werden die Farben vorherrschen, deren Intensität bei der betreffenden Dicke ihrem Maximum am nächsten sind. Da das Verhältnifs der Werthe von d, in dem Verhältnifs der Wellenlängen stehend, von Substanz zu Substanz sich wenig ändert, so wird die Farbenfolge bei zunehmender Dicke eine regelmäfsige, und für alle Substanzen nahe dieselbe sein. Man nennt diese Folge der Farben die Newtonsche Scale, in welcher verschiedene Ordnungen unterschieden werden, und welche (wenn man das Verhältnifs der Wellenlängen in der Luft zum Grunde legt) folgende ist:

1te Ordnung: schwarz (bei $d = 0$), blafsblau, lebhaft weifs, gelb, orange, roth.

2te Ordnung: violett, blau, gelblich grün, gelb, roth.

3te Ordnung: purpur, indig-blau, glänzend grün, lebhaft gelb, rosa, carmoisin.

4te Ordnung: bläulich grün, blafs gelblich roth, schwach roth.

5te Ordnung: sehr schwach grün, weifs, schwach roth.

6te Ordnung: sehr schwach bläulich grün, sehr schwach roth.

7te Ordnung: ebenso, aber noch schwächer.

In den höheren Ordnungen gehen die Farben mehr und mehr ins rein Weifse über.

Um sich die Zusammensetzungsfolge in diesen Farben anschaulich zu machen, stelle man sich in (Fig. 53.) unter Vv, Ii, Bb,.... Rr die Werthe von d beziehlich für die violetten, indigfarbenen, blauen, grünen, gelben, orangen und rothen Strahlen vor; construire über diese Linien Curven, deren Ordinaten die Intensität der resp. Farben bei einer Dicke repräsentiren, welche der Abscisse (von der

inie VR aus gerechnet) gleich ist, und setze diese Curen über v, i, b... hinaus fort. Die vertikal über 1, 2, , st. errichteten Linien schneiden alsdann aus allen Curen die Ordinaten heraus, welche die zusammengehörigen ntensitäten der Hauptfarben für die Dicken I1, I2, I3... eben. Die Vertikallinie 1, in welcher das Blau einiges Uebergewicht hat, entspricht dem Blaſsblau der ersten Ordnung. Die Linie 2 liegt in der Nähe sämmtlicher Maxima, d. h. das Verhältniſs der Ordinaten ist sehr nahe as der Maxima, und giebt daher intensives Weiſs (das Weiſs erster Ordnung). In der Linie 3 hat das Gelb das Uebergewicht, und die zusammengesetzte Farbe entspricht em Gelb erster Ordnung etc. Die Vertikallinien in II, II, IV, V, welche durch die Minima des Gelb gehen, entprechen der ersten Grenze der Farben zweiter, dritter, ierter, fünfter Ordnung.

Ist aber das Blättchen nicht sehr dünn, so weichen n einiger Entfernung vom Centrum des Gesichtsfeldes die gangunterschiede merklich von denen der Mitte ab, die enternteren Punkte verhalten sich wegen des schiefen Durchanges der Strahlen wie Platten von gröſserer Dicke, und om Mittelpunkt aus nach den Grenzen des Farbenfeldes ird ein Farbenwechsel sichtbar sein, welcher hinsichtlich er Aufeinanderfolge der Newtonschen Scale gleicht. Da er Gangunterschied von dem Geschwindigkeitsverhältniſs, nd dieses von der Lage der gebrochenen Strahlen gegen en Hauptschnitt des Blättchens abhängt und nicht bloſs on der Entfernung von der Mitte, d. h. von der durch ie Schiefe des Durchganges vergröſserten Länge des Wees, so wird nicht in allen von der Mitte gleichweit enternten Punkten der Gangunterschied derselbe, und somit uch nicht die Intensität im homogenen Lichte, und demach die Färbung im weiſsen Lichte dieselbe sein. Die unkte der gröſsten und geringsten Helligkeit im homogeen Lichte liegen in Curven, deren Form für jede Farbe ieselbe ist, deren Entfernung von einander aber bei den eschwinderen (am wenigsten brechbaren) Strahlen geringer

sein mufs, als bei den langsameren. Im weifsen Licht überdecken sich die Curven so, dafs sich ihre Form nur durch die Gleichfarbigkeit ihrer Punkte erkennen läfst. Man nennt sie daher isochromatische Curven. Die Farbenstreifen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Curven, denen im gelben Licht ein Intensitäts-Minimum entspricht, heifsen Farbenringe, sie mögen Ringform haben oder nicht. Die Rechnung, übereinstimmend mit der Erfahrung, zeigt, dafs diese Ringe hyperbolisch sind (siehe Fig. 63.), dafs deren Asymptoten, die Nicols mögen auf einander senkrecht stehen oder parallel sein, sehr nahe rechtwinklig sind, dafs ihr Winkel von dem Hauptschnitt des Blättchens halbirt wird, und dafs die Asymptotenwinkel, in denen der Hauptschnitt liegt, bei positiven Krystallen etwas gröfser, bei negativen etwas kleiner als 90° sind.

Die Intensität der Farbenringe ist am gröfsten, wenn der Hauptschnitt den Winkel der Durchgangs-Ebenen des Nicols halbirt.

Die Entstehung der hyperbolischen Ringform läfst sich auf folgende Weise veranschaulichen. Man betrachte zuerst die Punkte, welche in einer geraden durch die Mitte des Gesichtsfeldes gehenden und auf der Axe des Blättchens senkrechten Linie P liegen, und zwar in homogenem Lichte. Ist der Gangunterschied nicht in der Mitte selbst eine ganze Zahl Wellenlängen, so gehe man von dem der Mitte am nächsten liegenden Punkte (p) der Linie P aus, in welchem derselbe eine ganze Zahl (z. B. n) Wellenlängen beträgt, und welcher daher dunkel erscheint. Sämmtliche Strahlen, die von Punkten der Linie P zu dem senkrecht über der Mitte befindlichen Auge kommen, lagen im Blättchen senkrecht auf der Axe; die Gangunterschiede richten sich nur nach der Länge des Weges im Krystall, d. h. nach der Schiefe der Strahlen gegen die Augenaxe, und somit wachsen sie mit der Entfernung von der Mitte. Es werden daher von Intervall zu Intervall Punkte aufeinanderfolgen, in welchen der Gangunterschied $n+1$, $n+2$, $n+3$ etc. Wellenlängen beträgt, und welche somit wiederum

Dunkelheit zeigen. Geht man nun zu einer Linie über, welche durch die Mitte gehend einen kleinen Winkel mit *P* bildet, so werden die correspondirenden dunklen Punkte derselben in gröſseren Distanzen von einander liegen, da die von den Punkten derselben kommenden Strahlen schiefer gegen die Krystallaxe liegen, und zwar um so schiefer, je weiter sie sich von der Mitte entfernen, so daſs die Gangunterschiede langsamer als in *P* zunehmen. Diese Distanzen vergröſsern sich, wenn man die Neigung der zweiten Linie gegen *P* allmählig wachsen läſst. Bei der Bewegung der zweiten Linie beschreiben die dunklen Punkte daher Curven, welche in der Linie *P* der Mitte am nächsten liegen. Betrachten wir ferner eine Linie *S*, welche durch die Mitte gehend der Axe parallel ist. Je weiter man sich in derselben von der Mitte entfernt, desto kleiner werden die Winkel der betreffenden Strahlen gegen die Axe, und desto kleiner werden daher die Gangunterschiede im Vergleich mit denen auf der Linie *P*. Ueberdieſs folgt, wie durch die Rechnung bestätigt wird, daſs die Gangunterschiede von der Mitte aus abnehmen, während sie auf der Linie *P* zunehmen. Es müssen daher von Intervall zu Intervall Punkte aufeinanderfolgen, in denen diese Unterschiede $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc. Wellenlängen betragen. Man sieht leicht, daſs die Distanzen dieser Punkte wachsen müssen, wenn man die Linie *S* um den Mittelpunkt allmälig dreht, bis zu einer bestimmten Lage, wo das Abnehmen der Gangunterschiede dem Zunehmen derselben das Gleichgewicht hält. Diese Lage ist die der Asymptoten der beiden Hyperbelsysteme, deren groſse Axen die Linien *P* und *S* sind.

Je weniger brechbar die Farbe, d. h. je gröſser deren Wellenlänge ist, desto langsamer variiren die Gangunterschiede und desto breiter werden daher die Ringe; die rothen Hyperbeln stehen deswegen weiter aus einander als die blauen, und bei dem Ueberdecken der Ringe im weiſsen Licht werden die einem und demselben Ringe entsprechenden, den verschiedenen Farben zukommenden Gangun-

in gemischtfarbiges, und zwar in Licht von um so gröfserer Farbenreinheit und von um so gröfserer Lebhaftigkeit, je mehr Farbenstrahlen gänzlich verschwinden. Da nun die Wirkung der Interferenz Aenderung der Intensität ist, so wird jede Interferenz weifses Licht in farbiges verwandeln, sobald nur die Intensitäts-Aenderung sich nicht gleichmäfsig auf alle Farbenstrahlen erstreckt.

Die Bedingungen, dafs zwei Strahlenbündel zur Interferenz kommen, sind 1) dafs beide von derselben Lichtquelle kommen, damit die Schwingungen in beiden von genau gleichartigen Impulsen herrühren, und nicht kleine, nebensächliche Störungen im Gange eine ungleichmäfsige Einwirkung auf die schwingenden Theilchen ausüben; — 2) dafs beide nahe zusammenfallen und der eine dem andern um eine constante Stärke voraus ist; — 3) dafs beide nach derselben Ebene polarisirt sind.

Die zweite dieser Bedingungen wird erfüllt von den gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen nach ihrem Austritt aus einem nicht zu dicken Krystallplättchen mit parallelen Begrenzungsflächen. Dadurch nämlich, dafs die beiderlei Strahlen sich mit ungleicher Geschwindigkeit durch den Krystall hindurch bewegen, befinden sie sich beim Austritt in ungleichen Phasen, und insofern sie nach dem Austritt (in der Luft) sich wiederum mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, behalten sie diesen Phasenunterschied fortan bei. Der Krystall darf deswegen nicht zu dick sein, einerseits weil die mit der Dicke sehr rasch zunehmende Gangverschiedenheit, wie man aus der Erfahrung schliefst, der Reinheit des Effekts, d. h. der genauen Zusammenstimmung in den verschiedenen Phasen Eintrag thut; andrerseits weil dadurch für sehr nahe liegende Paare der zur Interferenz disponirten Strahlenbüschel eine so grofse Verschiedenheit in den Gangunterschieden herbeigeführt werden kann, dafs die verschiedenen Farben einander decken und sich zu weifslichem Licht vereinigen. Um das letztere sich klar zu machen, denke man sich (Fig. 51.) *ab* und *cd* als die Grenzflächen eines Krystallscheibchens, und verfolge

die, zu dem in A befindlich zu denkenden Auge kommenden, Strahlen rückwärts. Ist *AB* die Richtung eines Strahlenpaars, welches von einem gewöhnlich gebrochenen in der Richtung *OB*, und von einem ungewöhnlich gebrochenen in der Richtung *EB* sich bewegenden Strahl herrührt, so sind die zugehörigen einfallenden Strahlen *SO* und *SE*, parallel *AB*, und wenn das Licht von einem sehr entfernten Gegenstande kommt, so dafs sich *SO* und *SE* als zu demselben Lichtpunkt gehörige Strahlen ansehen lassen, so ist die auf *SO* gezogene Senkrechte *EC* eine in der Wellenfläche derselben liegende Linie, und das Licht ist in *C* und *E* in gleicher Phase. Der Unterschied der Zahl der Wellenlängen, die auf dem Wege *EB*, und auf dem Wege *CO*+*OB* liegen, ist der Gangunterschied beider Strahlen bei ihrer Ankunft in *B*. Ist ferner *AG* ein zweites Strahlenpaar, welches vor dem Eintritt in den Krystall die parallelen Richtungen *TH* und *TI* hatte, so ist der Gangunterschied, wie man leicht übersieht, wegen des schieferen Einfalls im Allgemeinen gröfser als beim vorigen Paar, und zwar um so gröfser, je gröfser *BG* und je gröfser die Dicke des Scheibchens ist. Wenn nun der Gangunterschied des Paares *AG* den des Paares *AB* um eine halbe Wellenlänge übertrifft (homogenes Licht vorausgesetzt), so ist, wenn die Paare zur Interferenz kommen, und z. B. die Schwingungsbewegungen in *BA* sich aufheben, in *AG* die gröfste Lichtverstärkung. Da endlich die Entfernung *BG* um so geringer sein mufs, je gröfser die Dicke ist, so werden bei einer bestimmten Dicke *G* und *B* so nahe liegen, dafs die Dunkelheit des Punktes *B* wegen der grofsen Nähe des hellen Punktes *G* für das in *A* befindliche Auge nicht mehr wahrnehmbar ist.

Insofern der Gangunterschied mit dem Geschwindigkeitsunterschied der beiderlei Strahlen zugleich wächst, so wird, wenn die durch den Krystall gehenden Strahlen nur kleine Winkel mit den optischen Axen bilden, wegen der nahe gleichen Geschwindigkeit, die Dicke bedeutender sein dürfen; aus demselben Grunde wird bei schwach doppel-

brechenden Krystallen allgemein nicht eine so grofse Dünnheit erfordert werden, als bei stark doppelbrechenden.

Aus der Nothwendigkeit der Erfüllung der dritten Bedingung folgt, dafs unmittelbar nach dem Austritt aus dem krystallinischen Plättchen keine Interferenz möglich ist, da die Doppelstrahlen, welche gleiche Richtung haben, senkrecht oder wenigstens nahe senkrecht auf einander polarisirt sind, und daher im Allgemeinen elliptische Schwingungen erzeugen. Um sie zur Interferenz zu bringen, darf man die austretenden Strahlen nur durch einen neuen doppelbrechenden Krystall leiten, in welchem sich jedes Strahlenpaar (wie in der vorigen Figur das Paar *BA* und das Paar *GA*) in einen gewöhnlichen und einen ungewöhnlichen Strahl theilt, so dafs ein Theil der im Gange differirenden Schwingungen sich nach der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen, der andere Theil nach der Polarisations-Ebene des ungewöhnlichen Strahls wendet, und zwei Lichtportionen sich bilden, deren jede nach einer einzigen Ebene polarisirte aber in verschiedenen Phasen befindliche Theile enthält. Um diese Lichtportionen von einander zu scheiden, mufs man entweder den Krystall von bedeutender Dicke nehmen, damit eine hinlängliche Divergenz bewirkt werde, oder ein Nicol'sches Prisma, oder einen Turmalin anwenden, damit die eine am Durchgang gehindert werde. Statt durch Brechung in einem Krystall kann man auch durch Reflexion unter dem Polarisationswinkel die Schwingungen der austretenden Strahlenpaare auf eine einzige Polarisations-Ebene zurückführen.

Endlich scheint schon eine regelmäfsige Schwingungsweise des Lichtes vor dem Eintritt in das Krystallplättchen nöthig zu sein, da die Interferenz-Erscheinungen ausbleiben, wenn dasselbe nicht schon nach einer und derselben Ebene polarisirt einfällt.

Zur Erzeugung der Interferenz-Erscheinungen gebraucht man am bequemsten entweder die Verbindung der beiden Polarisationsspiegel mit dem Rohr (p. 170.), dessen Axe unter dem Complement des Polarisationswinkels gegen die

Spiegel-Ebene geneigt ist (Biotscher Polarisationsapparat), indem man das die Interferenz bedingende Krystallplättchen in dem Rohr anbringt; oder zwei hintereinander aufgestellte Nicol'sche Prismen, zwischen denen das Plättchen aufgestellt wird (Dove'scher Polarisationsapparat). Der erste Spiegel oder das erste Prisma dient zur vorläufigen linearen Polarisation, der zweite Spiegel oder das zweite Prisma zur Zurückführung des durch das Plättchen gegangenen Lichtes auf dieselbe Polarisations-Ebene. Die beiden Prismen lassen sich auch durch der Axe parallel geschnittene Turmaline ersetzen *).

In der Folge soll der Einheit der Redeweise wegen immer der Apparat mit den Prismen vorausgesetzt werden. Ferner sollen, um schleppende Wiederholungen zu vermeiden, folgende abkürzende Bezeichnungen angewendet werden:

Das erste Nicol sei dasjenige Nicol'sche Prisma, welches das Licht dem Krystall zuführt, und welches man auch wohl das polarisirende Prisma nennt; das zweite Nicol sei das andere Prisma, welches das den Krystall verlassende Licht zum Auge führt, und welches man auch analysirendes Prisma nennt. Unter dem »Winkel der Nicols« sei derjenige Winkel verstanden, welchen die Durchgangs-Ebenen, d. h. die Polarisations-Ebenen der die Prismen allein durchdringenden ungewöhnlichen Strahlen mit einander bilden, und welcher dem Winkel zwischen den Reflexions-Ebenen der beiden Spiegel im Biotschen Apparat entspricht. In diesem Sinne ist auch das parallel Sein und das einander senkrecht Kreuzen der Nicols zu verstehen.

Endlich ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, die Krystallplatte, welche die Interferenz-Erscheinungen hervorbringt, mit seinen beiden (parallelen) Grenzflächen senkrecht auf der geometrischen Axe der beiden Nicols zu denken.

---

*) Das Nähere über die Polarisationsapparate siehe am Schlusse des zweiten Bandes.

brechenden Krystallen allgemein nicht ein
heit erfordert werden, als bei stark dopp

Aus der Nothwendigkeit der Erf
dingung folgt, dafs unmittelbar nach
krystallinischen Plättchen keine Int
die Doppelstrahlen, welche gleic
recht oder wenigstens nahe se
sirt sind, und daher im Allge
gen erzeugen. Um sie zu
man die austretenden Stra
pelbrechenden Krystall
lenpaar (wie in der ... mo-
Paar *GA*) in einen ... weite Prisma
chen Strahl theilt, ... gleich erhellt, und
renden Schwingu ... kten wegen des überall
des gewöhnliche ... sämmtlicher Farben, gleich
Ebene des un ... man das Scheibchen in seiner
portionen si ... die Farbe nicht ändern, da die Gang-
polarisirte ... senkrecht durch das Blättchen gehenden
enthält ... en sich gar nicht, also die der benachbarten
den, ... sich nur unmerklich ändern. In den beiden Stel-
Dicke ... indefs, in welchen der Hauptschnitt des Blättchens
wer Durchgangs-Ebene des ersten Nicols parallel ist oder
au derselben senkrecht steht, wird das Licht im Krystall
einfach gebrochen, und es kann zu keiner Interferenz
kommen. Dasselbe findet statt, wenn der Hauptschnitt eine
gleiche Lage gegen das zweite Nicol einnimmt, weil dann
von den das Blättchen verlassenden Doppelstrahlen nur der
eine von dem Prisma durchgelassen wird. Es wird daher
bei einer vollständigen Umdrehung des Blättchens 8 mal das
Licht so erscheinen, als ob kein Blättchen vorhanden wäre,
wenn die Nicols schief gegen einander geneigt sind; 4 mal,
wenn sie einander parallel sind, oder auf einander senk-
recht stehen. Im letzteren Fall erscheint natürlich das Ge-
sichtsfeld in den letzten 2 Stellungen völlig dunkel, da die
vom Blättchen einfachgebrochenen Strahlen vom zweiten
Prisma nicht durchgelassen werden.

ir im einer Zwischenstellung (Figur 52.) *OP*
ch als Richtungen der Durchgangs-Ebe-
zweiten Prisma, *OH* als Hauptschnitt
H_1 als darauf senkrecht, so zerlegen
ch *OP* gerichteten Schwingungen
reinigen sich im zweiten Prisma
im Moment des Eintritts in
H_1 und *H* gerichtet sind.
ene des zweiten Prisma's
, so würden sich die
nach OP_4, die nach
wenden. Es würden dem-
OP_4 gerichteten Schwingungen
Richtungen erfolgen, und da die
. Oscillationsdauer vergeht, ehe die von *O*
ende Bewegung in die entsprechende von *O*
gehende übergeht, so verhalten sich die Bewegun-
gen so, als ob zu dem Gangunterschiede, welchen die Strahlen beim Eintritt in das zweite Nicol haben, noch eine halbe Wellenlänge hinzukäme. Die Gangunterschiede der interferirenden Strahlen sind daher für je zwei auf einander senkrechte Stellungen des zweiten Prisma's um eine halbe Wellenlänge verschieden, und mithin ist das Gesichtsfeld, wenn es in der einen Stellung in homogenem Licht dunkel ist, in der andern im Maximum der Helligkeit. In weifsem Licht ist es wegen des verschiedenen Intensitätsverhältnisses der einzelnen Farbenstrahlen verschieden gefärbt, und zwar so, dafs sich die beiden Färbungen zu weifsem Licht ergänzen, also complementar sind. Zu demselben Schlufs kommt man, wenn man annimmt, dafs beim Eintritt in das zweite Prisma die Schwingungen statt nach OH_1 nach OH_2 gerichtet sind.

Betrachten wir jetzt die Aenderung der Farbe bei zunehmender Dicke des Blättchens.

Stehen die Nicols auf einander senkrecht, ist also das Gesichtsfeld dunkel, wenn man das Blättchen fortnimmt, und wendet man homogenes Licht an, so bleibt jenes dun-

kel, sobald das Blättchen eine solche Dicke d hat, dafs der Gangunterschied eine Wellenlänge ist. Es bleibt aber dann auch dunkel, wenn die Dicke $2d$, $3d$, $4d$.... ist, weil sich der Gangunterschied um ebensovielmal vervielfacht. Da ferner jeder anderen Farbe ein anderer Werth von d entspricht, so wird im weifsen Lichte bei keiner Dicke Dunkelheit eintreten, und es werden die Farben vorherrschen, deren Intensität bei der betreffenden Dicke ihrem Maximum am nächsten sind. Da das Verhältnifs der Werthe von d, in dem Verhältnifs der Wellenlängen stehend, von Substanz zu Substanz sich wenig ändert, so wird die Farbenfolge bei zunehmender Dicke eine regelmäfsige, und für alle Substanzen nahe dieselbe sein. Man nennt diese Folge der Farben die Newtonsche Scale, in welcher verschiedene Ordnungen unterschieden werden, und welche (wenn man das Verhältnifs der Wellenlängen in der Luft zum Grunde legt) folgende ist:

1te Ordnung: schwarz (bei $d = 0$), blafsblau, lebhaft weifs, gelb, orange, roth.

2te Ordnung: violett, blau, gelblich grün, gelb, roth.

3te Ordnung: purpur, indig-blau, glänzend grün, lebhaft gelb, rosa, carmoisin.

4te Ordnung: bläulich grün, blafs gelblich roth, schwach roth.

5te Ordnung: sehr schwach grün, weifs, schwach roth.

6te Ordnung: sehr schwach bläulich grün, sehr schwach roth.

7te Ordnung: ebenso, aber noch schwächer.

In den höheren Ordnungen gehen die Farben mehr und mehr ins rein Weifse über.

Um sich die Zusammensetzungsfolge in diesen Farben anschaulich zu machen, stelle man sich in (Fig. 53.) unter Vv, Ii, Bb,.... Rr die Werthe von d beziehlich für die violetten, indigfarbenen, blauen, grünen, gelben, orangen und rothen Strahlen vor; construire über diese Linien Curven, deren Ordinaten die Intensität der resp. Farben bei einer Dicke repräsentiren, welche der Abscisse (von der

inie *VR* aus gerechnet) gleich ist, und setze diese Curen über *v*, *i*, *b*... hinaus fort. Die vertikal über 1, 2, ,3... errichteten Linien schneiden alsdann aus allen Curen die Ordinaten heraus, welche die zusammengehörigen ntensitäten der Hauptfarben für die Dicken I1, I2, I3... eben. Die Vertikallinie 1, in welcher das Blau einiges Jebergewicht hat, entspricht dem Blafsblau der ersten Ordnung. Die Linie 2 liegt in der Nähe sämmtlicher Maxima, d. h. das Verhältnifs der Ordinaten ist sehr nahe das der Maxima, und giebt daher intensives Weifs (das Weifs erster Ordnung). In der Linie 3 hat das Gelb das Uebergewicht, und die zusammengesetzte Farbe entspricht dem Gelb erster Ordnung etc. Die Vertikallinien in II, III, IV, V, welche durch die Minima des Gelb gehen, entsprechen der ersten Grenze der Farben zweiter, dritter, vierter, fünfter Ordnung.

Ist aber das Blättchen nicht sehr dünn, so weichen in einiger Entfernung vom Centrum des Gesichtsfeldes die Gangunterschiede merklich von denen der Mitte ab, die entfernteren Punkte verhalten sich wegen des schiefen Durchganges der Strahlen wie Platten von gröfserer Dicke, und vom Mittelpunkt aus nach den Grenzen des Farbenfeldes wird ein Farbenwechsel sichtbar sein, welcher hinsichtlich der Aufeinanderfolge der Newtonschen Scale gleicht. Da der Gangunterschied von dem Geschwindigkeitsverhältnifs, und dieses von der Lage der gebrochenen Strahlen gegen den Hauptschnitt des Blättchens abhängt und nicht blofs von der Entfernung von der Mitte, d. h. von der durch die Schiefe des Durchganges vergröfserten Länge des Weges, so wird nicht in allen von der Mitte gleichweit entfernten Punkten der Gangunterschied derselbe, und somit auch nicht die Intensität im homogenen Lichte, und demnach die Färbung im weifsen Lichte dieselbe sein. Die Punkte der gröfsten und geringsten Helligkeit im homogenen Lichte liegen in Curven, deren Form für jede Farbe dieselbe ist, deren Entfernung von einander aber bei den geschwinderen (am wenigsten brechbaren) Strahlen geringer

sein mufs, als bei den langsameren. Im weifsen Licht überdecken sich die Curven so, dafs sich ihre Form nur durch die Gleichfarbigkeit ihrer Punkte erkennen läfst. Man nennt sie daher isochromatische Curven. Die Farbenstreifen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Curven, denen im gelben Licht ein Intensitäts-Minimum entspricht, heifsen Farbenringe, sie mögen Ringform haben oder nicht. Die Rechnung, übereinstimmend mit der Erfahrung, zeigt, dafs diese Ringe hyperbolisch sind (siehe Fig. 63.), dafs deren Asymptoten, die Nicols mögen auf einander senkrecht stehen oder parallel sein, sehr nahe rechtwinklig sind, dafs ihr Winkel von dem Hauptschnitt des Blättchens halbirt wird, und dafs die Asymptotenwinkel, in denen der Hauptschnitt liegt, bei positiven Krystallen etwas gröfser, bei negativen etwas kleiner als 90° sind.

Die Intensität der Farbenringe ist am gröfsten, wenn der Hauptschnitt den Winkel der Durchgangs-Ebenen des Nicols halbirt.

Die Entstehung der hyperbolischen Ringform läfst sich auf folgende Weise veranschaulichen. Man betrachte zuerst die Punkte, welche in einer geraden durch die Mitte des Gesichtsfeldes gehenden und auf der Axe des Blättchens senkrechten Linie P liegen, und zwar in homogenem Lichte. Ist der Gangunterschied nicht in der Mitte selbst eine ganze Zahl Wellenlängen, so gehe man von dem der Mitte am nächsten liegenden Punkte (p) der Linie P aus, in welchem derselbe eine ganze Zahl (z. B. n) Wellenlängen beträgt, und welcher daher dunkel erscheint. Sämmtliche Strahlen, die von Punkten der Linie P zu dem senkrecht über der Mitte befindlichen Auge kommen, lagen im Blättchen senkrecht auf der Axe; die Gangunterschiede richten sich nur nach der Länge des Weges im Krystall, d. h. nach der Schiefe der Strahlen gegen die Augenaxe, und somit wachsen sie mit der Entfernung von der Mitte. Es werden daher von Intervall zu Intervall Punkte aufeinanderfolgen, in welchen der Gangunterschied $n+1$, $n+2$, $n+3$ etc. Wellenlängen beträgt, und welche somit wiederum

Dunkelheit zeigen. Geht man nun zu einer Linie über, welche durch die Mitte gehend einen kleinen Winkel mit P bildet, so werden die correspondirenden dunklen Punkte derselben in gröfseren Distanzen von einander liegen, da die von den Punkten derselben kommenden Strahlen schiefer gegen die Krystallaxe liegen, und zwar um so schiefer, je weiter sie sich von der Mitte entfernen, so dafs die Gangunterschiede langsamer als in *P* zunehmen. Diese Distanzen vergröfsern sich, wenn man die Neigung der zweiten Linie gegen *P* allmählig wachsen läfst. Bei der Bewegung der zweiten Linie beschreiben die dunklen Punkte daher Curven, welche in der Linie *P* der Mitte am nächsten liegen. Betrachten wir ferner eine Linie *S*, welche durch die Mitte gehend der Axe parallel ist. Je weiter man sich in derselben von der Mitte entfernt, desto kleiner werden die Winkel der betreffenden Strahlen gegen die Axe, und desto kleiner werden daher die Gangunterschiede im Vergleich mit denen auf der Linie *P*. Ueberdiefs folgt, wie durch die Rechnung bestätigt wird, dafs die Gangunterschiede von der Mitte aus abnehmen, während sie auf der Linie *P* zunehmen. Es müssen daher von Intervall zu Intervall Punkte aufeinanderfolgen, in denen diese Unterschiede $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc. Wellenlängen betragen. Man sieht leicht, dafs die Distanzen dieser Punkte wachsen müssen, wenn man die Linie *S* um den Mittelpunkt allmälig dreht, bis zu einer bestimmten Lage, wo das Abnehmen der Gangunterschiede dem Zunehmen derselben das Gleichgewicht hält. Diese Lage ist die der Asymptoten der beiden Hyperbelsysteme, deren grofse Axen die Linien *P* und *S* sind.

Je weniger brechbar die Farbe, d. h. je gröfser deren Wellenlänge ist, desto langsamer variiren die Gangunterschiede und desto breiter werden daher die Ringe; die rothen Hyperbeln stehen deswegen weiter aus einander als die blauen, und bei dem Ueberdecken der Ringe im weifsen Licht werden die einem und demselben Ringe entsprechenden, den verschiedenen Farben zukommenden Gangun-

terschiede nahe in dem Verhältnifs der respectiven Wellenlängen stehen, so dafs er einer bestimmten Farbe der Newtonschen Scale correspondirt. Ist demnach für die gelben Hyperbeln $n = 3$, so werden die Farben in der Newtonschen Folge von der dritten Ordnung anfangen. Uebersteigt n eine bestimmte Gröfse, wie es sehr bald bei stark doppelbrechenden Krystallen, wie beim Kalkspath, eintritt, so haben die Ringe das Weifs der höhern Ordnungen, und es läfst sich gar kein Farbenunterschied mehr bemerken. Die Ringe sind mithin dann nur in homogenem Licht bemerkbar.

Da bei dünnen Blättchen die austretenden gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen, welche demselben Einfallsstrahl angehören, wegen der Kürze des Weges sich nicht merklich trennen, und dieselben senkrecht gegen einander polarisirt sind, so setzen sie sich nach dem Austritt in Folge der Gangdifferenzen zu elliptisch polarisirtem Licht zusammen. Ist das Blättchen positiv, so eilen in den Hyperbelsystemen, welche von der Linie P durchschnitten werden, die gewöhnlichen Strahlen den ungewöhnlichen mehr voraus; in den andern Hyperbelsystemen dagegen weniger, als in der Mitte des Gesichtsfeldes. Wenn nun das Scheibchen dünn genug ist, um das ganze Gesichtsfeld einfarbig erscheinen zu lassen, so dafs also der Gangunterschied überall fast gleich ist, so ist wegen des oben (p. 361) erwähnten Hinzutretens einer halben Undulation in dem einen Strahlensystem das Licht in denjenigen beiden einander gegenüberliegenden Quadranten, welche durch das Zwischentreten des zweiten Nicols die einen Hyperbelsysteme bilden, nach dem Austritt aus dem Scheibchen rechts elliptisch, wenn es in den anderen Quadranten links elliptisch polarisirt ist. Beträgt der Phasenunterschied eine ungerade Zahl Viertel-Undulationen, und ist der Hauptschnitt 45° gegen das erste Nicol geneigt, so dafs die gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen gleiche Intensität erhalten, so werden die Strahlen circular polarisirt, und zwar in dem einen Quadrantenpaar rechts circular, in dem andern

links circular. Ist dagegen das Scheibchen negativ, so sind in dem von der Linie *P* halbirten Quadranten die ungewöhnlichen Strahlen die voraneilenden. Wo also im vorigen Fall das Licht rechts circular polarisirt heraustritt, tritt es hier unter gleichen Umständen links circular heraus, und umgekehrt.

Wendet man statt einer einzigen Krystallplatte zwei übereinandergelegte an, so versteht es sich von selbst, dafs sie wie eine einzige wirken werden, welche so dick ist, wie beide zusammengenommen, sobald die Hauptschnitte beider parallel liegen. Kreuzen sich aber die Hauptschnitte senkrecht, so werden die senkrecht einfallenden Strahlen, welche im ersten Krystall gewöhnlich gebrochen sind, im zweiten nur ungewöhnlich gebrochen, und die ungewöhnlichen nur gewöhnlich. In jedem Strahlenpaar werden daher die Geschwindigkeiten umgewechselt; der resultirende Gangunterschied ist mithin die Differenz der Gangunterschiede, welche aus dem Durchgang durch jede einzelne Platte hervorgehen. Und da sich die Gangunterschiede wie die Dicken verhalten, so verhält sich ein Plattenpaar wie eine einzige Platte, deren Dicke dem Unterschiede derer der einzelnen gleich ist. Bei gleicher Dicke beider geben daher die senkrecht einfallenden Strahlen wegen des Verschwindens des Gangunterschiedes gar kein Licht oder weifses Licht, je nachdem die Nicols senkrecht auf einander oder einander parallel liegen. Bei der ersten Stellung ist demnach die Mitte dunkel. Da ferner auch die im Hauptschnitt und die senkrecht gegen denselben einfallenden Strahlen so gebrochen werden, dafs der eine nach der Einfalls-Ebene, der andere senkrecht darauf polarisirt ist, so kehrt sich auch bei ihnen die Ordnung der (unter sich constant bleibenden) Geschwindigkeiten um, und es bildet sich ein Kreuz, welches mit der Mitte gleichfarbig ist und dessen Arme mit dem Hauptschnitte Winkel von 45° bilden. Dieses Kreuz bildet die Asymptoten eines Paares gleichseitig-hyperbolischer Ringsysteme, wie sie in Fig. 55. für gleich dicke Platten bei senkrechter Kreuzung der Nicols dargestellt sind.

Hier, wie bei allen folgenden Farben-Erscheinungen, verwandeln sich die Farben nach einer Drehung des zweiten Nicols um 90° in die complementaren. Sind die Blättchen sehr dünn, so dafs sich die Centralfarbe über das ganze Gesichtsfeld ausbreitet, so entspricht diese natürlich der Farbe eines einzigen Blättchens, dessen Dicke der Differenz der beiden übereinandergelegten gleich ist.

2) Erscheinungen in krystallinischen Blättchen, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Axe geschnitten sind.

Für dünne Blättchen gilt ganz Aehnliches, wie im vorigen Fall. Bei gröfserer Dicke dagegen erscheinen statt der Hyperbeln geradlinige Farbenstreifen, welche senkrecht auf dem Hauptschnitt stehen und gleich weit von einander entfernt sind. Die Breite der Streifen nimmt mit zunehmender Dicke ab, und ist um so geringer, je gröfser die doppelbrechende Kraft ist. Kalkspathblättchen müssen daher schon sehr dünn sein, wenn man die Streifen noch erkennen soll. Ueberdies sind die Gangunterschiede selbst für das Centrum so bedeutend, dafs sie das Weifs der höhern Ordnungen der Newtonschen Scale liefern, dafs also die Färbung verschwindet und die Streifen nur in homogenem Lichte sichtbar sind.

Legt man zwei Krystallblättchen über einander, so dafs die Hauptschnitte mit einander einen rechten Winkel, und mit den auf einander senkrechten Durchgangs-Ebenen der Nicols einen Winkel von 45° bilden, so erscheinen gleich breite geradlinige Farbenstreifen, welche dem einen der Nicols parallel sind. Sind beide Platten gleich dick, so ist der mittlere Streifen schwarz, und von ihm aus folgen die Farben in der Ordnung der Newtonschen Scale.

3) Er-

3) Erscheinungen in Krystallen, welche senkrecht gegen die Axe geschnitten sind.

Da das Licht in allen gegen die Axe gleich geneigten Richtungen sich gleich verhält, so bilden die Strahlenpaare, welche von gleichen Gangunterschieden sind, Kegelflächen, welche die Austrittsfläche in concentrischen Kreisen schneiden. Es werden daher im Gesichtsfelde concentrische kreisförmige Farbenringe erscheinen, deren Farben von der Mitte aus der Ordnung in der Newtonschen Scale folgen. Die senkrecht auffallenden Strahlenpaare (welche durch die Mitte des Farbenfeldes gehen) bleiben nach der Brechung der Axe parallel, haben daher gleiche Geschwindigkeit und unterscheiden sich nicht im Gange, so dafs die Mitte ungefärbt, und zwar dunkel oder hell erscheint, je nachdem nach der Fortnahme des Krystalls das Gesichtsfeld dunkel oder hell ist. Da ferner die Einfalls-Ebenen mit den Hauptschnitten zusammenfallen, und diese das Farbenfeld in geraden durch die Mitte gehenden Richtungen durchschneiden, so sind sämmtliche Strahlen nach der Richtung der Radien und senkrecht darauf polarisirt, und es wird keine Interferenz, also auch keine Färbung stattfinden 1) in denjenigen beiden Radien, welche in der Durchgangsrichtung des ersten Nicols liegen, und in den darauf senkrechten, weil alsdann nur eine einfache Brechung stattfindet; 2) in denjenigen beiden Radien, welche in der Durchgangsrichtung des zweiten Nicols liegen und in den darauf senkrechten, weil alsdann nur eines der senkrecht auf einander polarisirten Strahlensysteme durchgelassen wird. Bilden die Nicols einen Winkel von 45°, so werden jene 8 ungefärbten Radien das Farbenfeld in 8 gleiche Oktanten theilen. Ist dieser Winkel 0° oder 90°, so fallen die Radien paarweise zusammen, und erlangen in jenem Fall ihre gröfste Helligkeit, in diesem sind sie völlig dunkel. In der Nähe dieser Radien ist in letzterem Falle die Intensität der Farben sehr gering, so daf sich die einander senkrecht kreuzenden Radien zu einem dunklen Kreuz ausdehnen, des-

sen Arme von der Mitte aus an Breite zunehmen, und aus deren verwaschenen Rändern allmälig die Ringfarben auftauchen. Siehe Fig. 65.

Bei paralleler Stellung der Nicols sind die Farben die complementaren; die Ringe sind also von einem weifsen Kreuz unterbrochen, in welches hinein sich die Ringe allmälig verlieren. Siehe Fig. 66.

Dreht man das zweite Nicol aus der ersten Stellung, so bilden sich mit allmälig wachsender Intensität in den dunklen Armen Farbenringe, welche den angrenzenden Farbenringen complementar werden, bis sie bei einer Drehung von 45° das Ansehen der Fig. 67. haben, in welcher die an einander grenzenden Oktanten Theile einander complementarer Ringsysteme zeigen.

Modificirt werden diese Ringsysteme, wenn das einfallende Licht nicht linear, sondern circular oder elliptisch polarisirt ist.

Man bewerkstelligt dies dadurch, dafs man ein der Axe parallel geschnittenes sehr dünnes Krystallblättchen zwischen dem ersten Nicol und der betreffenden Krystallplatte anbringt *).

Soll das einfallende Licht circular polarisirt sein, so nimmt man am besten ein Blättchen von solcher Dünne, dafs die gelben Strahlen beim Austritt um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge differiren (in welchem Fall dasselbe zwischen den Nicols das Weifs der ersten Ordnung zeigt). Giebt man dann dem Hauptschnitt eine Neigung von 45° gegen das erste Nicol, so ist das gelbe Licht circular polarisirt, und die übrigen Strahlen weichen weniger von der vollkommen circularen Polarisation ab, als bei jeder andern Dicke. Nähme man z. B. die Dicke so, dafs das rothe Licht durch einen Phasenunterschied von $\frac{3}{4}$ Undulationen circular wird, so wird das Blau linear und das äufserste Violett entgegensetzt cir-

*) Man pflegt dazu ein Glimmerblättchen anzuwenden, weil der Glimmer sich sehr fein spalten läfst. Dieser Krystall ist zwar (in der Regel) zweiaxig, allein das austretende Licht verhält sich in Bezug auf die Polarisationsart wie bei einaxigen Krystallen.

lar. Wird das Roth durch einen Gangunterschied von Undulationen circular, so wird das Gelb linear, die Grenze s Blau und Indigo entgegengesetzt circular, und der Anng des Violett senkrecht darauf linear. — Statt eines solen Krystallblättchens läfst sich auch ein Fresnelsches Glasrallelepiped anwenden, welches so aufgestellt ist, dafs die stretenden Strahlen senkrecht in den Krystall fallen, seine ıstrittsfläche also dem letzteren parallel ist. Will man zur Darstellung circular polarisirten Lichtes benutzen, mufs man das Licht unter demjenigen Winkel total rektiren lassen, unter welchem das gelbe Licht circular porisirt wird, und das erste Nicol so aufstellen, dafs dessen urchgangs-Ebene einen Winkel von 45° mit der Reflexionsbene bildet.

Es erscheint alsdann ein schmales mattes weifses Kreuz, n welchem zwei Arme parallel der Polarisations-Ebene s zweiten Nicol, die andern beiden darauf senkrecht sind; il in diesen Richtungen nur ein Strahl durchgelassen wird, ie Ringe sind natürlich wieder concentrisch, die Farben tzen sich aber beim Uebergang aus einem Quadranten in andern in die complementaren um, so dafs die Ringe zwei gegenüberstehenden Quadranten gegen die der beiden andern Quadranten um eine halbe Ringbreite verschoben scheinen. Siehe Fig. 68.

Das circular polarisirende Blättchen bewirkt also in zwei uadranten ein Vorwärtsschieben der Ringe um ¼ Ringbreite, den zwei andern ein Rückwärtsschieben um dieselbe Breite. ie Verschiebung in dem einen Quadrantenpaar rührt von m aus dem Blättchen tretenden sich rechts circular verltenden Licht, die entgegengesetzte Verschiebung in den dern Quadranten von dem sich links circular verhaltenden cht her. Das Vor- und Rückwärts hängt von dem Positivd Negativ-Sein des Blättchens und des senkrecht gegen e Axe geschnittenen Krystalls ab. Das Rückwärts hat inen Grund in der Addition der Gangunterschiede, das orwärts in deren Subtraktion. Dreht man daher das Blättn um 90°, so dafs sein Hauptschnitt statt +45°, —45°

gegen das erste Nicol geneigt ist (oder dreht man das erste Nicol bei der Anwendung des Parallelepipeds so, dafs es statt + 45°, — 45° gegen die Reflexions-Ebene geneigt ist) so kommt von den Stellen rechts circulares Licht her, von denen vorher links circulares kam, und umgekehrt; diejenigen Quadranten, in denen vorher die Ringe vorwärts geschoben waren, haben daher alsdann rückwärts geschobene Ringe, und umgekehrt. Bringt man das Blättchen statt zwischen das erste Nicol und den Krystall, zwischen den Krystall und das zweite Nicol (man nennt dies circulare Analyse bei linearer Polarisation), so kehrt sich alles um; wo vorher die Ringe vorgeschoben waren, sind sie dann zurückgeschoben, und vorgeschoben, wo sie zurückgeschoben waren. Bringt man endlich vor den Krystall sowohl als hinter demselben ein circular polarisirendes Blättchen an (man nennt dies circulare Analyse bei circularer Polarisation), und zwar so, dafs ihre Hauptschnitte einander parallel sind, oder sich senkrecht kreuzen, so müssen natürlich die von dem einen Blättchen vorgeschobenen Ringe von dem andern Blättchen wieder zurückgeschoben werden. Man sieht daher vollkommen ununterbrochene kreisförmige Ringe, welche sich von denen im linearen Licht durch das Fehlen des Kreuzes unterscheiden. — Ueberall setzen sich aber die Farben in die complementaren um, wenn man das zweite Nicol um 90° verdreht.

Man sieht den allmäligen Uebergang der Figur 65 in die Figur 68, wenn man sie die Zwischenformen durchgehen läfst, die entstehen, wenn man das Einfallslicht aus dem Linearen durch das Elliptische allmälig zum Kreisförmigen übergehen läfst. Man erreicht dies dadurch, dafs man das Blättchen in seiner Ebene dreht, oder bei der Anwendung des Glasparallelepipeds, wenn man durch Drehen des ersten Nicols das Azimuth des Einfallslichtes ändert. Zuerst öffnet sich das Kreuz in der Mitte (in der horizontalen oder der vertikalen Richtung, je nachdem das Licht links oder rechts elliptisch polarisirt ist), die sich trennenden hyperbelähnlichen Zweige hellen sich mehr und

mehr auf, und die Ringe in den 4 Quadranten verschieben sich allmälig weiter und weiter. Siehe Fig. 69.

) Erscheinungen in senkrecht gegen die Axe geschnittenen Bergkrystallen.

Da sich das senkrecht gegen die Axe bewegende Licht im Bergkrystall, wie in den normalen einaxigen Krystallen verhält, so können die Interferenz-Erscheinungen in der Axe parallel geschnittenen Krystallblättchen von den oben beschriebenen nicht abweichen. In senkrecht gegen die Axe geschnittenen Platten dagegen treten Modificationen ein. Die Mitte kann im weifsen Lichte nie dunkel oder farblos erscheinen, da auch die Centralstrahlen wegen der ungleichen Geschwindigkeit zur Interferenz disponirt werden. Insofern nämlich die austretenden Centralstrahlen linear polarisirt sind, wird bei homogenem Lichte die Mitte dunkel, wenn die Durchgangs-Ebene des zweiten Nicols senkrecht auf deren Polarisations-Ebene steht. Da aber diese letztere gegen die Polarisations-Ebene des Einfallslichtes geneigt ist, so wird dieses Dunkel nicht bei senkrechter Kreuzung der Nicols eintreten, vielmehr mufs das zweite um einen Winkel gedreht werden, welcher der durch die Brechung im Krystall hervorgebrachten Drehung der Polarisations-Ebene gleich ist; und zwar nach rechts oder links, je nachdem der Krystall rechts- oder linksdrehend ist. Da nun der Drehungswinkel für verschiedene Farben verschieden ist, so wird im weifsen Licht bei keiner Stellung der Nicols das Licht aus der Mitte ganz verschwinden. Ferner mufs das dunkle und das weifse Kreuz der übrigen einaxigen Krystalle in den Normalstellungen der Nicols wegfallen, da die austretenden Strahlen elliptisch polarisirt sind, und demnach nicht gänzlich am Durchgange durch das Nicol gehindert werden können. Da aber in einiger Entfernung von der Mitte die Polarisationsart sich der linearen nähert, so erscheinen dort dunkle die Farbenringe gleichsam beschattende Büschel als Andeutungen des verschwundenen dunklen Kreuzes. Siehe die Figur 70.

Die Ringe selbst sind nur dann vollkommen kreisförmig, wenn die Nicols einander parallel oder auf einander senkrecht stehen; bei der Drehung des zweiten Nicols nehmen sie allmälig eine quadratähnliche Form an, indem sie sich in der den Winkel zwischen den Durchgangs-Ebenen der Nicols halbirenden und der darauf senkrechten Richtung ausbiegen. Nach einer Drehung von 45° kehren sie allmälig in die Kreisform zurück. Während der Drehung nach der Rechten scheinen sich die Ringe bei rechtsdrehenden Krystallen allmälig zu erweitern, bei linksdrehenden zu verengern. Das Umgekehrte tritt beim Drehen nach der Linken ein. In der Mitte innerhalb des ersten Ringes erscheint ein farbiges kurzarmiges Kreuz, dessen Farbe von der Dicke der Platte abhängt und sich mit der Drehung ändert. Siehe Fig. 71. Bei dünnen Platten geht bei rechtsdrehenden Individuen die Farbe dieses Kreuzes beim Drehen nach rechts hin aus dem Blauen durch das Violett zum Gelb über; bei linksdrehenden resultirt dieselbe Farbenfolge beim Drehen nach der Linken.

War das einfallende Licht circular polarisirt, so erscheint die Mitte weifs, und das Gesichtsfeld ist von zwei spiralförmig in einander gewundenen Farbenringen durchzogen, welche in zwei einander gegenüberliegenden Punkten des weifsen Mittelfleckes ihren Ausgang nehmen, bei rechtsdrehenden Krystallen nach links, bei linksdrehenden nach rechts gewunden sind, und ähnlich wie die Ringe der vorigen Figur in auf einander senkrechten Richtungen ausgebogen sind. Siehe Fig. 72. Liegen die Ausgangspunkte der beiden Spiralen in einer horizontalen Linie, während der Hauptschnitt des circular polarisirenden Blättchens im Azimuth +45° sich befindet, so liegen dieselben in einer vertikalen Linie, wenn der Hauptschnitt im Azimuth —45° liegt, also wenn das Blättchen um 90° gedreht wird. Bei circularer Analyse und linearer Polarisation verhält es sich umgekehrt, d. h. das Blättchen wirkt im Azimuth +45° vor dem Bergkrystall so, wie im Azimuth —45° hinter dem Bergkrystall und umgekehrt.

Bei circularer Polarisation und circularer Analyse erscheinen in demjenigen Fall, in welchem bei normalen Krystallen die Ringe ohne Kreuz sichtbar sind, geschlossene Ringe mit zwei dunklen Flecken in der Mitte, welche neben oder über einander liegen, je nachdem der Krystall rechtsdrehend oder linksdrehend ist.

Verbindet man zwei gleich dicke Bergkrystalle von entgegengesetzter Drehung, so ist bei auf einander senkrechter Stellung der Nicols die Mitte dunkel, da sich die Gangverschiedenheiten der Centralstrahlen aufheben. Es erscheinen kreisförmige Farbenringe mit den dunklen Büscheln am Rande an der Stelle, wo solche bei einer einzigen Platte liegen würden; aufserdem aber 4 in einander gewundene Spiralen, welche rechts oder links gewunden sind, je nachdem die erste Platte rechts- oder linksdrehend ist. Die Durchschnittspunkte mit den Kreisen liegen in den Durchgangsrichtungen der Nicols, und die Arme des dunklen Kreuzes der Mitte, aus denen die Spiralen entspringen, bilden mit diesen Durchgangsrichtungen Winkel, welche der Hälfte desjenigen gleich sind, um welchen die Polarisations-Ebene der Centralstrahlen in der einen Platte allein gedreht wird. Die Spiralen haben dieselbe Form wie in der vorigen Figur, d. h. die zwischen den Kreisen liegenden Theile sind etwas abgeplattet. Siehe Fig. 73.

Interessant ist die Erscheinung in den Zwillingen *), in welchen ein rechtsdrehendes Individuum mit einem linksdrehenden verbunden ist. In den aus ihnen senkrecht gegen die Axe geschnittenen Platten zeigt sich in den Stellen, in welchen in perpendicularer Richtung nur die Substanz eines Individuums sich befindet, die entsprechende Figur; in den Stellen, in welchen sich die Substanz des einen über die des anderen hergelagert hat, die Figur 73,

*) Zwillinge sind solche Krystalle, in denen zwei Individuen desselben Minerals nach einem bestimmten Gesetze mit einander verwachsen sind. In den Bergkrystall-Zwillingen haben die (optischen) Axen beider Individuen dieselbe Richtung.

und zwar dreht sich die Windungsrichtung der 4 Spiralen um, wenn man die Platte so umwendet, dafs die vordere Seite zur hinteren wird; an den Grenzen solcher Stellen erscheint die Figur der normalen positiven einaxigen Krystalle (das Ringsystem mit dem Kreuz). Man erhält alle diese Figuren nach einander, wenn man die Platten in seiner Ebene verschiebt.

Der Amethyst, eine Varietät des Quarzes, besteht aus Schichten abwechselnd rechts- und linksdrehender Individuen, deren Grenzflächen der Axe parallel sind, und welche dem Querschnitt etwa das Ansehen der Figur 74. geben *). Im polarisirten Licht erscheint daher beim Verschieben der Platte in seiner Ebene abwechselnd die Figur der rechts- und linksdrehenden Krystalle, und als Durchgangsfigur das Ringsystem mit dem Kreuze der positiven normalen Krystalle. Bei circularer Polarisation und Analyse treten die geschlossenen Ringe mit den beiden Centralflecken auf, welche letztere sich beim Verschieben einander nähern, bis sie zusammenfallen (wie in den normalen Krystallen), und nachher sich in der darauf senkrechten Richtung trennen.

B. *Farbenerscheinungen in zweiaxigen Krystallen.*

1) Farben dünner krystallinischer Blättchen.

Leitet man homogenes Licht durch eine zwischen zwei Nicols gestellte Krystallplatte, so hängt, wie schon bemerkt wurde, dessen Intensität nach der Interferenz von dem Gangunterschiede der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen ab. Der Gangunterschied ändert sich aber mit zunehmender Schiefe der Incidenz (d. h. mit der Entfernung von der Mitte des Gesichtsfeldes), einerseits weil dadurch der Weg im Krystall, und mithin die Dauer der Wirksamkeit

---

*) Das Nähere über diese Struktur siehe *Edinb. Trans. IX. p.* 139.

der Verschiedenheit in der Geschwindigkeit gröſser wird, andrerseits weil die Verschiedenheit der Lage der Strahlen das Geschwindigkeitsverhältniſs ändert. Der erste Umstand vergröſsert den Gangunterschied, der zweite kann ihn bald vergröſsern bald verringern. Die Gangdifferenzen variiren ferner um so rascher, je dicker die Krystallplatte, und je gröſser die Geschwindigkeitsunterschiede sind, während die Gröſse der letzteren von der doppelbrechenden Kraft und von der Lage der Strahlen gegen die optischen Axen abhängt. Ist der Krystall daher dünn genug, so werden die Intensitätsdifferenzen sämmtlicher in das Auge kommenden Strahlen so unmerklich, daſs das ganze Gesichtsfeld gleichmäſsig erhellt, bei Anwendung weiſsen Lichtes also gleich gefärbt, erscheint. Ferner sieht man, daſs das Maximum der Dicke, für welche diese Gleichfarbigkeit stattfindet, um so gröſser sein muſs, je geringer die doppelbrechende Kraft, und je näher das Blättchen senkrecht gegen eine der optischen Axen geschnitten ist, vorausgesetzt, daſs dasselbe senkrecht auf den Centralstrahl steht.

Betrachten wir Scheibchen desselben Krystalls von gleicher Dicke, so muſs wegen der Zunahme des Gangunterschiedes die Farbe um so weiter von dem Schwarz der Newtonschen Scale entfernt sein, je kleiner der Winkel zwischen den optischen Axen und der Ebene des Krystalls ist; und diese Entfernung erreicht ihr Maximum (die Farbe nimmt also die möglichst höchste Stelle der Scale ein), wenn die Krystallfläche der Ebene der optischen Axe parallel ist, da alsdann die Geschwindigkeiten der beiderlei Centralstrahlen ihre äuſsersten Grenzen (π und μ) erreichen. Das Gesichtsfeld wird dagegen bei senkrechter Kreuzung der Nicols völlig dunkel, wenn eine der optischen Axen senkrecht auf der Ebene des Blättchens steht, da alsdann die Centralstrahlen die gleiche Geschwindigkeit ν haben.

Vergleichen wir Scheibchen von gleicher Dicke und ähnlicher Lage der optischen Axen, aber von verschiedenen Substanzen, so ergiebt sich eine, in der Newtonschen Scale

um so höher liegende Farbe, je größser die doppelbrechende Kraft ist. Ist daher diese Kraft sehr groſs, wie im Arragonit, so kann die zur Erzeugung einer gleichmäſsigen Farbe nöthige Dünnheit, wenn die Blättchen der Ebene der optischen Axen parallel genommen werden, so gering sein, daſs sie sich nicht herstellen läſst. Vergleichen wir endlich Scheibchen desselben Krystalls von gleicher Lage der Axen, aber von verschiedener Dicke, so steigt, da der Gangunterschied der Dicke proportional ist, die Ordnung der Farbe mit zunehmender Dicke.

Da der Gangunterschied der Centralstrahlen, und somit auch nahe der vom Rande des Gesichtsfeldes kommenden Strahlen sich nicht ändert, wenn man das Scheibchen in seiner Ebene dreht, so muſs bei solcher Drehung die Farbe dieselbe bleiben, wenn nur die gegenseitige Stellung der Nicols ungeändert bleibt. Das einzige, was sich bei der Drehung des Blättchens ändert, sind die Polarisations-Ebenen der von demselben gebrochenen Strahlen. Da aber die Menge des durch das zweite Nicol gehenden Lichtes von der Lage der ebengenannten Polarisations-Ebenen gegen dessen Durchgangs-Ebene abhängt; da ferner die Vertheilung des durch das erste Nicol kommenden Lichtes in den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen und somit die Menge des von den letzteren dem zweiten Nicol übergebenen Lichtes, von der Lage der ursprünglichen Polarisations-Ebene, also von der Stellung des ersten Nicols abhängt: so wechselt bei der Drehung des Blättchens die Intensität der Farbe (während die Natur derselben unverändert bleibt). Ist die primitive Polarisations-Ebene der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen oder ungewöhnlichen Strahls des Blättchens parallel (ist sie also z. B. dem Hauptschnitt parallel oder senkrecht auf demselben, wenn der Krystall senkrecht gegen einen seiner drei Hauptschnitte geschnitten ist), so wird das Licht nur einfach gebrochen, und mit dem Ausbleiben der Interferenz verschwindet die Farbe. Die beiden Stellungen des Blättchens, in denen dasselbe aus diesem Grunde ungefärbt erscheint, entsprechen wegen der auf einander

senkrechten Lage der Polarisations-Ebene des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls, Drehungen von 90° zu 90°. Aufserdem mufs Interferenz und Färbung verschwinden, wenn eine der Polarisations-Ebenen der beiderlei gebrochenen Strahlen der Durchgangs-Ebene des zweiten Nicols parallel ist, insofern alsdann nur einer der beiderlei Strahlen durchgelassen wird. Die Färbung verschwindet daher im Allgemeinen 8mal bei einer vollständigen Drehung. In den Hauptstellungen der Nicols, d. h. wenn sie sich senkrecht kreuzen oder einander parallel sind, geschieht dies nur 4mal, und zwar erscheint das Gesichtsfeld in jenem Fall dunkel, in diesem weifs.

Die complementare Färbung bei den genannten Hauptstellungen der Nicols in den übrigen Lagen des Blättchens läfst sich auf gleiche Weise, wie bei den einaxigen Krystallen erklären.

Am besten eignen sich für diese Farbenerscheinungen unter den symmetrisch zweiaxigen Krystallen der Glimmer, unter den unsymmetrischen der Gyps, da beide sich in sehr dünne Lamellen spalten lassen. In diesem ist die Spaltungs-Ebene bei der gewöhnlichen Temperatur die Ebene der optischen Axen, in jenem der durch die gröfste und mittlere Elasticitätsaxe gehende Hauptschnitt. Ein Gypsblättchen giebt bei einer Dicke von 0,00124 Zoll das Weifs der ersten Ordnung, bei einer Dicke, welche 0,01818 Zoll übersteigt, ein aus allen Farben zusammengesetztes Weifs, so dafs die Blättchen, deren Dicke zwischen diesen beiden Grenzen liegt, alle Zwischenfarben der Newtonschen Scale geben. Man sieht sämmtliche Farben der Scale in concentrischen Ringen, wenn man ein Gypsblättchen mit Canadabalsam auf eine Glasplatte leimt, und hohl oder erhaben sphärisch so schleift, dafs in jenem Fall die Mitte die gröfstmögliche Dünnheit, in diesem Fall eine Dicke von 0,01818 Zoll oder darüber erhält.

Soll ein Glimmerblättchen im weifsen Lichte noch gefärbt erscheinen, so darf dessen Dicke $\frac{1}{30}$ Zoll nicht viel übersteigen.

Verfolgen wir die Färbung eines Glimmerblättchens, dessen optische Axen 45° gegen einander, also 22½° gegen die Ebene des Blättchens geneigt sind, etwas weiter. Man findet die beiden Hauptschnitte, deren einer die optischen Axen enthält, indem man dasselbe zwischen sich senkrecht kreuzende Nicols stellt, von deren Durchgangs-Ebenen die eine horizontal, die andere vertikal sein möge, und es alsdann in seiner Ebene so dreht, dafs es senkrecht auf dem Centralstrahl bleibt. Hält man mit der Drehung inne, wenn das Gesichtsfeld dunkel geworden ist, so liegt der eine Hauptschnitt in der Horizontal-, der andere in der Vertikal-Ebene. Dreht man das Blättchen um 45° weiter, so erreicht die Intensität der sich gleichbleibenden Farbe ihr Maximum. Geht man von der letzten Stellung aus und dreht das Blättchen um die Linie, in welcher dasselbe von demjenigen Hauptschnitte, welcher die optischen Axen enthält, geschnitten wird, d. h. um die Axe π, so dafs also die einfallenden Strahlen in dem anderen Hauptschnitt bleiben, während der Einfallswinkel der Centralstrahlen von 0° bis 90° wächst, so behält der ungewöhnliche Strahl die constante Geschwindigkeit μ, während die des gewöhnlichen von ν bis π wächst. Die Gangunterschiede nehmen daher zu, und zwar um so rascher, da zugleich bei den schiefer werdenden Incidenzen die ungleich geschwind durchlaufenen Strecken gröfser werden. Die Farben steigen also in der Newtonschen Farbenfolge bis zu dem aus allen Farben zusammengesetzten Weifs. Dreht man dagegen das Krystallblättchen um die Richtung des anderen Hauptschnitts, wie um eine Axe, so dafs die Centralstrahlen in der Ebene der optischen Axen bleibend einfallen, bis der Einfallswinkel von 0° bis 54° 57′ gewachsen ist, wo alsdann der einfallende Strahl einfach und nach der Richtung der scheinbaren optischen Axen gebrochen wird, so nimmt allmälig die Geschwindigkeit des gewöhnlichen Strahls von π bis ν ab, während die des ungewöhnlichen constant gleich ν bleibt; die Gangunterschiede nehmen daher ab, und die Farbe steigt in der Ordnung der Newtonschen Scale herab, bis in der

Richtung der optischen Axe kein Gangunterschied mehr stattfindet, also Dunkelheit eintritt. Setzt man die Drehung fort, so nimmt die Geschwindigkeit des ungewöhnlichen Strahls von ν bis μ ab, während die des anderen $= \nu$ bleibt; die Gangunterschiede wachsen daher, und die Ordnung der Farbe steigt wiederum aufwärts bis zum Weifs.

Bei gröfserer Dicke der Platten werden die Differenzen der Gangunterschiede mit der Entfernung von der Mitte bedeutender, und die Intensität in homogenem Lichte nimmt periodisch ab und zu. Die Rechnung giebt als Form der isochromatischen Curven, für den Fall, dafs der Krystall der Ebene der optischen Axen parallel geschnitten ist, Hyperbeln, die nahe gleichseitig sind, indem die Asymptoten Winkel bilden, deren Hälfte zur Tangente $\pi : \mu$ hat, und welche von dem durch die gröfste und mittlere Axe gehenden Hauptschnitt halbirt wird. Bei der Uebereinanderlegung gleich dicker Platten desselben Krystalls, in der Art, dafs die gleichnamigen Elasticitätsaxen sich senkrecht kreuzen, erscheinen die gleichseitigen Hyperbeln mit dunkler Mitte und dunklen Asymptotenschenkeln (Fig. 64.).

2) Erscheinungen in Krystallen, welche senkrecht gegen die Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axe geschnitten sind.

Wendet man homogenes Licht an, und ist der Winkel, den die optischen Axen mit einander bilden, klein genug, um diejenigen Strahlen, welche in der Richtung derselben den Krystall durchdringen, nach ihrem Austritt zugleich ins Auge gelangen zu lassen, so sieht man um die beiden Punkte, von denen die genannten Strahlen herkommen, und welche man Pole nennt, Ringe, welche die Form von Lemniskaten *) haben.

*) Lemniskaten nennt man diejenigen Curven, welche um zwei feste Punkte (Pole) so beschrieben sind, dafs die Produkte je zwei zusammengehöriger Radii Vektoren, welche nach je einem Punkt der Curve von beiden Polen aus gezogen sind, constant sind.

Um jeden der Pole erblickt man ein System ovaler Ringe, welche nach der Innenseite (d. h. zwischen den Polen) breiter sind, als nach der Aufsenseite, und zwar so, dafs die gröfseren Ringe statt sich zu durchkreuzen, sich zu einem einzigen Ring vereinigen, welcher beide Pole umschliefst. Siehe Fig. 75. Der Grund dieser Ringform liegt in dem zu beiden Seiten der Pole ungleichen Gröfserwerden der Gangunterschiede, und ihr Entstehen läfst sich ähnlich, wie es p. 366 für die Hyperbeln geschehen ist, durch das Verfolgen des Gangunterschiedes in den verschiedenen durch die Mitte gehenden Richtungen veranschaulichen.

Im weifsen Licht überdecken sich die Ringe der einzelnen Farben, und es bilden sich lemniskatenförmige Farbenringe, deren Farbenfolge von den Polen aus am genauesten die Newtonsche sein würde, wenn die Winkel der optischen Axen für alle Farben gleich wären. Sind die Axenwinkel, wie es in der Regel der Fall ist, verschieden, so wird die Farbenfolge der Newtonschen nur entsprechend in Richtungen, welche durch in der Nähe des einen und des anderen Pols liegende Punkte (virtuelle Pole genannt) sich gezogen denken lassen. Ist der Winkel der rothen Axen kleiner, als der der blauen Axen, wie im Salpeter, im Arragonit, im schwefelsauren Baryt und im Strontian, so erscheint der ovale Fleck, welcher von dem ersten die Pole umgebenden Ringe eingeschlossen wird, zwischen senkrecht gekreuzten Nicols, an der Seite roth, welche dem andern Pole zugewendet ist, und blau an der entgegengesetzten. Ist dagegen der Winkel der rothen Axen gröfser, als der der blauen, wie beim Topas, dem Glimmer und der schwefelsauren Magnesia, so mufs die Innenseite blau, die Aufsenseite roth erscheinen. In jenem Fall liegen die virtuellen Pole aufserhalb, in diesem innerhalb der wahren Pole.

Wenn die Verschiedenheit der Axenwinkel bedeutend ist, wie im Rocheller Salz, wo der Winkel zwischen den violetten Axen 56°, der zwischen den rothen 76° ist, dehnt sich das innere Oval zu einem langgezogenen Spektrum aus,

estehend aus Roth, Grün und Violett (siehe Fig. 76.), und ie Enden der übrigen Ringe sind nach der Innenseite hin lau, nach der Aufsenseite hin roth.

Noch gröfser wird die Abweichung von der normalen 'arbenvertheilung im Glauberit, der bei der gewöhnlichen Temperatur für violettes Licht einaxig, für die übrigen Faren zweiaxig ist. (Die durch die Aenderung der Ringsysteme sichtbare Aenderung der Pole ist es, durch welche ich die im Abschn. I. erwähnte Wendung der Axen und lie Transposition ihrer Ebenen mit dem Temperaturwechsel erkennen läfst.)

In den zwei- und eingliedrigen Krystallen, deren optische Axen für die verschiedenen Farben in einer gemeinsamen Ebene liegen, wie im Gyps und Diopsid, liegt der ine blaue Pol dem Centrum näher, der andere von demelben entfernter als der rothe, und es wird daher die laue Seite des Ovals des einen Pols nach innen, die des nderen nach aufsen gekehrt sein *).

In den andern zwei- und eingliedrigen Krystallen, in lenen die mittlere Elasticitätsaxe unveränderlich, und die Ebene der optischen Axen veränderlich ist, wie im Borax und Adular, liegen die verschiedenfarbigen Pole über einnder, und die mittleren Ovale zeigen daher, wenn man lie Linie, welche die Pole mit einander verbindet, horizontal denkt, oben eine andere Färbung als unten.

In den ein- und eingliedrigen Krystallen dagegen findet

*) Im Gyps ist der Axenwinkel bei der gewöhnlichen Temperatur 60°; s lassen sich daher nicht beide Pole übersehen; die ovalen Ringsysteme lassen sich jedoch noch mit den ihnen eigenen Farben einzeln betrachten, wenn nan den Krystall so dreht, dafs der von einem Pole kommende Strahl ins Auge kommt, oder wenn man den Krystall senkrecht gegen eine der optischen Axen scheidet. In den gewöhnlichen Diopsidkrystallen (aus dem Zillerthal) scheinen die beiden Ringsysteme symmetrisch gefärbt zu sein, wie bei den 2 und 2 gliedrigen Krystallen; doch liegt der Grund in deren Zwillingsbildung, vermöge welcher die beiden sichtbaren Ringsysteme zu zwei verschiedenen Individuen gehören. Durch Trennung der beiden Individuen gelang es dem Dr. Ewald, sich von dem Vorhandensein der unsymmetrischen Färbung beider Ringsysteme zu überzeugen.

Um jeden der Pole erblickt man e[illegible]
Ringe, welche nach der Innenseite (d. h. [illegible]
len) breiter sind, als nach der Aufser[illegible]
dafs die gröfseren Ringe statt sich [illegible] r die
zu einem einzigen Ring vereinigen. [illegible] Polen
schliefst. Siehe Fig. 75. Der G[illegible] en des
in dem zu beiden Seiten der [illegible] ung der
den der Gangunterschiede, ur[illegible] Zoll
lich, wie es p. 366 für die H[illegible] die grofse
Verfolgen des Gangunters[illegible] und grün.
die Mitte gehenden Ri[illegible] Krystalle, so wer-

Im weifsen Lich[illegible] linear-polarisirten Licht
zelnen Farben, und [illegible] en Stellen, in welchen die
benringe, deren F[illegible] sten oder zweiten Nicols mit der
esten die Newt[illegible] ndern der im Krystall gebrochenen
optischen Axe[illegible] llt, weil dies die Bedingung des Aus-
Axenwinkel [illegible] terferenz ist. Wenn die Nicols sich senk-
den, so w[illegible] und die Polarlinie (der Durchschnitt der
chend ir[illegible] optischen Axen mit der Ebene des Krystalls)
und d[illegible] Durchgangs-Ebene des einen ist, so findet je-
nanr[illegible] zusammenfallen statt in der Polarlinie und in der auf
ro[illegible] senkrechten durch das Centrum gehenden Linie.
[illegible] daher ein schwarzes Kreuz, dessen Arme die-
[illegible] Richtungen parallel sind, wie es Fig. 77. dargestellt ist.

Dreht man den Krystall bei unveränderter Stellung der Nicols, so verlieren die Richtungen, von denen die nicht interferirenden Strahlen herkommen, ihre Geradlinigkeit, die Kreuzesarme trennen sich zu zweien, und nehmen die Form von Hyperbeln an, welche jedoch bleibend durch die Pole gehen. Die Figur 78. zeigt die Form im Anfange der Drehung; die Figur 79. die Form nach einer Drehung von 22½°, und die Figur 80. die Form nach einer Drehung von 45°. Bei paralleler Stellung des Nicols gehen sämmtliche Farben in die complementaren über, und die unterbrechenden Hyperbeln werden weifs.

Im Glimmer, im Topas, im Zucker (deren Axenwinkel beziehlich 45°, 62°, 50° ist), so wie in den meisten

an-

'ₙ, lässt sich wegen der grossen Entfer-
ein Ringsystem (wie es Fig. 81. u. 82.
-n. Zur Darstellung desselben wen-
Krystalle an, welche senkrecht ge-
- geschnitten sind.
-n Büschel ist, wie bei den
- Polarisations-Ebene der
Strahlen. Ebenso wie
-er Richtung der Strahlen
-ich befinden, (isochromatische)
-en auch diejenigen Punkte in Cur-
-trahlen gebildet werden, deren Polari-
einander parallel sind. Die Rechnung lehrt,
-urven Hyperbeln sind. Die Strahlen derjenigen
-yperbeln, deren Polarisations-Ebene dem ersten Ni-
- parallel sind, werden daher einfach gebrochen und kön-
nen mithin nicht interferiren. Sind die Nicols parallel, so
gehen diese Strahlen mit unveränderter Polarisations-Ebene
hindurch, und die Hyperbeln erscheinen weifs bei weifsem
Einfallslichte. Sind die Nicols senkrecht gekreuzt, so wer-
den diese Strahlen gar nicht hindurchgelassen, und die Hy-
perbeln erscheinen dunkel. Bilden die Nicols einen spit-
zen Winkel mit einander, so kommt nur ein Theil der ge-
dachten Strahlen ins Auge, und die Hyperbeln erscheinen
weifs, aber um so schwächer, je mehr sich der Winkel
einem Rechten nähert. Da die Pole die einzigen Punkte
sind, welche von Strahlen herrühren, die nach allen Rich-
tungen polarisirt sind, so gehören dieselben allen Hyper-
beln an. Die (hellen oder dunklen) Hyperbeln gehen also
stets durch die Pole, wie man auch durch Drehung des
Krystalls die Hyperbelform ändern mag. Die Scheitelpunkte
der Hyperbeln verändern dagegen ihre Lage mit der Dre-
hung. Dreht man nämlich den Krystall so, dafs einer sei-
ner beiden Hauptschnitte dem ersten Nicol parallel ist, so
fallen die Scheitel in den Mittelpunkt, und die Hyperbeln
gehen in ein Kreuz über, dessen Arme den Hauptschnitten des
Krystalls parallel sind, wie sich auch im Voraus schliessen

läfst, da die betreffenden Strahlen in den Hauptschnitten liegen, also sämmtlich nach denselben oder senkrecht darauf polarisirt sind. Die Scheitelpunkte entfernen sich bei weiterer Drehung vom Centrum, und beschreiben eine Curve, welche für den Salpeter die Form Fig. 53. hat, und ihre gröfste Ausweichung nach einer Drehung von 45° erhält, wo die Scheitelpunkte mit den Polen zusammenfallen.

Ist das einfallende Licht circular polarisirt, so werden die Ringe in den 4 Quadranten, welche durch den Hauptschnitt des circular polarisirenden Blättchens, und durch die darauf senkrechte durch die Mitte gehende Richtung halbirt werden, gegen einander verschoben, wie es mit dem einzigen Ringsystem der einaxigen Krystalle geschah.

Läfst man den Polarisationszustand des Einfallslichtes aus dem Linearen nach und nach durch die verschiedenen Stufen des Elliptischen in das Circulare übergehen, indem man das circular polarisirende Glimmerblättchen aus dem Azimuth 0° allmälig in das Azimuth 45° drebt, so kann man das allmälige Verschieben bis zur halben Ringbreite deutlich verfolgen. Geht man von der Stellung aus, in welcher das schwarze Kreuz sichtbar ist, so sieht man das letztere sich öffnen und in sich immer mehr und mehr aufhellende hyperbolische Zweige verwandeln, bis es sich im circularen Licht auf schwarze Scheitelflecke reducirt hat, welche auf den Seiten mit den Farben des ersten Oval, dem Roth und Blau gesäumt sind. Dreht man das Glimmerblättchen nach der entgegengesetzten Seite (d. h. ins Azimuth —45°), so dafs das Links und Rechts des Elliptischen sich umwechselt, so kommen die hyperbolischen Zweige in den ersten und dritten Quadranten zu liegen, wenn sie vorher im zweiten und vierten lagen. Umgekehrt verhält es sich bei linearer Polarisation und circularer Analyse.

Bei circularer Polarisation und Analyse stellt sich die Lemniskatenform wieder her, jedoch ohne Unterbrechung durch hyperbolische Büschel, welche auf dunkle Centralflecke reducirt sind.

Idiocyclophanische Krystalle.

Idiocyclophanisch nennt man solche Krystalle, welche die Farbenringe beim unmittelbaren Hindurchsehen, also ohne Hilfe eines Nicols oder Turmalins zeigen. Es sind dieselben, welche die Bilderzahl vervielfältigen (s. p. 197.), d. h. diejenigen Krystalle, deren Masse von sehr dünnen Zwillingsstücken durchzogen ist. Diese Lamellen verhalten sich wie dünne krystallinische Blättchen, und die durch dieselben geschiedenen Theile des Hauptkrystalls verrichten die Dienste der beiden Nicols, wenn nicht etwa die durch dieselben hindurchgehenden Strahlen einer optischen Axe derselben parallel laufen.

Die vier Bilder, welche man durch solche Krystalle von jedem Gegenstand erblickt, und von denen die beiden mittleren wegen ihrer Nähe sich mehr oder weniger decken, erscheinen daher in derjenigen Farbe, welche der Dicke der Lamelle, der Schiefe der durchgehenden Strahlen und der ungleichen Geschwindigkeit derselben entspricht. Von ihnen sind stets zwei gleich und den andern beiden complementar gefärbt.

Nach Brewster (*Phil. Trans.* 1815, *p.* 272) sind im Kalkspath die Seitenbilder stets gleich gefärbt, und die mittleren ihnen complementar, wenn man durch gegenüberstehende Rhomboëderflächen hindurchsieht und den Krystall so hält, daſs die Zwillingschicht vertikal steht und das Licht in einer horizontalen Ebene einfällt; dagegen seien die Seitenbilder unter manchen Einfallswinkeln complementar, wenn bei gleicher Stellung des Rhomboëders das Licht in einer vertikalen Ebene einfällt. Herschel (*on light*, §. 1080) giebt (ohne einen bestimmten Krystall zu nennen) die Seitenbilder als die stets complementaren an. Ich fand sowohl in Kalkspathrhomboëdern als in Arragonitkrystallen *),

*) Das unterbrechende Zwillingsstück ist im Arragonit der Axe der Säule des Krystalls, welche zugleich mit der den spitzen Winkel der optischen Axen halbirenden Elasticitätsaxe beider Zwillingsindividuen zusammenfällt, parallel.

welche senkrecht gegen die Seitenflächen der Säule geschnitten waren, im Allgemeinen bei jeder constanten Lage der Einfalls-Ebene einen regelmäfsigen Wechsel der beiderlei Färbungsarten, wenn der Einfallswinkel allmälig wuchs, und zwar der Art, dafs beim Farbenwechsel, den die Variation des Einfallswinkels hervorbrachte, das eine Seitenbild dem anderen um eine halbe Periode zurückblieb. Nehmen wir z. B. roth und grün als sich allein zeigende Farben an, so ist die Aufeinanderfolge der Farben in beiden Seitenbildern folgende:

1tes Seitenbild: grün roth roth grün grün roth...
2tes Seitenbild: grün grün roth roth grün grün...

Je nach der Lage der Einfalls-Ebene war nur die gleiche oder die complementare Färbung die länger andauernde.

In einem senkrecht gegen die Axe geschnittenen Kalkspathzwilling zeigten sich dagegen die Seitenbilder durchgängig gleich, und den mittleren complementar gefärbt, wie auch die einfallenden Strahlen gegen die Eintrittsfläche geneigt sein mochten.

Der Grund, dafs stets zwei Bilder den beiden andern complementar gefärbt sein müssen, ergiebt sich sogleich, wenn man die Zerlegung der Strahlen im Krystall verfolgt. Behält man nämlich die Bezeichnung von p. 197 bei, so wird dasjenige Seitenbild, welches zu *OE* gehört, von Strahlen gebildet, welche vor dem Eintritt in die Lamelle und nach dem Austritt aus derselben parallel polarisirt sind; die Farbe mufs daher diejenige sein, welche das Blättchen zwischen 2 parallelen Nicols zeigt. Das diesem Seitenbilde coordinirte Mittelbild (*OO*) wird dagegen von Strahlen gebildet, die vor dem Eintritt und nach dem Austritt aus der Lamelle auf einander senkrecht polarisirt sind; die Färbung mufs daher diejenige sein, welche zwischen zwei gekreuzten Nicols erscheinen würde, also die complementare. Ebenso verhält es sich mit dem zweiten Seitenbilde *EO* und seinem Centralbilde *EE*.

Gehen die Strahlen sehr schief durch das Blättchen, so erscheinen die Bilder natürlich in dem Weifs der höhern Ordnungen.

Derjenige Krystall, welcher die Ringsteme im gewöhnlichen Licht beim unmittelbaren Hindurchsehen am häufigsten zeigt, ist der Arragonit. Wegen der Dünnheit der Lamelle sind die Ringe besonders breit, und die Interferenzfigur erscheint auffallend grofs im Vergleich mit den feinen Ringen im Polarisationsapparat, in denen sich kaum die Farben unterscheiden lassen. Schneidet man den Krystall senkrecht gegen die Axe der Säule, so mufs man die Platte etwas neigen, um die Ringe zu sehen, da die Lamellen jener Axe parallel sind. Wegen der Schiefe der Austrittsfläche gegen die Ebene der Lamelle erscheint überdiefs die Figur sehr verzogen.

Hält man den Krystall so, dafs das Ringsystem des rechten Seitenbildes mit dem schwarzen Kreuz sichtbar ist, so sieht man in einiger Entfernung das Ringsystem des Centralbildes mit weifsem Kreuz. Bringt man durch weitere Neigung der Platte das Ringsystem des linken Seitenbildes ins Gesichtsfeld, so zeigt dies gleichfalls das schwarze Kreuz, während das des Mittelbildes weifs bleibt; genau so, wie man aus der Polarisationsart der die Bilder constituirenden Strahlen und deren Zerlegungen in dem Krystall erwarten mufste. Polarisirt man das einfallende Licht durch ein Nicol oder einen Turmalin, so ändert sich die Form der Ringe ebensowenig, wie die Lage der hyperbolischen Büschel, nur die relative Intensität der Ringsysteme ändert sich mit der Drehung des Turmalins, und es verschwindet nach Drehungen von 90° zu 90° abwechselnd das eine und das andere System. In circular polarisirtem Einfallslicht bleiben die Ringe ungeändert.

Als idiocyclophanisch und die Ringsysteme ohne vorläufige Polarisation zeigend, erwiesen sich ferner einige Zwillinge des Salpeters und doppelt kohlensaures Kali.

Sehr häufig findet man die bedingende Zwillingsstruktur beim Kalkspath. Schneidet man einen solchen Kalkspathzwilling senkrecht gegen die Axe des Haupt-Individuums, so können, wenigstens in perpendikular auffallendem Lichte, die an der Vorder- und Hinterseite der Lamelle anliegenden Krystallprismen nicht mehr wie Nicols

wirken, und man sieht zwischen zwei Nicols genau dieselben unregelmäfsigen, verzogenen und sich vervielfältigenden Ringe, welche man erblickt, wenn man zwischen zwei genau centrirte, einfache, senkrecht gegen die Axe geschnittene Kalkspathplatten ein Glimmerblättchen anbringt. Man vergl. Dove: Versuche über Circularpolarisation, in Poggendorff's Annalen Bd. XXXV, p. 579.

Unterscheidung positiver und negativer Krystalle.

Da der Unterschied zwischen den positiven und negativen Krystallen darin besteht, dafs in jenen die gewöhnlichen, in diesen die ungewöhnlichen Strahlen die schnelleren sind, und die Interferenz-Erscheinungen eine Wirkung der ungleichen Geschwindigkeit der beiderlei Strahlen sind, so läfst sich, ohne dafs man nöthig hat, die Brechungsverhältnisse zu messen, das Positiv- und Negativsein durch Combination der Gangunterschiede, oder vielmehr durch die Veränderung der Farben-Erscheinungen, welche auf dieser Combination beruht, erkennen. Verbindet man nämlich zwei Krystalle, welche Interferenz-Erscheinungen darbieten, so, dafs die in dem einen Krystall gewöhnlich gebrochenen Strahlen in dem zweiten nur gewöhnlich, also auch die ungewöhnlichen nur ungewöhnlich gebrochen werden, so werden die Gangunterschiede sich addiren oder subtrahiren, je nachdem die Krystalle gleichartig oder ungleichartig sind. Das Wachsen der Gangunterschiede erkennt man an dem Uebergehen der Farben zu höheren Ordnungen, das Abnehmen am Uebergehen zu niedrigeren Ordnungen. Bei dünnen Blättchen ist die Steigerung blofs aus dem Farbenton der combinirten Krystalle, bei Platten, welche Ringsysteme zeigen, noch durch die Folge dieser Farben-Aenderung, die Ringe zu erweitern oder zusammenzuziehen, erkennbar. Wachsen nämlich die Gangunterschiede, so wird der Farbenwechsel rascher, und die Ringe werden enger; werden die Gangunterschiede kleiner, so werden die Ringe breiter. Um auf diesen Grund die

ositiven Krystalle von den negativen zu unterscheiden, nufs man daher 1) die Natur des einen Krystalls, 2) die Lage der Polarisations-Ebenen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen in beiden kennen.

Die möglichen Combinationen sind 1) die Verbindung, n welcher beide Krystalle Ringsysteme zeigen, 2) die Verbindung dünner Blättchen, welche einen einzigen Farbenon zeigen, 3) die Verbindung eines dünnen Blättchens mit inem Krystall, welcher ein Ringsystem zeigt.

Die erste Verbindung ist nur auf einaxige Krystalle nwendbar. Beide Krystalle müssen senkrecht gegen die Axe geschnitten, und die Axen beider genau parallel sein, in Umstand, welcher die Anwendung schwierig macht. Wählt man zum Vergleichungs-Krystall Kalkspath, so ist der zu prüfende Krystall positiv, wenn die Ringe nach dem Einschieben desselben breiter werden; negativ, wenn sie enger werden.

Zur Bestimmung durch die zweite Verbindungsart wollen wir ein Glimmerblättchen als vergleichenden Krystall voraussetzen.

Man stelle zwischen die beiden gekreuzten Nicols das Glimmerblättchen so, dafs der Hauptschnitt, welcher die optischen Axen enthält, und welcher sich nach dem p. 380 Gesagten leicht finden läfst, im Azimuthe 45° liegt, und schalte das zu prüfende Blättchen, wenn es einem einaxigen Krystall angehört, so ein, dafs sein Hauptschnitt den des Glimmers deckt. Da der letztere negativ ist, und das Einfallsloth im stumpfen Winkel der optischen Axen liegt, so ist der von demselben dem Hauptschnitt parallel polarisirte der langsamere, und da der dem Hauptschnitt parallel polarisirte der einaxigen Krystalle der gewöhnliche Strahl st, so ist der zu prüfende Krystall positiv, wenn die Farbe sinkt, negativ, wenn dieselbe steigt. Ist das zu untersuchende Blättchen zweiaxig, so schalte man dasselbe so ein, dafs die Ebene der optischen Axen dem ebengenannten Hauptschnitt parallel ist. Liegt das Einfallsloth im stumpfen Winkel der optischen Axen, so ist der Krystall positiv,

wenn die Farbe sinkt, negativ, wenn dieselbe steigt. Umgekehrt verhält es sich, wenn das Einfallsloth im spitzen Winkel liegt.

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs die Lage der optischen Axen bekannt ist. Liegen die optischen Axen (oder die einzige optische Axe, wenn der Krystall einaxig ist) in der Ebene des Blättchens, so giebt es kein Mittel, ihre Lage zu finden. Man findet zwar durch Drehung zwischen den Nicols die beiden auf einander senkrechten Hauptschnitte durch das Verschwinden der Farbe, ohne aber entscheiden zu können, in welchem die Axen liegen. Bilden dagegen die Axen irgend einen Winkel mit der Ebene des Blättchens, so läfst sich deren Lage dadurch finden, dafs man dasselbe zwischen den Nicols um die eine und die andere der als Hauptschnitte erkannten Richtungen so dreht, dafs die Hauptschnittsrichtung, um welche man das Blättchen dreht, im Azimuthe 45° bleibt, und auf die Richtungen achtet, in denen die Farbe verschwindet.

Bei der dritten Bestimmungsart, welche übrigens als die bequemste den Vorzug vor den beiden schon betrachteten verdient, und welche zuerst von Dove (Poggend. Ann. Bd. XL.) angegeben wurde, möge der zur Vergleichung dienende Krystall wiederum ein Glimmerblättchen sein, und zwar von einer solchen Dicke, dafs die Gangverschiedenheit der beiderlei Strahlen beim Austritt $\frac{1}{4}$ Wellenlänge beträgt. Stellt man dasselbe so zwischen zwei senkrecht gekreuzte Nicols, dafs die Winkel, den die Hauptschnitte des Blättchens bilden, von den Hauptschnitten der Nicols halbirt werden, und bringt einen senkrecht gegen die Axe geschnittenen einaxigen Krystall *A* zwischen das Blättchen und das zweite Nicol, so wirkt das aus dem Blättchen tretende Licht in dem einen Quadrantenpaar, welches von dem einen Hauptschnitt des Glimmers halbirt wird, und welches wir *h* nennen wollen, beschleunigend auf die gewöhnlichen und verzögernd auf die ungewöhnlichen Strahlen; in dem andern Quadrantenpaar, welches wir *h'* nennen wollen, verzögernd auf die gewöhnlichen und beschleunigend auf die ungewöhnlichen Strahlen.

Die verschiedene Wirkung in den verschiedenen Quadranten kommt davon her, dafs die Polarisations-Ebenen des durch den Krystall A gebrochenen Lichtes alle mögliche Lagen annehmen. Die Polarisations-Ebenen sämmtlicher gewöhnlicher Strahlen gehen durch die Mitte des Gesichtsfeldes (weil sie durch die optische Axe gehen). Die der ungewöhnlichen, welche senkrecht auf derselben stehen, wollen wir parallel mit sich verrücken, so dafs sie gleichfalls durch die Mitte gehen. Für jeden Punkt a des Gesichtsfeldes, welcher in den Quadranten h liegt, befindet sich alsdann die Polarisations-Ebene des gewöhnlichen Strahls in den Quadranten h, die des ungewöhnlichen in den Quadranten h'. Für jeden Punkt b des Gesichtsfeldes, welcher in der letzten Polarisations-Ebene (in der des ungewöhnlichen Strahls von a) liegt, fällt die Schwingungs-Ebene des gewöhnlichen Strahls mit der des ungewöhnlichen Strahls von a zusammen, und die des ungewöhnlichen mit der des gewöhnlichen. Die Vibrationen des aus dem Glimmer tretenden Lichtes vertheilen sich daher in dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl von a, in demselben Verhältnifs wie in dem ungewöhnlichen und gewöhnlichen Strahl von b. Enthalten nun die Quadranten h denjenigen Hauptschnitt des Blättchens, in welchem dessen optische Axen liegen, so halbiren die Polarisations-Ebenen der im Glimmer ungewöhnlich-gebrochenen, also schnelleren, Strahlen die Quadranten h'. Es werden daher die im Krystall A gewöhnlich-gebrochenen Strahlen von b, und die ungewöhnlich-gebrochenen Strahlen von a einen Vorsprung von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erhalten. Dafs wegen der entgegengesetzten Lage der Componenten der Schwingung die gewöhnlich-gebrochenen Strahlen von a und die ungewöhnlich-gebrochenen von b sich beim Eintritt in A um $\frac{1}{2}$ Undulation von den vorigen unterscheiden, ist schon oben p. 361 bemerkt.

Ist nun A positiv, und würde in einer bestimmten Entfernung von der Mitte der Vorsprung der gewöhnlichen Strahlen nach der Hinwegnahme des Blättchens, n Wellenlängen betragen, so beträgt dieses Voraneilen unter dem Einflufs des Blättchens in den Quadranten h nur noch

$n-\frac{1}{4}$ Wellenlängen; dagegen in den gleichentfernten Stellen in den Quadranten h', $n+\frac{1}{4}$ Wellenlängen; die Ringe werden daher in jenen Quadranten um $\frac{1}{4}$ Ringbreite vorgeschoben, in diesen um ebensoviel zurückgeschoben. Ist dagegen der zwischengestellte Krystall negativ (ist also der ungewöhnliche Strahl der voraneilende), so tritt das Umgekehrte ein.

Will man daher entscheiden, ob die eingefügte Krystallplatte positiv oder negativ ist, so darf man nur beachten, in welchem Quadrantenpaar die Ringe durch das Glimmerblättchen vorwärts geschoben sind. Man hat nicht einmal nöthig zu wissen, welcher der beiden Hauptschnitte des Glimmerblättchens die optischen Axen enthält, wenn man nur beachtet, ob die Verschiebung der Ringe in demselben Quadranten stattfindet, in denen sie ein bekannter Krystall, wie z. B. der Kalkspath, zeigt. Ist dieses der Fall, so ist der Krystall negativ, im entgegengesetzten Falle positiv.

Dafs ganz ähnliche Verschiebungen bei den zweiaxigen Krystallen eintreten müssen, bedarf kaum der Erwähnung. Die Einwirkung der Ortsveränderung der Ringe, welche von dem Blättchen ausgeht, ist aber nicht zu beiden Seiten der Pole dieselbe. Nämlich die nach der Ebene der optischen Axen polarisirten Strahlen sind gewöhnlich gebrochene, wenn sie im stumpfen Winkel derselben liegen, also wenn sie jenseits der Pole liegen; sie sind ungewöhnlich gebrochen, wenn sie im spitzen Winkel derselben, also zwischen den Polen liegen.

Denken wir nun den zu prüfenden Krystall so gestellt, dafs dessen Ebene der optischen Axen mit der des Glimmerblättchens zusammenfällt, so dehnen sich in positiven Krystallen die Ringe zwischen den Polen aus, und die äufseren Ringe verengen sich. Umgekehrt verhält es sich bei negativen Krystallen. Da nämlich der Glimmer negativ ist, und die einfallenden Strahlen im stumpfen Winkel der Axen einfallen, so sind die der Ebene der Axen parallel polarisirten (gewöhnlichen) Strahlen in demselben die langsameren, und da sie im dahintergestellten Krystall zwi-

schen den Polen ungewöhnlich, jenseits der Pole gewöhnlich gebrochen werden, so werden in positiven Krystallen zwischen den Polen die Gangunterschiede geringer, die Ringe also breiter; jenseits der Pole gröfser, die Ringe also enger. In negativen Krystallen kehrt sich natürlich Alles um.

Da für jede Farbe eine andere Dicke des Glimmerblättchens erfordert wird, wenn der Phasenunterschied der beiderlei Strahlen nach dem Austritt eine Viertel-Undulation betragen soll, so wählt man, wenn man mit weifsem Licht operirt, diejenige Dicke, welche den mittleren Strahlen entspricht (bei welcher das Blättchen zwischen zwei Nicols das Weifs der ersten Ordnung zeigt). Die Polarisation der übrigen Farbenstrahlen ist alsdann elliptisch, entfernt sich aber wenig von der circularen.

Farben-Erscheinungen in Körpern von künstlicher Doppelbrechung.

Wenn die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in verschiedenen Richtungen, und somit die Doppelbrechung wirklich von Cohäsionsverschiedenheiten des Mediums abhängt, und die Intensität der Cohäsionskräfte eine Funktion der Entfernung der Moleküle ist, so mufs auch durch künstliche Näherung und Entfernung derselben in einfach brechenden Mitteln Doppelbrechung erzeugt werden können, vorausgesetzt, dafs diese Näherung und Entfernung nicht nach allen Richtungen hin dieselbe ist. Eine solche ungleiche Aenderung der Molekulardistanz läfst sich 1) durch mechanischen Druck, 2) durch ungleiche Erwärmung oder Erkältung hervorbringen.

Die Erzeugung doppelter Brechung durch Druck ist durch folgenden Versuch Fresnels nachgewiesen:

Es wurden 4 Prismen (A) Fig. 55. auf eine Ebene gelegt, so dafs ihre brechenden Winkel, welche 90° betrugen, nach oben gewendet waren, und ihre Längenkanten einander berührten. In der Richtung dieser Kanten

wurden die Prismen in einen Schraubstock gepreſst mittelst 4 Schrauben, welche gegen eine Stahlplatte drückten. Diese Stahlplatte war, so wie eine zweite, gegen welche sich die Prismen mit ihren andern Enden stützten, auf der innern Seite erst mit Pappe und dann mit Holz bekleidet, um einen regelmäſsigen Druck zu erzeugen, und möglichst das Zerspringen des Glases zu verhüten. Um der Farbenzerstreuung zu begegnen, wurden zwischen den Prismen 3 andere kürzere (*B*) mit einem brechenden Winkel von 90°, und 2 andere (*C*) mit einem brechenden Winkel von 45° so eingefügt, daſs die Combination ein rechtwinkliges Parallelepiped bildete, die Austrittsfläche *cd* der Eintrittsfläche *ab* also parallel war.

Um endlich der Lichtschwächung durch die partiellen Reflexionen an den Grenzflächen der Prismen möglichst vorzubeugen, wurden die combinirten Glasstücke mit Terpenthin, dessen Brechungsverhältniſs dem angewendeten Kronglas von St. Gobain fast gleich kam, an einander geklebt. Die verkehrte Lage der brechenden Winkel muſste die kleine Divergenz zwischen den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen merklich vergröſsern. Das senkrecht auffallende Licht erzeugte, in einem Abstand von einem Meter aufgefangen, zwei um $1\frac{1}{2}^{mm}$ von einander entfernte Bilder, von denen eines von Strahlen gebildet wurde, welche der Compressionsaxe parallel, das andere von Strahlen, welche senkrecht auf diese Axe polarisirt waren, und zwar verhielten sich die Prismen, wie positiv einaxige Krystalle, deren Axe mit der Compressionsaxe zusammenfiel.

Für die durch Temperaturveränderung im Glase bewirkte Doppelbrechung wurde der Beweis von Guérard geführt.

Das Mittel, die Strukturveränderung durch ungleiche Temperatur bleibend zu machen, ist für das Glas, dasselbe bis zum Weichwerden zu erhitzen, und durch Eintauchen in eine Flüssigkeit schnell abzukühlen. Die äuſserste Lage des Glasstückes erstarrt am frühesten, die inneren Lagen verhindern durch ihr Volumen, welches durch die noch

icht gedämpfte Hitze vermehrt ist, und durch die Cohäionskraft, welche die nächste Schicht auf die äufserste ausbt, deren Rückkehr in die der Temperatur entsprechende leichgewichtslage. Erstarren alsdann die inneren Theile, o bleiben sie, von den äufseren schon festen Lagen geesselt, in einem Zustande der Spannung, welcher einen hnlichen in den folgenden später erstarrenden Schichten ervorruft.

Aus einem so gekühlten Glasstück schnitt Guérard n gleicher Richtung 4 Prismen mit brechenden Winkeln on 90°, und verband sie, wie Fresnel in dem vorigen Versuch, mit Prismen aus gewöhnlichem Glase zu einem Parallelepiped. Der Erfolg war ein gleicher, nur dafs sich das Glas wie ein negativ einaxiger Krystall verhielt.

Durch Druck erzeugte Farben-Erscheinungen.

Prefst man ein quadratisches Glasstück, d. h. eine rechtwinklig parallelepipedische Tafel mit quadratischer Basis (s. Fig. 75.) von zwei einander gegenüberliegenden Punkten *a* und *b* aus mäfsig stark zusammen, und stellt es so zwischen zwei sich senkrecht kreuzende Nicols, dafs *ab* der Polarisations-Ebene des einen derselben parallel ist, so erblickt man ein schwarzes Kreuz, dessen Arme die Richtungen *ab* und *cd* haben, und in den 4 Eckfeldern eine Farbe der ersten Ordnung. Steigert man den Druck, so bilden sich nach und nach um die Punkte *a* und *b* kleine Farbenringe (Fig. 84.), welche an die Lemniskaten der zweiaxigen Krystalle erinnern. Diese Analogie wird noch dadurch gerechtfertigt, dafs allerdings mit der Compression längs der Linie *ab*, eine Dilatation in der Richtung *cd*, und eine von der letzteren im Allgemeinen quantitativ verschiedene Ausdehnung in der auf *ab* und *cd* senkrechten Richtung verbunden sein mufs, so dafs in der That drei auf einander senkrechte Elasticitätsaxen existiren. Dazu kommt, dafs die Figur sich für jede Form des comprimirten Glasstückes als dieselbe erweist.

Die Figur 84. geht bei einer Drehung des Glases um 45° in die Figur 85. über. Durch Verstärkung des Drucks wird die doppelbrechende Kraft vermehrt, und es wachsen somit die Gangunterschiede der durchgehenden Strahlen. Die Wirkung ist daher derjenigen gleich, welche bei krystallinischen Platten, deren doppelbrechende Kraft constant ist, durch zunehmende Dicke erzeugt wird. Bei schwachem Druck verhalten sich demnach die Glasplatten wie dünne krystallinische Blättchen, und darauf beruht die von Dove zuerst gemachte Anwendung derselben zur Erzeugung circular polarisirten Lichtes. Bei einem gewissen Druck sind die Eckfelder der Tafel Fig. 83. weifs, nämlich bei demjenigen Druck, bei welchem der Gangunterschied $\frac{1}{4}$ Wellenlänge beträgt, und in diesem Zustande verhalten sie sich genau wie die dünnen Blättchen, welche das Weifs der ersten Ordnung zeigen. Wie dort tritt das Licht aus zwei einander gegenüberliegenden Feldern rechts circular, aus den beiden andern links circular heraus. Da die Gröfse des Druckes nach Willkühr gesteigert werden kann, so ist dieses Mittel, das Licht circular zu polarisiren, weit bequemer, als die so lange fortgesetzte Spaltung krystallinischer Blättchen, bis die Dicke dem erforderlichen Gangunterschied entspricht.

Prefst man eine convexe Glaslinse im Centrum zusammen, so bildet sich das Ringsystem mit dem Kreuz (Fig. 65, 66.). Man erhält ein gleiches Ringsystem, wenn man einen Glascylinder von aufsen dadurch zusammenprefst, dafs man einen Metalldraht um denselben straff umwindet.

Gleichzeitige Verdichtung und Ausdehnung läfst sich noch sehr bequem bewirken, wenn man einen langen Glasstreifen so biegt, dafs er nach der einen Seite eine convexe, nach der andern eine concave Krümmung zeigt. Die inneren, auf der concaven Seite liegenden Theile kommen dabei in einen comprimirten, die äufseren in einen ausgedehnten Zustand.

Ist *abdc* (Fig. 86.) der Durchschnitt des Streifens, *ab* die äufsere ausgedehnte, *cd* die innere comprimirte Seite,

so giebt es zwischen beiden eine Fläche, deren Durchschnitt *ef* sei, in welcher die Theilchen ihren Zustand behalten haben, und in welcher daher das Licht nur einfach gebrochen wird. Zwischen gekreuzten Nicols mufs deswegen die Linie *ef* dunkel erscheinen, und von den Theilen *abfe* und *efdc* der eine wie ein positiver, der andere wie ein negativer Krystall wirken. Ist das erste Nicol gegen *ef* geneigt, so werden zu beiden Seiten Farbencurven sichtbar, welche ihre convexen Seiten der dunklen Mittellinie zukehren, und deren Farben in der Newtonschen Ordnung einander folgen. Brewster brachte auf einem Streifen von 6″ Länge, 1,5″ Breite und 0,28″ Dicke 7 Farbenordnungen hervor. Je gröfser die Krümmung ist, desto zahlreicher müssen natürlich die Farbensäume sein.

Kreuzt man zwei gleich dicke und gleich gekrümmte Glasstreifen, so werden die dunklen Mittellinien in dem quadratischen Raum, in welchem sie sich decken, unterbrochen, wie es in Fig. 87. angedeutet ist. Von der Ecke, in welcher sich die convexen Seiten decken, geht zu der gegenüberstehenden eine dunkle Diagonale. Es werden nämlich die in dem einen Glasstreif parallel *ef* polarisirten, also gewöhnlich gebrochenen Strahlen in dem zweiten Streifen ungewöhnlich gebrochen, da sie senkrecht auf *gh* polarisirt sind; mithin wechseln die Strahlen ihre Geschwindigkeiten beim Eintritt in den zweiten Streifen um, und die Gangverschiedenheit wird ausgeglichen. Dieser Diagonale parallel erscheinen geradlinige Farbensäume, und in den Ecken, durch welche die Diagonale nicht geht, steigen die Farben in der Ordnung, da positive und negative Stellen combinirt sind, wie beim Kreuzen positiver und negativer Krystalle.

Glasplatten, die in verschiedenen Richtungen comprimirt werden, verhalten sich nach Brewster's Erfahrungen, wie übereinandergelegte Glasplatten, deren jede nach einer dieser Richtungen zusammengedrückt wird.

Sehr deutliche Wirkungen brachte Brewster hervor, indem er Würfel und Cylinder von Gallerten zusammen-

drückte. Harz, mit weifsem Wachs zusammengeschmolzen und zwischen zwei parallelen Glasplatten gedrückt (welche Masse beim Durchsehen durchsichtig, beim Daraufsehen milchigt und opalisirend aussah), zeigte kreisförmige Farbenringe und verhielt sich wie ein einaxiger Krystall, der senkrecht gegen die Axe geschnitten ist. Dieselbe Erscheinung bot Hausenblase dar, welche in einem cylindrischen gläsernen Gefäfse getrocknet wurde, so wie eine cylindrische Platte aus dieser Substanz, welche man von aufsen erharten liefs. Bei der Erhartung werden nämlich die äufsersten Theile zuerst fest, können daher dem Zuge der später erhartenden inneren Theile, welche sich dabei zusammenziehen, nicht folgen, und werden dadurch in einen dauernden Zustand der Spannung versetzt. Die Hausenblase entwickelt dabei eine sehr bedeutende Elasticitätsverschiedenheit. Ist das Gefäfs oder die Platte oval, so zeigen sich die Ringerscheinungen zweiaxiger Krystalle, da die Verschiedenheit der drei Dimensionen drei verschiedene Elasticitätsrichtungen bei der Erhartung hervorruft.

Von den übrigen einfachbrechenden Substanzen, welche Brewster untersuchte, zeichnete sich Obsidian, Steinsalz und Kopal am meisten durch Entwickelung von Elasticitätsdifferenzen aus *).

Durch ungleiche Erwärmung erzeugte Farben-Erscheinungen.

Will man die durch allmälige Temperatur-Zunahme und die hierdurch wachsenden Elasticitätsdifferenzen erzeugte Vermehrung der doppelbrechenden Kraft verfolgen, so darf man nur ein, etwa rechtwinklig parallelepipedisches Glasstück auf eine erhitzte Metallplatte legen und zwischen gekreuzte Nicols aufstellen. Um eine Vorstellung von den Cohäsionsveränderungen zu gewinnen, denke man zuerst nur die

*) Die reichhaltigen Untersuchungen Brewster's über Polarisation durch Compression findet man *Phil. transact.* 1816, *p.* 156.

die äufserste, dem erhitzten Metall aufliegende Schicht *ab* des Parallelepipeds *abcd* (Fig. 88.) erwärmt. Diese Schicht ist alsdann in ausgedehntem Zustande, und die Seiten *ca* und *db* würden eine schiefe aber geradlinige Lage annehmen (vorausgesetzt, dafs die Metallplatte nicht länger als *ab* ist), wenn die inneren Theile vermöge der Cohäsion diese Seiten nicht zurückhielten und ihnen eine gekrümmte Form gäben. Es entsteht daher eine Spannung in der Weise, dafs die Seiten *ca* und *db* in der mit *ab* parallelen Richtung comprimirt sind, während in derselben Richtung die inneren Theile durch die Reaction der Seiten ausgedehnt sind. In der Nähe der Ränder *ca* und *db* wird es daher Linien *eg* und *fh* geben, welche weder verdichtet noch ausgedehnt sind. Die Wirkung der von den Mitteltheilchen auf die Seiten *ca* und *db* ausgeübten Contraktion wird zugleich sein, dafs diese Seiten zusammendrükkend auf die Seiten *cd* und *ab* wirken. Da mit jeder Contraktion eine Ausdehnung in senkrechter Richtung, und umgekehrt eine Contraktion mit einer Ausdehnung verbunden ist, so müssen in den auf *ab* senkrechten Richtungen die Cohäsionszustände denen in longitudinaler Richtung entgegengesetzt sein. In dieser senkrechten Richtung ist also die Mitte comprimirt, die Seiten *cd* und *ab* dagegen sind dilatirt, und an jedem dieser Ränder ist eine Richtung (*ef* und *gh*), welche sich neutral verhält.

Die Richtungen der Maxima und Minima der Elasticität, also die Richtungen, welche der Axe und den darauf senkrechten Richtungen der einaxigen Krystalle entsprechen, liegen durchgängig parallel *ab* und senkrecht darauf. Sind daher die Nicols diesen Richtungen parallel, so hat man nur einfach gebrochene Strahlen und demnach keine Farben-Erscheinungen. Sind sie aber gegen dieselbe 45° geneigt, so erreicht die Intensität der Farben ihr Maximum. Das Prisma ist Hinsichts der Verschiedenheit der Compressions- und Dilatationsrichtungen in 5 Theile getheilt, in 4 Randfelder und 1 Mittelfeld. Von den Randfeldern werden *cefd* und *aghb* in Uebereinstimmung mit den Brewster-

schen Beobachtungen wie positive, *cega* und *dfhb* wie negative Krystalle wirken. Die neutralen Linien werden sonach dunkel bleiben, und ihnen parallel (in den im gleichen Cohäsionszustande befindlichen Richtungen) Farbenstreifen in Newtonscher Farbenfolge sichtbar werden. Am schwächsten werden die Seitenfelder, welche auf der erhitzten Seite normal stehen, gefärbt erscheinen. Fig. 89. stellt ein Bild der Erscheinung vor.

Was die Entstehung und Veränderung der Farbenfigur während der Erwärmung betrifft, so wird zuerst das ursprüngliche Dunkel von der erhitzten, und fast gleichzeitig von der gegenüberliegenden Seite gleichsam von einer weifsen Welle zurückgedrängt, während von der Mitte aus im nächsten Augenblicke diesen entgegen gleichfalls eine Welle vorschreitet und das Schwarz auf einen Streif zurückdrängt, welcher die Lage der neutralen Linie andeutet. Alsdann folgen von beiden Seiten und von der Mitte aus nach und nach eine gelbe, orange, rothe, blaue Welle, dann Wellen von den Farben der zweiten, dritten Ordnung etc., welche die vorhergehenden Farben auf Streifen reduciren, die sich den schwarzen Streifen anreihen. Fast gleichzeitig geschieht dies, wenn die Metallplatte nicht länger als die erhitzte Seite ist, von den darauf senkrechten Rändern, so dafs 6 Gruppen Farbenstreifen entstehen, von denen in jedem Randfelde eine und im Mittelfelde zwei sich befinden. Die wellenartig von den Rändern aus vorschreitenden Farben erscheinen jedoch nicht genau zu derselben Zeit. So bildet sich z. B. mit dem Auftreten des Grün zweiter Ordnung an der erhitzten Seite erst das Gelb der ersten Ordnung an der Gegenseite, und diesem folgt sogleich das Gelb von der Mitte aus. Je breiter das Glas ist, desto geringer wird die Zahl der Farbenstreifen der Mitte und der Gegenseite, verglichen mit der Zahl an der erhitzten Seite. Die Zahl der Streifen überhaupt hängt von der Dicke und von der Ungleichheit der Temperatur ab. Fängt die Temperatur sich gleichmäfsig auf der ganzen Tafel zu verbreiten an, so verschwinden nach und nach wie-

derum die Farben, und zwar so, dafs die Streifenzahl auf der erhitzten Seite schneller abnimmt, als auf der anderen, und demnach zu einer bestimmten Zeit die Streifenzahl auf beiden Seiten dieselbe ist. Die Farben treten jedoch auf dieselbe Weise wieder auf, wenn die eine Seite abgekühlt wird, nur wirken dann die äufseren Felder negativ, die mittleren positiv.

Bringt man daher zwischen dem ersten Nicol und der Glasplatte ein dünnes Gypsblättchen an, so steigen die Farben der positiven Randfelder, während die der mittleren herabsteigen, wenn der Hauptschnitt des Blättchens senkrecht auf der erhitzten Seite steht; die Farben ändern sich entgegengesetzt, wenn der Hauptschnitt jener Seite parallel ist. Ist das Prisma breiter als 2 Zoll, so steht die neutrale (dunkle) Linie der kälteren Seite der Mitte merklich näher, als die andere, etwa wie in Fig. 90.

Es läfst sich leicht im Voraus schliefsen, was erfolgen würde, wenn man zwei gleich grofse von der einen Seite gleich erhitzte Glasplatten combinirte. Fallen nämlich die heifsen Seiten zusammen, so gehen die Farben höheren Ordnungen zu, die Zahl der Streifen wird mithin vermehrt. Kreuzen sie sich senkrecht, so wird das Quadrat, in welchem sie sich decken, von einem dunklen Kreuz in der Richtung der Diagonalen durchschnitten, weil sich in diesen Diagonalen vollkommen gleichliegende Stellen decken, in denen die Geschwindigkeiten der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen sich umwechseln, und die Gleichheit der Wege alle Gangverschiedenheit aufhebt. Da, wo gleichartige, d. h. positiv oder negativ wirkende Stellen sich dekken, werden die Gangverschiedenheiten vermindert, die Farben werden also niedrigerer Ordnung; wo sich ungleichartige Stellen decken, steigt die Ordnung der Farben. In der Mitte der Quadratseiten, wo äufsere und Mittelfelder über einander liegen, gehen die Farben in Farben höherer Ordnung über. Siehe Fig. 91.

Kreuzt man ein erhitztes Glas mit einem sich abkühlenden, so tritt das Umgekehrte ein. Nämlich, wo sich

26*

Mittel- und Randfelder decken (in *bbbb* Fig. 92.), sinken die Farben. Wo die äufseren oder die mittleren Felder sich decken (in *aaaa*), gehen die Farben höheren Ordnungen zu. In dem von Brewster angestellten Versuch hatte die Mitte der Gläser, einzeln genommen, das Gelb der ersten Ordnung, die Mitte *c* wurde tief blau, und von da aus stiegen die Farben in der Scale herab, weil das Gelb der Mitte der einen Platte sich mit den angrenzenden Farben niedrigerer Ordnung der zweiten Platte verband. Die Farben sanken alsdann in den Feldern *bbbb* bis zum Schwarz, welches bis zu den Rändern sich ausdehnte. In den Ecken, wo sich die Randfelder kreuzen, wurden farbige Ringe sichtbar, die von der Mitte aus in der Newtonschen Farbenfolge hinaufstiegen. Siehe Fig. 93.

Ein cylindrisches Glasstück, vom Umfange aus erwärmt, zeigt das Ringsystem mit schwarzem Kreuz, und verhält sich genau wie eine senkrecht gegen die Axe geschnittene positive einaxige Krystallplatte, mit dem Unterschiede, dafs sich nur die Axe des Cylinders wie eine optische Axe verhält, und nicht wie bei den Krystallen jede derselben parallele Richtung. Bedeckt man daher einen Theil der Oberfläche des Cylinders, so verschwindet der entsprechende Theil des Ringsystems. Läfst man das Glasstück, nachdem man es, z. B. durch Tauchen in siedendes Öl, gleichmäfsig erhitzt hat, erkalten, indem man seinen Umfang mit einem guten Wärmeleiter umgiebt, so verhalten sich die Ringe wie in einem negativen Krystall.

Ist das cylindrische Glasstück oval, so mufs es wie ein zweiaxiger Krystall wirken, und man erhält Lemniskaten mit dem schwarzen Kreuz oder den schwarzen Hyperbeln je nach der Stellung der Polarlinie gegen die sich kreuzenden Nicols.

Zu den übrigen Substanzen, in denen Brewster durch Erwärmung eine doppelbrechende Struktur erzeugte, gehört das Steinsalz, Flufsspath (welcher indefs nur schwache Wirkung zeigte), Obsidian, Halbopal, Bernstein, Copal, Horn etc. etc.

Die doppelbrechende Struktur läfst sich dem Glase bleibend einprägen, wenn man dasselbe nach dem Glühen schnell erkalten läfst. Es ist nicht schwer, die dabei eintretenden Erscheinungen auf gleiche Weise zu erklären. Bei kreisförmigen Stücken, in welchen die äufseren Theile verdichtet, die mittleren ausgedehnt sind, weil sie nach der Erstarrung jener nicht mehr dem Zuge nach innen frei folgen können, erscheinen demnach kreisförmige Ringe, durchschnitten von einem schwarzen Kreuz und einem schwarzen Kreise in der Nähe des Randes, welcher einer neutralen Linie entspricht, in der die Ausdehnung der innern und die Contraktion der äufsern Theile sich das Gleichgewicht halten. Siehe Fig. 94.

Rechtwinklige und quadratische Parallelepipede verhalten sich wie gleichgeformte von allen Seiten her gleich erhitzte Glasstücke. Die Figuren 95—97. stellen die Erscheinung dar, wie sie Brewster in einem 3″ langen und ½″ dicken rechtwinkligen Stück erhielt, und zwar Fig. 95. die durch die breiteste Seite, Fig. 96. die durch die mittlere Seite, Fig. 97. die durch die schmalste Seite erblickte Figur. In 95. zeigte die Mitte den Anfang des Grün zweiter Ordnung, und die Ränder das Grün der dritten Ordnung. In 96. zeigte die Mitte das Gelb der zweiten Ordnung, und die Ränder das Grün der dritten Ordnung. Die Figur 97*a*. erschien, wenn die Seite 45° gegen das erste Nicol geneigt war, und 97*b*. wenn diese Neigung 0° oder 90° war.

Ein Prisma, dessen Basis ein Quadrat von einer Seitenlänge von 0,38″, und dessen Höhe 1,11″ war, gab, wenn die ursprüngliche Polarisations-Ebene einer der Seitenflächen parallel war, zwischen gekreuzten Nicols die Fig. 98, wo die Ecken das Grün der dritten Ordnung mit einem kleinen Fleck vom Gelb derselben Ordnung in der Mitte zeigten, und welche nach einer Drehung des Prismas von 45° in die Fig. 99. überging. Bei einer Drehung des zweiten Nicols um 90° gehen die Farben in die complementaren über.

Das Auftreten der Farben höherer Ordnungen und mithin die Complication der Figur hängt von der Dicke und der Schnelligkeit der Abkühlung ab. So gehören z. B. die Figg. 100. u. 101. einem rechteckigen Glase an, welches schwächer gekühlt ist, als das oben gedachte, und zwar Fig. 100. bei einer Neigung der Seiten von 0° oder 90° gegen die Nicols, und Fig. 101. bei einer Neigung von 45°. Fig. 102. ist die Figur, die bei der Kreuzung zweier rechteckigen gleichgekühlten Gläser sichtbar ist bei einer Neigung von 45° gegen die Nicols. Figur 103. ist die Figur in einem mäfsig gekühlten Glaswürfel bei paralleler Stellung der Seiten gegen die ursprüngliche Polarisations-Ebene; Fig. 104. die Figur desselben Würfels nach einer Drehung von 45°. Die Figuren ändern sich nicht bei circularer Polarisation und Analyse, wenn die correspondirenden Hauptschnitte der Glimmerblättchen parallel sind; sie gehen in die Figur 105, also in eine höher potenzirte über, wenn diese Hauptschnitte sich senkrecht kreuzen. In letzterem Fall ändert sich die Figur nicht weiter, wenn der Würfel gedreht wird. Die complementare Figur der letzten ist in Figur 106. dargestellt. — Ein gekühltes Glas von dreieckiger Form zeigt die Figur 107.

Neigt man ein Glasparallelepiped, welches die Fig. 89. oder 101. zeigt, in der Ebene der Längsstreifen, so sinkt die Farbe der Mittelstreifen; neigt man es in der darauf senkrechten Ebene, so steigen dieselben. Die Randstreifen verhalten sich umgekehrt. Zerschneidet man ein solches Glas in der Richtung der Streifen, so zeigt jedes Stück die Zeichnung, welche das Ganze vor der Trennung zeigte *).

Um die Interferenz-Erscheinungen in den künstlich doppelbrechenden Körpern deutlich zu sehen, mufs man dieselben in die Entfernung des deutlichen Sehens bringen, während man die Krystalle, namentlich bei den Ring-Er-

*) Die zahlreichen höchst interessanten Versuche Brewster's hierüber siehe *Phil. transact.* 1816, *p.* 46.

cheinungen, dem Auge so nahe als möglich halten muſs, lso dicht vor das zweite Nicol, oder im Spiegelapparat ganz in die Nähe des zweiten (Zerlegungs-) Spiegels.

Merkwürdig ist noch die krystallinische Struktur der Krystalllinse der Thieraugen. Brewster tauchte dieselben, um die Interferenz-Erscheinungen sichtbar zu machen, in ein parallelepipedisches hohles mit Canadabalsam gefülltes Glasgefäſs. Die Linse eines Kabliaus zeigte in der Richtung der Augenaxe die Figur 108, welche aus 12 erhellten Räumen besteht, die durch zwei concentrische schwarze Ringe und durch ein schwarzes Kreuz von einander getrennt sind. Die 8 inneren zeigten ein intensives Weiſs erster Ordnung, die 4 äuſseren nur eine sehr geringe Lichtstärke. Neigt man die Axe der Linse gegen den Centralstrahl in der Richtung von *a* nach *b*, so nimmt die Figur allmälig die Form der Figur 109. an, indem zwei der Sectoren des innern Ringes sich verkleinern, die andern sich vergröſsern, und in der Mitte sich ein weiſser Fleck bildet. Bei noch gröſserer Neigung verschwinden die drei inneren Mittelfelder ganz, und die beiden inneren Seitenfelder werden bläulich weiſs. Dreht man das Glasgefäſs so, daſs man durch ein anderes Seitenpaar desselben, also senkrecht gegen die Axe der Linse hindurchsieht, so erscheint die Figur 110, wenn das einfallende Licht der Linsenaxe parallel oder senkrecht darauf polarisirt ist. Die inneren 4 Felder zeigten ein schwaches Blau der ersten Ordnung, und waren durch das dunkle Kreuz nicht so scharf begrenzt, als in der ersten Stellung (Fig. 108.). Ferner waren die 4 mittleren Felder, welche auf diese inneren folgen, nicht so ausgedehnt gegen die äuſseren, wie im vorigen Falle. Bildet die Polarisations-Ebene des Einfallslichtes einen Winkel von 45° mit der Linsenaxe, so entsteht die Figur 111.

Untersucht man die Natur der Doppelbrechung, indem man ein Gypsblättchen zwischen die Linse und das erste Nicol setzt, und zwar so, daſs der Hauptschnitt des Blättchens vertikal (parallel *ab*) steht, und beobachtet die Färbung der 6 vertikalen Felder, so findet man, daſs die Farbe

in den Centralfeldern und den äufseren Feldern sinkt, in den mittleren Feldern steigt. Die Krystalllinse verhält sich daher so, als ob der Kern und die äufsere Schicht sich im ausgedehnten Zustande, die mittlere Schicht im compimirten Zustande sich befindet.

Dafs auch die Elasticitätsverhältnisse doppelbrechender Krystalle sich mit der Temperatur ändern, und somit auch deren Verhalten gegen das Licht ein anderes werde, ist schon im ersten Abschnitte bemerkt worden. Zur numerischen Bestimmung dieser Veränderungen hat Rudberg Messungen am Kalkspath, Bergkrystall und Arragonit angestellt, indem er die Brechungsverhältnisse des von Fraunhofer mit F bezeichneten Strahles bei einer Temperatur von 80° C. mit denen bei einer Temperatur von 16° C. verglich.

Es ergab sich, dafs das Brechungsverhältnifs des Strahls im gewöhnlichen Spektrum des Kalkspaths sich entweder gar nicht ändere, oder unmerklich verringert werde, während dasselbe im ungewöhnlichen Spektrum von 1,49075 auf 1,49118 stieg; so dafs die doppelbrechende Kraft mit steigender Temperatur abnimmt. Hiermit stimmt auch Mitscherlich's Entdeckung überein, dafs das Rhomboëder des Kalkspaths sich mit zunehmender Temperatur der Würfelform nähert, und zwar dergestalt, dafs in der Richtung der optischen Axe eine merkliche Ausdehnung stattfindet, während in der darauf senkrechten Richtung eine sehr geringe Zusammenziehung eintritt.

Im Bergkrystall nahmen beide Brechungsverhältnisse ab: das gewöhnliche fiel von 1,54970 auf 1,54944, das ungewöhnliche von 1,55894 auf 1,55868.

Dasselbe zeigte sich beim Arragonit, in welchem die drei Brechungsverhältnisse des Strahles F bei der Temperatur von 16° 1,53478 1,69058 1,69510 waren, während sie bei der Temperatur von 80° auf 1,53416 1,68976 1,69421 sanken. Die doppelbrechende Kraft, und mit ihr die Neigung der optischen Axen nimmt folglich mit wachsender Temperatur ab.

Zweite Abtheilung.

Analytische Behandlung der durch Doppelbrechung erzeugten Interferenz-Erscheinungen *).

Der Grund der im Vorigen betrachteten Interferenz-Erscheinungen ist der auf der ungleichen Geschwindigkeit der einen doppelbrechenden Krystall durchlaufenden gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahlen beruhende Gangunterschied derselben. Es möge daher derselbe für einen von parallelen Flächen begrenzten Krystall zuvörderst ausgewerthet werden.

Es sei (Fig. 51.) *cd* der Durchschnitt der Eintrittsfläche, und *ab* der Durchschnitt der ihr parallelen Austrittsfläche eines einaxigen oder zweiaxigen Krystalls mit der Einfalls-Ebene, welche letztere zugleich die Ebene der Figur sei. Es stelle ferner *AB* einen einfallenden homogenen Strahl vor, welcher beim Eintritt in *B* sich in einen gewöhnlichen Strahl *Bo* und in einen ungewöhnlichen Strahl *Be* theilt. Die Punkte *o* und *e* seien die Austrittspunkte beider Strahlen, welche im Allgemeinen nicht in der Einfalls-Ebene liegen, und die Punkte *O* und *E* seien die Projektionen dieser Punkte auf die letztgenannte Ebene, in der Art, dafs die Punkte *o* und *e* senkrecht über oder unter *O* und *E* zu denken sind. Beim Austritt in *o* und *e* wird durch die zweite Brechung in *ab* die Richtung der Strahlen *os* und *es'*, deren Projektionen *OS* und *ES'* seien, dem Strahl *AB* wiederum parallel. Alsdann ist, wenn *BL* das Einfallsloth vorstellt, $\angle OLo$ das Azimuth des gewöhnlichen, $\angle ELe$ das Azimuth des ungewöhnlichen Strahls in Bezug auf die Einfalls-Ebene. Läfst man nun umgekehrt auf die Fläche *ab* zwei Strahlen in der Richtung *so* und

*) In dem Folgenden ist die Länge der Kreisperipherie für den Durchmesser 1 durchgängig durch ϖ bezeichnet, um sie von der Elasticitätsconstante π zu unterscheiden.

se auffallen, so ist der Weg des von so erzeugten gewöhnlich gebrochenen Strahls oB, der Weg des von $s'e$ erzeugten ungewöhnlich gebrochenen Strahls eB, so dafs beide nach der zweiten Brechung in cd in der gemeinsamen Richtung BA austreten, und sich nur dadurch von einander unterscheiden, dafs sie nicht zu derselben Zeit in B anlangen. Sind daher so und $s'e$ zwei nach derselben Ebene polarisirte und von derselben Lichtquelle kommende Strahlen, so werden sie nach ihrem Austritt in B fähig sich zu interferiren, wenn man sie auf eine gleiche Polarisations-Ebene zurückführt.

Man denke sich nun durch E senkrecht auf ES' eine Ebene, welche die Projektionen SO und $S'E$ in C und E, und die Strahlen so und $s'e$ in c und e schneiden möge (wo c also als der senkrecht über oder unter C befindliche Punkt des Strahls so zu denken ist). Diese Ebene ist die den parallelen Strahlen so und $s'e$ gemeinsame Wellen-Ebene, und e und c sind daher Punkte, in welchen die beiden Strahlen gleiche Wege durchlaufen haben. Die von diesen Punkten aus nach B gehenden Wege dagegen, nämlich $co+oB$ auf der einen, und eB auf der andern Seite, werden in verschiedenen Zeiten zurückgelegt. Ist nun die Geschwindigkeit des Lichtes in dem umgebenden Mittel v, die des gewöhnlichen Strahls r_o, die des ungewöhnlichen r_e, und die Undulationsdauer T, so ist die Zahl der Wellenlängen in den Intervallen co, oB, eB beziehlich $\frac{co}{vT}$, $\frac{oB}{r_oT}$, $\frac{eB}{r_eT}$, folglich, wenn man den Phasenunterschied mit $2\varpi\Delta$ bezeichnet,

$$\Delta = \frac{1}{T}\left(\frac{co}{v}+\frac{oB}{r_o}-\frac{eB}{r_e}\right).$$

Bedeutet ferner α den Einfallswinkel, α' den Brechungswinkel der gewöhnlichen Well-Ebene, α'' den der ungewöhnlichen, a' den Brechungswinkel des gewöhnlichen Strahls, a'' den des ungewöhnlichen, und sind die Azimuthe OLo, ELe beziehlich gleich ω' und ω'', so hat man $co = CO = OE \sin\alpha$, $OE = LE - LO = Le\cos\omega'' -$

$Lo\cos\omega'$, $Le = d\,tang\,\alpha''$, $Lo = d\,tang\,\alpha'$ (unter d die Dicke des Krystalls verstanden), also

$$eo = d(tang\,\alpha''\cos\omega'' - tang\,\alpha'\cos\omega')\sin\alpha;$$

und mithin, da überdies $oB = \frac{d}{\cos\alpha'}$ und $eB = \frac{d}{\cos\alpha''}$ ist,

$$\varDelta = \frac{d}{T}\left[\frac{tang\,\alpha''\cos\omega'' - tang\,\alpha'\cos\omega'}{v}\sin\alpha + \frac{1}{r_o\cos\alpha'} - \frac{1}{r_e\cos\alpha''}\right],$$

wofür man auch schreiben kann, wegen $\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{o} = \frac{\sin\alpha''}{e}$ (wenn o und e wiederum die Geschwindigkeiten der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Well-Ebene vorstellen),

$$1)\quad \varDelta = \frac{d}{T}\left[\left(\frac{\sin\alpha''\cos\omega''\sin\alpha''}{e\cos\alpha''} - \frac{1}{r_e\cos\alpha''}\right) - \left(\frac{\sin\alpha'\cos\omega'\sin\alpha'}{o\cos\alpha'} - \frac{1}{r_o\cos\alpha'}\right)\right].$$

$\cos\omega'$ und $\cos\omega''$ sind bekannt, sobald die Lage der Schenkel LO und Lo gegen die Elasticitätsaxen bestimmt ist. Bezeichnet man nämlich durch m, m', m'' die Cosinus der Winkel, welche die Linie LO mit den Axen bildet, und durch n, n', n'' die Cosinus der Winkel, welche zwischen der Linie Lo und den Axen liegen, so hat man

$$2)\quad \cos\omega' = mn + m'n' + m''n''.$$

Die Werthe von m, m', m'', n, n', n'' finden sich, wie folgt.

Die Cosinus derjenigen Winkel, welche die Axen bilden: mit dem Einfallsloth; dem Strahl Bo; dem Strahl co; der Normale der gewöhnlichen Wellen-Ebene seien beziehlich: B, C, D; b', c', d'; β, γ, δ; β', γ', δ'.

Ist nun in Figur 56. BL das Einfallsloth, BX die Axe der x, BA parallel der Richtung Lo der vorigen Figur, und BS parallel dem gewöhnlich gebrochenen Strahl, so ist $\cos LX = B$, $\cos AX = n$, $LA = 90$, $LS = \alpha'$, $SX = b'$, also $n = \sin LX \cos XLA$, und $b' = B\cos\alpha' + \sin LX \sin\alpha' \cos XLA$, mithin $n = \frac{b' - B\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$. Ebenso

findet man $n' = \frac{c' - C\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$, $n'' = \frac{d' - D\cos\alpha'}{\sin\alpha'}$, und wenn man statt der Richtungen BA und BS resp. die Richtungen LO und OS der vorigen Figur sich denkt,

$$m = \frac{\beta - B\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad m' = \frac{\gamma - C\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad m'' = \frac{\delta - D\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

oder auch, wenn man statt der Projektion OS die Normale der gebrochenen Well-Ebene einführt,

$$m = \frac{\beta' - B\cos\alpha'}{\sin\alpha'},\quad m' = \frac{\gamma' - C\cos\alpha'}{\sin\alpha'},\quad m'' = \frac{\delta' - D\cos\alpha'}{\sin\alpha'}.$$

Setzt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für $\cos\omega'$, so erhält man, insofern $Bb' + Cc' + Dd' = \cos\alpha'$, $B\beta' + C\gamma' + D\delta' = \cos\alpha'$ und $b'\beta' + c'\gamma' + d'\delta' = \cos q'$ (unter q' den Winkel zwischen dem gewöhnlichen Strahl und seiner Normale verstanden):

$$\cos\omega' = \frac{\cos q' - \cos\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha'\sin\alpha'},$$

oder, da $\cos q' = \frac{o}{r_o}$ ist,

$$\cos\omega' = \frac{\frac{o}{r_o} - \cos\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha'\sin\alpha'}.$$

Ganz ebenso erhält man:

$$\cos\omega'' = \frac{\frac{e}{r_e} - \cos\alpha''\cos\alpha''}{\sin\alpha''\sin\alpha''}.$$

Es wird daher der Ausdruck für den Phasenunterschied:

$$\text{I.}\quad 2\varpi\Delta = \frac{2\varpi d}{T}\left[\frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e}\right],$$

oder weil $\frac{\sin\alpha'}{o} = \frac{\sin\alpha''}{e} = \frac{\sin\alpha}{v}$, und $2T$ der Wellenlänge gleich ist,

$$\text{Ia.}\quad 2\varpi\Delta = \frac{2\varpi d}{l}\cdot\frac{\sin\alpha\sin(\alpha'' - \alpha')}{\sin\alpha'\sin\alpha''}.$$

Leitet man linear polarisirtes Licht auf einen von parallelen Flächen begrenzten Krystall, und läfst es nach dem Austritt auf ein Nicolsches Prisma fallen, so zerlegen sich

lie Bewegungen der beiderlei Strahlen nach den Richtungen der gewöhnlichen und der ungewöhnlichen Polarisationsrichtung des Prisma's. Die beiden Componenten der nach der letztern Richtung sich hinwendenden Schwingungen, welche allein das Prisma durchdringen können, sind wegen der Identität ihrer Polarisations-Ebene fähig zu interferiren. Nennt man die diesen Componenten entsprechenden Licht-Intensitäten I'^2 und I''^2, und die Intensität des interferirten Lichtes selbst $I_{\prime}^2$, so hat man, wie aus Abschn. I, XXIV. folgt,

$$\text{II.}\quad I_{\prime}^2 = I'^2 + I''^2 + 2I'I''\cos 2\varpi\Delta$$
$$= (I'+I'')^2 - 4I'I''\sin^2\varpi\Delta.$$

Wenn die Durchgangs-Ebene des Nicols, in welches das Licht nach dem Austritt aus dem Krystall tritt, mit der Brechungs-Ebene des den Krystall verlassenden Strahls einen Winkel φ bildet, und S', P'; S'', P'' die nach der Brechungs-Ebene und senkrecht darauf zerlegten Componenten der Bewegung des gewöhnlichen und ungewöhnlichen austretenden Strahls sind, so wird

$I' = S'\cos\varphi + P'\sin\varphi$ und $I'' = S''\cos\varphi + P''\sin\varphi$, also

$$\text{II}a.\quad I_{\prime}^2 = [(S'+S'')\cos\varphi + (P'+P'')\sin\varphi]^2$$
$$-4(S'\cos\varphi + P'\sin\varphi)(S''\cos\varphi + P''\sin\varphi)\sin^2\varpi\Delta.$$

Ist I^2 die Intensität des Lichtes vor dem Eintritt in die Krystallplatte, so hat demnach, da S', P', S'', P'' proportional I sind, $I_{\prime}^2$ die Form

$$\text{II}b.\quad I_{\prime}^2 = I^2(M^2 - 4N\sin^2\varpi\Delta).$$

Ist das einfallende Licht nicht homogen, und man will die Farbe des interferirenden Lichtes bestimmen, so muſs man in diese Gleichung nach und nach für die Wellenlänge l und die davon abhängigen Gröſsen (o, e, α', α'') die Werthe für die Hauptfarben setzen, und aus den so für die einzelnen homogenen Strahlen erhaltenen Intensitäten $I_{\prime}^2$ nach der Newtonschen Regel den Farbenton ableiten.

Den Gangunterschied der beiderlei Strahlen nach dem Durchgange durch zwei übereinandergelegte Krystallplatten, die von parallelen Flächen begrenzt sind, findet man, wie folgt.

Es seien (Fig. 57.) *mn*, *fg*, *cd* die Durchschnitte der Krystallflächen mit der Einfalls-Ebene; der einfallende Strahl AB werde in dem ersten Krystall *cdgf* gewöhnlich nach Bo, ungewöhnlich nach Be gebrochen, und BO, BE seien die Projektionen derselben auf die Einfalls-Ebene. Der gewöhnliche Strahl Bo werde beim Eintritt in den zweiten Krystall *fgnm* ungewöhnlich nach oe' gebrochen und habe zur Projektion: OE'; der ungewöhnliche Strahl Be, werde gewöhnlich nach eo' gebrochen und habe zur Projektion EO'. Die zugehörigen austretenden Strahlen $e's$ und $o's'$, deren Projektionen $E'S$ und $O'S'$ seien, sind dem einfallendem Strahl AB parallel. Ist alsdann CO' der Durchschnitt der Wellen-Ebene der austretenden Strahlen, so ist der Gangunterschied:

$$\Delta = \frac{1}{T}\left(\frac{ce'}{v} + \frac{oe'}{r_e'} + \frac{oB}{r_o} - \frac{eo'}{r_o'} - \frac{eB}{r_e}\right),$$

wenn c den senkrecht über oder unter C liegenden Punkt des Strahls se', und r_o, r_e, r_o', r_e' beziehlich die Geschwindigkeiten der Strahlen Bo, Be, eo', oe' bedeuten. Es ist wiederum $ce = O'E \sin\alpha$, und $O'E = OE + L'O' - L''E$.

Behalten a', a'', α', α'', ω', ω'', o, e, d die diesen Gröfsen oben untergelegte Bedeutung, in Bezug auf den ersten Krystall, und haben a_1', a_1'', α_1', α_1'', ω_1', ω_1'', o_1, e_1, d_1 die entsprechende Bedeutung für den zweiten, so erhält man auf dem oben betretenen Wege:

$$OE = d(tg\,a''\cos\omega'' - tg\,a'\cos\omega'),$$

$$L'O' - L''E = d_1(tg\,a_1'\cos\omega_1' - tg\,a_1''\cos\omega_1''),$$

und demnach, wegen

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{o} = \frac{\sin\alpha''}{e} = \frac{\sin\alpha_1'}{o_1} = \frac{\sin\alpha_1''}{e_1},$$

$$\Delta = \frac{1}{T}\Bigg\{d\Bigg[\left(\frac{\sin a''\cos\omega''\sin\alpha''}{e\cos a''} - \frac{1}{r_e\cos a''}\right) - \left(\frac{\sin a'\cos\omega'\sin\alpha'}{o\cos a'} - \frac{1}{r_o\cos a'}\right)\Bigg]$$
$$+ d'\Bigg[\left(\frac{\sin a_1'\cos\omega_1'\sin\alpha_1'}{o_1\cos\alpha_1'} - \frac{1}{r_o'\cos a_1'}\right) - \left(\frac{\sin a_1''\cos\omega_1''\sin\alpha_1''}{e_1\cos a_1''} - \frac{1}{r_e'\cos a_1''}\right)\Bigg]\Bigg\}.$$

Ferner findet sich $\sin\alpha' \sin a' \cos\omega' = \frac{o}{r_o} - \cos\alpha' \cos a'$,

$$\sin\alpha'' \sin a'' \cos\omega'' = \frac{e}{r_e} - \cos\alpha'' \cos a'',$$

$$\sin\alpha_1' \sin a_1' \cos\omega_1' = \frac{o_1}{r_o'} - \cos\alpha_1' \cos a_1' \text{ und}$$

$$\sin\alpha_1'' \sin a_1'' \cos\omega_1'' = \frac{e_1}{r_e'} - \cos\alpha_1'' \cos a_1'',$$

so dafs man erhält

$$\text{III.} \quad \varDelta = \frac{1}{T}\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e}\right) - d_1\left(\frac{\cos\alpha_1'}{o_1} - \frac{\cos\alpha_1''}{e_1}\right)\right].$$

A. *Interferenz-Erscheinungen in einaxigen Krystallen.*

Es möge im Folgenden immer vorausgesetzt werden, dafs die Axe des Kegels, welchen die auf den Krystall fallenden und nach dem Durchgang durch denselben zum Auge gelangenden Strahlen bilden, senkrecht gegen die Krystallfläche stehe. Alsdann fallen sämmtliche Strahlen sehr nahe senkrecht ein, und man darf, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die Brechungswinkel der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen ebenen Wellen als gleich ansehen, und in den bezüglichen Formeln $\alpha' = \alpha''$ setzen.

Die Vibrations-Intensitäten der Componenten der den Krystall verlassenden Strahlen werden demnach aus Abschn. II, B. XVII—XX.

$$P' = \frac{2\tau' \cos\varepsilon'}{\tau + \tau'} R', \quad S' = -\frac{2\tau' \sin\varepsilon'}{\sin(\alpha + \alpha')} R',$$

$$P'' = \frac{2\tau' \sin\varepsilon'}{\tau + \tau'} R'', \quad S'' = \frac{2\tau' \cos\varepsilon'}{\sin(\alpha + \alpha')} R''.$$

Substituirt man hierin die Werthe für R' und R'' aus VI. ibid., so findet sich, wenn man das Azimuth der Polarisations-Ebene des einfallenden Strahls in Bezug auf die Einfalls-Ebene mit φ' bezeichnet, demzufolge $P' = I \sin\varphi'$ und $S' = I \cos\varphi'$ setzt, und der Kürze wegen ϱ statt $\frac{4\tau\tau'}{\sin^2(\alpha + \alpha')}$ schreibt,

$$P' = I\varrho \frac{\cos\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} - \sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$S' = -I\varrho\sin\varepsilon'\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} - \sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$P'' = I\varrho \frac{\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} + \cos\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$S'' = I\varrho\cos\varepsilon'\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} + \cos\varepsilon'\cos\varphi'\right).$$

Es wird daher $P'+P'' = I\varrho\frac{\sin\varphi'}{\cos^2(\alpha-\alpha')}$, $S'+S'' = I\varrho\cos\varphi'$,

also $M^2 = \varrho^2\left[\frac{\sin\varphi'\sin\varphi}{\cos^2(\alpha-\alpha')} + \cos\varphi'\cos\varphi\right]^2$ und

$$N = \varrho^2\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} - \sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)\times$$
$$\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')} + \cos\varepsilon'\cos\varphi'\right)\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi}{\cos(\alpha-\alpha')} - \sin\varepsilon'\cos\varphi\right)\times$$
$$\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi}{\cos(\alpha-\alpha')} + \cos\varepsilon'\cos\varphi\right).$$

Vernachlässigt man überdies wegen der Kleinheit des α den Unterschied zwischen α und α', so wird

$$M^2 = \varrho^2\cos^2(\varphi-\varphi')$$ und

$$N = \varrho^2\sin(\varphi'-\varepsilon')\cos(\varphi'-\varepsilon')\sin(\varphi-\varepsilon')\cos(\varphi-\varepsilon')$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin 2(\beta'-\varepsilon')\sin 2(\beta-\varepsilon'),$$

und die Intensität des interferirten Lichtes wird:

$$\text{IV.}\quad I_{,}^2 = I^2\varrho^2[\cos^2(\varphi-\varphi')$$
$$-\sin 2(\varphi'-\varepsilon')\sin 2(\varphi-\varepsilon')\sin^2 s\delta].$$

1) Farbenerscheinungen in Krystallplatten, welche der Axe parallel geschnitten sind.

Sind die Flächen des Krystalls der Axe parallel, so erhält man aus (Abschn. II, B, 6) $\sin\varepsilon' = \frac{\sin\alpha}{x'}$ und $\cos\varepsilon' = -\frac{\cos\alpha'\cos\alpha}{x'}$, also für kleine Einfallswinkel näherungsweise $\sin\varepsilon' = \sin\alpha$, $\cos\varepsilon' = -\cos\alpha$, so dafs die Intensitätsformel (IV.) übergeht in

V.

V. $I_{,}^{2} = I^{2}\varrho^{2}[\cos^{2}(\varphi-\varphi')$
$-\sin 2(a-\varphi')\sin 2(a-\varphi)\sin^{2}\varpi\varDelta]$.

Was den Werth von $\varDelta$ betrifft, für welchen oben
funden wurde

$$\varDelta = \frac{d}{T}\left(\frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e}\right),$$

hat man für den vorliegenden Fall, wenn man einen
gativen Krystall voraussetzt, $o = \mu$, und wenn man die
en und höhern Potenzen von $\sin\alpha$ vernachlässigt,

$\cos\alpha' = \sqrt{1-\mu^{2}\sin^{2}\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\mu^{2}\sin^{2}\alpha,$ ferner

$$e^{2} = \pi^{2} - (\pi^{2}-\mu^{2})\delta''^{2} = \pi^{2} - (\pi^{2}-\mu^{2})\sin^{2}\alpha''\cos^{2}a,$$

ler da $\sin^{2}\alpha'' = e^{2}\sin^{2}\alpha$ ist,

$$e^{2} = \pi^{2} - (\pi^{2}-\mu^{2})e^{2}\sin^{2}\alpha\cos^{2}a.$$

tzt man auf der rechten Seite für e^{2} nur dessen erstes
lied π^{2}, oder was dasselbe ist, vernachlässigt man die
öhern Potenzen von $\pi^{2}-\mu^{2}$, so wird

$$e^{2} = \pi^{2} - \pi^{2}(\pi^{2}-\mu^{2})\sin^{2}\alpha\cos^{2}a,$$

lso

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}(\pi^{2}-\mu^{2})\sin^{2}\alpha\cos^{2}a$$

nd

$$\cos\alpha'' = 1 - \tfrac{1}{2}\pi^{2}\sin^{2}\alpha.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe von $\cos\alpha'$,
$\cos\alpha''$, o, e in den Ausdruck für $\varDelta$, so ergiebt sich, da die
on $\sin^{4}\alpha$ abhängigen Glieder fortzulassen sind,

$$\varDelta = \frac{d}{T}\left(\frac{\pi-\mu}{\pi\mu} + \tfrac{1}{2}\left[\pi-\mu-\frac{(\pi^{2}-\mu^{2})}{\pi}\cos^{2}a\right]\sin^{2}\alpha\right)$$

$$= \frac{d}{T}\left(\frac{\pi-\mu}{\pi\mu} - \frac{\pi-\mu}{2\pi}[\mu-(\pi+\mu)\sin^{2}a]\sin^{2}\alpha\right).$$

Ist die gegenseitige Lage der beiden Nicols bestimmt,
so $\varphi-\varphi'$ constant, und ebenso die Lage des Haupt-
hnitts gegen deren Durchgangs-Ebenen, also auch $a-\varphi$
d $a-\varphi'$ constant, so hängt der Werth von $I_{,}^{2}$ nur noch
n $\sin^{2}\varpi\varDelta$ ab.

Betrachten wir zuvörderst die Stellung, in welcher die
cols sich senkrecht kreuzen, und der Hauptschnitt den
inkel zwischen beiden halbirt. Alsdann wird $\varphi-\varphi' =$
^{0} und $a-\varphi = a-\varphi' = 45^{0}$, also

$$3)\quad I_{,}^{2} = I^{2}\sin^{2}\varpi\varDelta.$$

Es werden daher alle diejenigen Strahlen gleiche Intensität haben, für welche Δ einen und denselben Werth, z. B. Q, erhält.

Ist Fig. 58. HH die Linie, in welcher das Gesichtsfeld vom Hauptschnitte getroffen wird, ferner C der Mittelpunkt, und P ein beliebiger anderer Punkt des Gesichtsfeldes, so ist für einen von P nach dem senkrecht über C befindlichen Auge (O) hingehenden Strahl, PCO die Einfalls-Ebene, $\angle HCP = a$, und wenn man die Entfernung des Auges von C der Einheit gleich nimmt, $PC = tang\, \alpha$. Demnach ist die Gleichung $\Delta = Q$, wenn man darin a und $tang\, \alpha$ als veränderlich, und zwar a als Polarwinkel, und $tang\, \alpha$ als Radius Vektor ansieht, die Gleichung derjenigen Curve, welche solche Punkte enthält, deren Intensität dieselbe und zwar $= I_{\prime}^{2} = I^{2} sin^{2} \varpi Q$ ist. Da ferner, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $sin^{2} \varpi Q = sin^{2} \varpi (Q + n)$, so ist $\Delta = Q + n$ die Gleichung für sämmtliche gleich helle Curven von der Intensität $I^{2} sin^{2} \varpi Q$.

Die Gleichung $\Delta = Q$ läfst sich schreiben:

$$4)\quad \pi - \mu - \mu \frac{(\pi - \mu)}{2} [\mu - (\pi + \mu) sin^{2} a] sin^{2} \alpha$$
$$= \frac{\pi \mu T Q}{d},$$

oder, wenn man $\frac{d(\pi - \mu) - \pi \mu Q T}{d\mu(\pi - \mu)} = \frac{1}{2} V$ setzt, und wegen der Kleinheit des α die Sinus mit der Tangente vertauscht, diese mit r bezeichnend,

$$5)\quad r^{2} = \frac{V}{\mu - (\pi + \mu) sin^{2} a}.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Halbaxen $\sqrt{\frac{V}{\mu}}$ und $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ sind, und deren Asymptoten-Winkel, wenn man denselben durch $2v$ vorstellt, gegeben ist durch

$$6)\quad tang^{2} v = \frac{\mu}{\pi}.$$

Die Asymptoten stehen also sehr nahe senkrecht auf einander, und die Richtung des Hauptschnitts halbirt bei

den negativen Krystallen ihren spitzen Winkel. Da die vorstehenden Formeln noch für positive Krystalle gelten müssen, wenn man Δ durch $-\Delta$ ersetzt, und π und μ mit einander vertauscht, so ist es bei diesen der stumpfe Winkel, welcher von der Richtung des Hauptschnitts halbirt wird.

Für die mittlern Strahlen hat man im Kalkspath $\mu = 0{,}6011$, $\pi = 0{,}6717$, also $2v = 83^0\ 38'$; und im Bergkrystall $\mu = 0{,}6426$, $\pi = 0{,}6468$, also $2v = 90^0\ 20'$. Die Asymptotenwinkel weichen für die verschiedenen Farben nur da etwas merklicher von einander ab, wo die zu μ und π gehörigen Zerstreuungsverhältnisse bedeutende Differenzen zeigen, wie es beim Kalkspath der Fall ist, für welchen jene Differenz über $30'$ steigt.

Aus (5) folgt, dafs es für positive Werthe von V nur reele Werthe für r, und mithin für a giebt, so lange $\sin^2 a < \frac{\mu}{\mu+\pi}$ bleibt, d. h., da aus (6) sich $\sin^2 v = \frac{\mu}{\mu+\pi}$ ergiebt, so lange $a < v$ ist; dafs dagegen für negative Werthe von V a nur reel wird, wenn $\sin^2 a > \frac{\mu}{\mu+\pi}$, also $a > v$ ist. Die Hyperbel liegt daher für positive Werthe von V in dem Asymptotenwinkel, welcher vom Hauptschnitt halbirt wird, für negative Werthe von V in dem anderen Winkel.

Es ist aber V positiv, wenn $Q < \frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}$ ist, und negativ, wenn $Q > \frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}$ ist, ferner ist für die Mitte des Gesichtsfeldes, d. h. für $a = 0$, $Q = \frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}$; folglich findet das Gesetz statt, dafs in den Asymptotenwinkeln, welche der Hauptschnitt halbirt, der Gangunterschied der interferirenden Strahlen kleiner, in den andern beiden Asymptotenwinkeln gröfser ist, als im Durchschnittspunkt der Asymptoten. Für positive Krystalle gilt dasselbe, da Q und $\pi-\mu$ für sie zugleich ihr Zeichen ändern, also V sein Zeichen behält.

Was die Intensität in den verschiedenen Punkten der Hauptschnittslinie HH (vorige Figur) betrifft, so hat man dafür aus (3), insofern $a = 0$ wird.

$$I_{,}^{2} = I^{2} \sin^{2} \varpi Q = I^{2} \sin^{2} \varpi \left[\frac{d(\pi - \mu)}{\pi \mu T} - \frac{d\mu(\pi - \mu)}{2\pi T} r^{2} \right].$$

Die Intensität im Centrum ist daher $I^{2} \sin^{2} \varpi \left(\frac{d(\pi - \mu)}{\pi \mu T} \right)$; es erscheint dasselbe demnach nur dann völlig dunkel, wenn $\frac{(\pi - \mu)d}{\pi \mu T}$ einer ganzen Zahl gleich ist.

Da ferner $Q = \frac{d(\pi - \mu)}{\pi \mu T} - \frac{d\mu(\pi - \mu)}{2\pi T} . r^{2}$ mit zunehmendem r, d. h. mit zunehmender Entfernung von der Mitte stetig abnimmt, so nimmt die Intensität im Allgemeinen mit $\sin^{2} \pi Q$ zugleich periodisch ab und zu, und es existiren daher mehr oder weniger hyperbolische Ringe, deren Breite sich auf folgende Art bestimmen läfst.

Es sei $\frac{d(\pi - \mu)}{\pi \mu T} = a + g$, wo a die gröfste im Quotienten enthaltene ganze Zahl, und g einen ächten Bruch bedeute, und $\frac{d\mu(\pi - \mu)}{2\pi T} = h$, so dafs $Q = a + g - hr^{2}$ wird. Alsdann wird $Q = a$, also $I_{,}^{2}$ zum ersten Male Null, wenn $r^{2} = \frac{g}{h}$ ist, und $\sqrt{\frac{g}{h}}$ ist die Entfernung des ersten dunklen Ringes von der Mitte. Für $r^{2} = \frac{g+1}{h}$, $\frac{g+2}{h}$, $\frac{g+3}{h}$ etc. wird $Q = a - 1$, $a - 2$, $a - 3$ etc., und mithin die Entfernung der dunklen Ringe von einander, d. h. die Breite der Ringe, vom Centrum ab gerechnet,

$$\sqrt{\frac{g+1}{h}} - \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \sqrt{\frac{g+2}{h}} - \sqrt{\frac{g+1}{h}},$$
$$\sqrt{\frac{g+3}{h}} - \sqrt{\frac{g+2}{h}} \text{ etc.}$$

Sollen mehrere Ringe sichtbar sein, so mufs h, und

somit auch das noch gröfsere $\frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}$ die Einheit mehre Mal in sich enthalten, und es mufs, da $\frac{\mu(\pi-\mu)}{2\pi}$ nur eine sehr kleine Gröfse ist, $\frac{d}{T}$ d. h. das Verhältnifs der Dicke zur Wellenlänge sehr bedeutend sein, und um so mehr, je kleiner $\pi-\mu$, d. h. je schwächer die doppelbrechende Kraft ist.

Ist $r=r_1$ für einen der dunklen Ringe, und $r=r_2$ für den nächstfolgenden Ring, so ist $r^2_2=r_1^2+\frac{1}{h}$, also die Ringbreite $r_2-r_1=\sqrt{r_1^2+\frac{1}{h}}-r_1$; es nimmt dieselbe daher mit der Entfernung vom Mittelpunkt ab. Liegt der erste Ring dem Centrum sehr nahe, so dafs man r_1^2 als verschwindend klein betrachten kann, so hat man für die Breite desselben $r_2-r_1=\sqrt{\frac{1}{h}}=\sqrt{\frac{2\pi T}{\mu(\pi-\mu)d}}$ und es ist dieselbe der $\sqrt{d}$ nahe verkehrt proportional.

Aehnliches leitet man für die Ringe in den andern Asymptotenwinkeln ab, für deren Hauptaxe

$$Q=\frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}+\frac{d(\pi-\mu)}{2T}r^2 \text{ ist.}$$

Da der Phasenunterschied ($2\varpi Q$) der Dicke proportional ist, so ändert sich die von demselben abhängige Lichtstärke mit der Entfernung von der Mitte nur sehr wenig, wenn die Dicke sehr gering ist, und das Gesichtsfeld erscheint von einer gewissen Dicke ab überall gleich hell, so dafs man als Ausdruck für die Intensität die der Intensität des Centrums $I^2 \sin^2\varpi\left(\frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}\right)$ nehmen kann. Ist das Licht nicht homogen, sondern weifs, so erhellt jede Farbe mit der ihr eigenthümlichen (überall fast gleichen) Intensität $I^2 \sin^2\varpi\left(\frac{d(\pi-\mu)}{\pi\mu T}\right)$ das Gesichtsfeld, und dieses

letztere hat durchgängig dieselbe Färbung (Farbe dünner Blättchen).

Da der Phasenunterschied proportional $\pi - \mu$ ist, so wird die Dicke um so geringer, welche einer bestimmten Farbe der Newtonschen Scala entspricht, je stärker die doppelbrechende Kraft des Krystallscheibchens ist.

Dreht man das Krystallscheibchen in seiner Ebene, so dafs also der Hauptschnitt seine Lage gegen die Durchgangs-Ebenen der Nicols ändert, während diese unverrückt auf einander senkrecht bleiben, so hat man aus (V.) für die Intensität

$$7)\quad I_{\prime}^{2} = I^{2} \sin^{2} 2(a - \varphi') \sin^{2} \varpi \varDelta.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem obigen (3) nur durch den für alle Farben sich gleich bleibenden Faktor $\sin^{2} 2(a - \varphi')$; die Farbe ändert sich daher nicht, sondern nimmt nur an Lebhaftigkeit ab. Das Maximum findet in der bisher betrachteten Stellung (für $a - \varphi' = 45^{0}$) statt, und das Licht verschwindet ganz für $a - \varphi' = 0$, und $a - \varphi' = 90^{0}$, also für die Fälle, in denen der Hauptschnitt einem der Nicols parallel wird.

Da aufserdem aber $I_{\prime}^{2}$ nie unabhängig von der Farbe (d. h. von T) verschwindet, insofern $\varDelta$ nie $= 0$ werden kann, so tritt bei weifsem Licht bei keiner Dicke und in keiner Stellung völlige Dunkelheit ein.

Sind die Nicols einander parallel, so wird $\varphi - \varphi' = 0$, also $\quad 8)\quad I_{\prime}^{2} = I^{2}(1 - \sin^{2} 2(a - \varphi') \sin^{2} \varpi \varDelta)$.

Dieser Ausdruck ergänzt den Ausdruck in (7) zu I^{2}. War also das einfallende Licht weifs, so ergänzen die erscheinenden Farben die in der vorigen Stellung sichtbaren zu Weifs. Bei dickeren Platten wird man demnach die den vorigen complementaren Hyperbeln, bei dünnen das gleichmäfsig, aber complementar-gefärbte Gesichtsfeld haben.

Legt man zwei gleich dicke Platten desselben Krystalls über einander, so erhält man aus (III.) für den Gangunterschied, da $d = d'$ ist, und $\alpha' = \alpha_{1}'$, $o = o_{1}$ wird wegen der constanten Geschwindigkeit des gewöhnlichen Strahls,

$$\varDelta = \frac{d}{T}\left(\frac{\cos \alpha_{1}''}{e_{1}} - \frac{\cos \alpha''}{e}\right).$$

Bezeichnet man das Azimuth der Einfalls-Ebene in Bezug auf den Hauptschnitt des ersten Krystalls durch a, und in Bezug auf den des zweiten Krystalls durch a_1, so wird, wenn man die höhern Potenzen von $\sin^2\alpha$ vernachlässigt,

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\pi} \cos^2 a \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\pi} \cos^2 a_1 \sin^2 \alpha,$$

$$\cos\alpha'' = \cos\alpha_1'' = 1 - \tfrac{1}{2}\pi^2 \sin^2\alpha.$$

Stehen die beiden Hauptschnitte senkrecht auf einander, so wird $\cos^2 a_1 = \sin^2 a$, also

$$9)\quad \varDelta = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\pi} (2 \sin^2 a - 1) \sin^2 \alpha.$$

Kreuzen sich die Nicols einander senkrecht, so ist die Intensität proportional $\sin^2 \varpi \varDelta$, und die Gleichung der isochromatischen Curven, wenn Q eine positive Constante bedeutet, und $\sin^2\alpha = r^2$ gesetzt wird,

$$10)\quad Q = \frac{d}{T} \cdot \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\pi} (2 \sin^2 a - 1) r^2,$$

welche einer gleichseitigen Hyperbel angehört, deren Axen $\sqrt{\frac{2QT\pi}{d(\pi^2 - \mu^2)}}$ sind, und deren Asymptoten mit den Hauptschnitten Winkel von 45° bilden, also in die Richtungen der Durchgangs-Ebenen der Nicols fallen. Für negative Krystalle (d. h. für $\pi > \mu$) wird r^2 bei positivem Q nur reel, wenn $a > 45°$ wird, bei negativem Q nur, wenn $a < 45°$ wird; da ferner für $a = 45°$, $Q = 0$, d. h. der Gangunterschied Null wird, so ist von den Strahlenpaaren, welche durch Interferenz zwischen den vier Schenkeln der Asymptoten hyperbolische Curven erzeugen, in den von dem einen Hauptschnitt halbirten Asymptotenwinkeln der eine Strahl der voraneilende, in den andern beiden Winkeln der andere. Dasselbe Gesetz gilt für positive Krystalle, nur dafs die Gangunterschiede in den Schenkeln der Asymptoten positiv werden, wo sie bei negativen Krystallen negativ werden, und umgekehrt.

Da für $r = 0$, d. h. im Centrum des Gesichtsfeldes $Q = 0$ werden mufs, so ist dasselbe dunkel, und zwar

für jede Farbe, so dafs auch bei weifsem Lichte die Mitte schwarz erscheint. Dasselbe findet statt für $a = 45^0$. Die Asymptoten bilden daher ein dunkles Kreuz, welches die beiden Hyperbelgruppen von einander trennt.

Da ferner in der Mitte $Q = 0$ ist, so ist (für homogenes Licht) für den ersten (dunklen) Ring in dem einen Hyperbelsystem $Q = +1$, in dem andern -1, und die Entfernung r_1 desselben vom Centrum wird

$$r_1 = \pm \sqrt{\frac{2\pi T}{d(\pi^2 - \mu^2)}}.$$

Die übrigen dunklen Ringe entsprechen den Werthen $Q = \pm 2$, $Q = \pm 3$ etc., so dafs sich die Entfernungen derselben vom Mittelpunkte (insofern r^2 dem Q proportional ist) wie die Quadratwurzeln aus 1, 2, 3, 4 etc. verhalten, und die Farbenfolge bei weifsem Lichte genau die der Newtonschen Scale ist. Endlich sieht man, dafs diese Entfernungen sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus der Dicke der Platte verhalten.

Da bei sehr dünnen Platten das ganze Gesichtsfeld die Mitte des Centrums hat, so ist dasselbe jederzeit dunkel. Ferner folgt aus (III.), dafs bei verschiedener Dicke beider Platten die Mitte, und somit bei dünnen Platten das ganze Gesichtsfeld gefärbt erscheinen mufs, in der Art, dafs die Farbe in letzterem Falle mit zunehmender Differenz der Dicke in der Ordnung der Newtonschen Scale steigt.

Man folgert wie oben, dafs die Gestalt der Curven sich nicht mit der Drehung des krystallinischen Plattenpaars ändert, dafs die Intensität gleichmäfsig schwächer wird, bis bei einer Drehung von 45° (also wenn die Hauptschnitte den Durchgangs-Ebenen der Nicols parallel werden) die Curven verschwinden, dafs sie bei fortgesetzter Drehung wieder erscheinen, und ihre Intensität nach einer Drehung von 90° ihr Maximum erreicht etc.; und dafs endlich die Farben in die complementären übergehen, wenn bei unveränderter Stellung der Krystallplatten das eine Nicol dem anderen parallel gestellt wird.

2) Farben-Erscheinungen in Krystallplatten, welche unter einem Winkel von 45° gegen die Axe geschnitten sind.

Sind die Krystallflächen 45° gegen die Axe geneigt, so wird $B^2 = D^2 = \frac{1}{2}$, und für diejenigen Strahlen, welche senkrecht einfallen, auch $\delta'^2 = \varkappa'^2 = \frac{1}{2}$, also $\cos\varepsilon' = \sin a$ und $\sin\varepsilon' = -\cos a$, so dafs die Formel (IV.) wiederum in die Formel (V.) übergeht. Da für die schief auffallenden Strahlen, α, also um so mehr α', sehr klein ist, so wird auch für sie δ' und $\varkappa'$ nahe $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, und $\cos\varepsilon'$ und $\sin\varepsilon'$ nahe gleich $\sin a$ und $-\cos a$. Man kann daher die Formel (V.) als erste Näherung für die Intensität sämmtlicher ins Auge kommenden Strahlen betrachten.

Was den Werth von $\varDelta$, d. h. von $\frac{d}{T}\left(\frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e}\right)$ betrifft, so ist für den vorliegenden Fall, wenn man die dritten und höhern Potenzen von $\sin\alpha$ aufser Acht läfst, $\cos\alpha' = 1 - \frac{1}{2}\mu^2\sin^2\alpha$, $\cos\alpha'' = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\alpha$. Ferner ist $\delta'' = (\cos\alpha'' + \sin\alpha''\cos a)\sqrt{\frac{1}{2}}$, also $2\delta''^2 = (1 + e\cos a\sin\alpha - \frac{1}{2}e^2\sin^2\alpha)^2 = 1 + 2e\cos a\sin\alpha - e^2\sin^2 a\sin^2\alpha$, folglich, da $e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2$ ist, wenn man $\pi^2 + \mu^2 = 2k$, und $\pi^2 - \mu^2 = 2k_1$ setzt, $e^2 = k - k_1(2e\cos a\sin\alpha - e^2\sin^2 a\sin^2\alpha) = k - k_1(2e\cos a\sin\alpha - k\sin^2 a\sin^2\alpha)$. Da demnach $e = k^{\frac{1}{2}} - k_1 k^{-\frac{1}{2}} e\cos a\sin\alpha$, also $2e\cos a\sin\alpha = 2k^{\frac{1}{2}}\cos a\sin\alpha - 2k_1\cos^2 a\sin^2\alpha$ ist, so wird

$$e^2 = k - 2k^{\frac{1}{2}}k_1\cos a\sin\alpha + k_1(2k_1\cos^2 a + k\sin^2 a)\sin^2\alpha,$$

und $$\frac{\cos\alpha''}{e} = (1 - \tfrac{1}{2}k\sin^2\alpha)\left[k^{-\frac{1}{2}} + k_1 k^{-1}\cos a\sin\alpha - (k_1 k^{-\frac{1}{2}}\sin^2 a - \tfrac{1}{2}k_1^2 k^{-\frac{3}{2}}\cos^2 a)\sin^2\alpha\right].$$

Man hat daher, wenn man die höhern Potenzen von $\sin\alpha$ unberücksichtigt läfst,

$$11)\quad \frac{\cos\alpha''}{e} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{k}{k_1}\cos a\sin\alpha,$$

mithin $$12)\quad \varDelta = \frac{d}{T}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1}{k}\cos a\sin\alpha\right),$$

welcher Werth von $\varDelta$ in (3) substituirt werden mufs, wenn

man die Intensität haben will für den Fall, dafs die Nicols sich senkrecht kreuzen und der Hauptschnitt des Krystalls den Winkel derselben halbirt. Giebt man dem Δ einen constanten Werth Q, so erhält man die Gleichung für die gleich hellen (isochromatischen) Curven

$$13)\quad \cos a \sin \alpha = \frac{k}{k_1}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} - \frac{TQ}{d}\right),$$

welche einer geraden Linie angehört, die auf dem Hauptschnitt senkrecht steht.

Setzt man $2Q$ einer ungeraden Zahl gleich, also $Q = \frac{1}{2}(2m+1)$, so verschwindet $I_{,}^{2}$, und die Gleichung (13) liefert für diesen Werth die dunklen Linien. Den Gang der Intensität längs des Hauptschnitts erhält man, wenn man $\cos a = 1$ setzt, und die Breite je zwei auf einander folgenden Streifen ergiebt sich aus der Differenz der Radii Vektoren ($\sin \alpha$) für zwei Werthe von Q, die sich um 1 unterscheiden. Wächst aber Q um 1, so ändert sich $\sin \alpha$ (für $\cos a = 1$) um $\frac{Tk}{dk_1}$, d. h. um $\frac{T(\pi^2+\mu^2)}{d(\pi^2-\mu^2)}$; mithin ist die Breite der Streifen, wenigstens für kleine Werthe von α, constant, und zwar um so gröfser, je geringer die Dicke d und je geringer die doppelbrechende Kraft $(\pi^2 - \mu^2)$ ist.

Legt man zwei Krystallplatten über einander, so ergiebt sich aus (III.) wegen $o = o_1$ und $\alpha' = \alpha_1'$ für den Gangunterschied

$$\Delta = \frac{1}{T}\left(\frac{d_1 \cos \alpha_1''}{e_1} - \frac{d \cos \alpha''}{e}\right).$$

Ist wiederum a das Azimuth der Einfalls-Ebene gegen den Hauptschnitt im ersten Krystall, und a_1 dasselbe im zweiten, so findet sich aus (11)

$$\frac{\cos \alpha''}{e} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{k} \cos a \sin \alpha, \qquad \frac{\cos \alpha_1''}{e_1} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{k} \cos a_1 \sin \alpha,$$

also, wenn beide Platten gleich dick sind,

$$15)\quad \Delta = \frac{dk_1}{Tk}(\cos a_1 - \cos a) \sin \alpha.$$

Kreuzen sich die Hauptschnitte senkrecht, so wird $\cos a_1 = \pm \sin a$ und $\Delta = \frac{dk_1}{Tk}(\sin a \pm \cos a) \sin \alpha$,

welche Gleichung für ein constantes Δ die Form der isochromatischen Curve bestimmt. Sie gehört, wie man sieht, einer geraden Linie an, welche den Winkel zwischen den Hauptschnitten halbirt. Es folgt ferner aus der Gleichung, dafs der erste der dunklen Streifen durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht, und dafs die Breite der Streifen, wie bei einfachen Platten, constant ist.

3) Farben-Erscheinungen in Krystallplatten, welche senkrecht gegen die Axe geschnitten sind.

Wenn die Krystallflächen senkrecht auf der Axe stehen, so ist $D = 1$, $B = 0$, also $\delta' = \cos\alpha'$, $\delta'' = \cos\alpha''$ $\cos\varepsilon' = 0$, $\sin\varepsilon' = 1$, und aus (IV.) erhält man:

VI. $I_{\prime}^{2} = I^{2}\varrho^{2}[\cos^{2}(\varphi - \varphi') - \sin 2\varphi \sin 2\varphi' \sin^{2}\varpi\Delta]$.

Diese Formel geht über in $I_{\prime}^{2} = I^{2}\varrho^{2}\cos^{2}(\varphi - \varphi')$, wenn $\sin 2\varphi = 0$ und wenn $\sin 2\varphi' = 0$ wird, d. h. für $\varphi = 0$, $\varphi = 90^{0}$, $\varphi' = 0$, $\varphi' = 90^{0}$.

Die Intensität wird also in diesen Fällen unabhängig vom Phasenunterschied, und das Licht ist daher ungefärbt, welche Neigung $(\varphi - \varphi')$ auch die beiden Nicols gegen einander haben mögen. Da die Einfalls-Ebene der durch den Krystall gehenden Strahlen alle mögliche Lagen annimmt, d. h. da φ für die verschiedenen Strahlen alle Werthe von 0^{0} bis 360^{0} durchwandert, so tritt jene Farblosigkeit für alle Strahlen ein, deren Einfalls-Ebene den Durchgangsrichtungen der Nicols parallel ist oder auf derselben senkrecht steht. Das Gesichtsfeld ist daher von 8 farblosen Radien durchschnitten, die paarweise auf einander senkrecht stehen. Kreuzen sich die Nicols senkrecht (d. h. ist $\varphi - \varphi' = 90$), so fallen diese 8 Radien paarweise zusammen, die Intensität in denselben $I_{\prime}^{2}$ wird 0, und das Gesichtsfeld daher von einem dunklen rechtwinkligen Kreuze durchschnitten. Sind die Nicols parallel (d. h. $\varphi - \varphi' = 0$), so fallen wiederum die 8 Radien paarweise zusammen, die Intensität in denselben wird $I^{2}\varrho^{2}$, und das Gesichtsfeld ist daher von einem farblosen rechtwinkligen Kreuze durchschnitten. Bilden die Durchgangs-Ebenen der Nicols einen

Winkel von 45° (d. h. ist $\varphi - \varphi' = 45$), so bilden die Radien unter einander gleiche Winkel (von 45°), und die Intensität in ihnen ist $\frac{1}{2} I^2 e^2$; sie sind also matt weiſs.

Um die Vertheilung der Farben in den übrigen Theilen des Gesichtsfeldes zu bestimmen, bleibt noch der Gangunterschied Δ zu untersuchen übrig.

Für die vorliegende Lage der Axen ist

$$e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\delta''^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2) \cos^2 \alpha''$$
$$= \mu^2 - (\mu^2 - \pi^2) \sin^2 \alpha'.$$

Läſst man die höhern Potenzen von $\sin^2 \alpha$ auſser Acht, so wird $\sin^2 \alpha'' = \mu^2 \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha'$, $\cos \alpha'' = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \alpha =$ $1 - \mu^2 \sin^2 \alpha = \cos \alpha'$, also $\frac{1}{e} = \frac{1}{\mu} + \frac{\mu^2 - \pi^2}{2\mu} \sin^2 \alpha$ und

$$\Delta = \frac{d}{T}\left(\frac{\cos \alpha'}{o} - \frac{\cos \alpha''}{e}\right) = \frac{d}{T}(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2 \sin^2 \alpha)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{d}{T} \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\mu} \sin^2 \alpha.$$

Die Intensität ist also

$$15) \quad I_{,}^2 = I^2 \varrho^2 \left[\cos^2(\varphi - \varphi') - \sin 2\varphi \sin 2\varphi' \times \sin^2 \varpi \left(\frac{d}{T} \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\mu} \sin^2 \alpha\right)\right].$$

1) Kreuzen sich die Nicols senkrecht, so wird

$$16) \quad I_{,}^2 = I^2 \varrho^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \varpi \left[\frac{d(\pi^2 - \mu^2)}{2\mu T} \sin^2 \alpha\right].$$

Da für $\alpha = 0$ auch Δ unabhängig von der Farbe verschwindet, so ist die Mitte dunkel, das einfallende Licht mag weiſs oder homogen sein. Die Intensität verschwindet ferner für $\sin^2 \alpha = \frac{2n\mu T}{d(\pi^2 - \mu^2)}$, unter n jede beliebige ganze Zahl gedacht; und da dies unabhängig von φ, also von der Richtung des Radius Vektors geschieht, so liegen die dunklen Punkte in concentrischen Kreisen, deren Radius $\sqrt{\frac{2n\mu T}{d(\pi^2 - \mu^2)}}$ ist. Die Quadrate der Radien verhalten sich daher verkehrt wie die Dicken, und bei gleicher Dicke und bei gleicher Farbe (T) in verschiedenen

Krystallen umgekehrt wie $\frac{\pi^2-\mu^2}{\mu}$. Die Ringe werden demnach um so gröfser, je geringer die Dicke, und je geringer die doppelbrechende Kraft ist.

In einem und demselben Ringsystem verhalten sich die Halbmesser der Ringe wie $\sqrt{2n}$, also wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen.

Vergleicht man die Ringe bei derselben Krystallplatte für verschiedene Farben, so verhalten sich die Radien der correspondirenden (zu demselben Werth von n gehörigen) Ringe wie die Quadratwurzeln aus T, also auch wie die Quadratwurzeln aus den Wellenlängen. Im rothen Lichte werden daher z. B. die Ringe gröfser als im blauen Lichte sein.

Ist das einfallende Licht weifs, so wird nur das Centrum und das Kreuz dunkel, da deren Intensität von T unabhängig verschwindet; die dunklen Ringe jeder einzelnen Farbe werden aber aufserhalb der Arme des Kreuzes von dem Lichte der übrigen Farben bedeckt.

Die Intensität für einen bestimmten Kreis, d. h. für ein constantes α ist $\Sigma I_{/}^{2} = \Sigma I^2 \varrho^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \varpi\varDelta$, wo das Summenzeichen Σ sich auf die Werthe für die verschiedenen homogenen Farben bezieht, und seine Färbung läfst sich nach der Newtonschen Regel bestimmen. Da $\Sigma I^2 \varrho^2$ constant ist, so ist die Intensität in den verschiedenen Punkten der Peripherie eines jeden Kreises proportional $\sin^2 2\varphi$, sie erreicht daher ihr Maximum für $\varphi = 45^0$, $\varphi = 135^0$, $\varphi = 225^0$ und $\varphi = 315^0$, d. h. in den Richtungen, welche die Winkel zwischen den Armen des Kreuzes halbiren, und nimmt zu beiden Seiten bald schnell ab. In der Nähe der Kreuzesarme wird das Licht daher äufserst schwach, so dafs diese letzteren nicht scharf begrenzt erscheinen, sondern dunklen Büscheln gleichen, welche mit der Entfernung von der Mitte breiter werden. Da ferner der Wechsel der Intensität in den Ringen nur von φ abhängt, so ist derselbe von der Farbe unabhängig, und jeder Farbenkreis hat eine constante Farbe, welche wegen des Wachsens der Ring-

breite mit der $\sqrt{T}$, mit der Entfernung von der Mitte in der Newtonschen Scale steigt.

2) Sind die Durchgangs-Ebenen der Nicols parallel, so wird

$$17)\quad I_{,}^{2} = I^{2}\varrho^{2}(1 - \sin^{2}2\varphi \sin^{2}\varpi\Delta).$$

Die Intensität ergänzt also die in der vorigen Stellung hervortretende zu $I^{2}\varrho^{2}$, d. h. zu weifsem Lichte. Das Gesichtsfeld, welches durch das weifse Kreuz ausgezeichnet ist, zeigt also gleichfalls Kreise, deren Farben denen in der vorigen Stellung complementar sind.

3) Bilden die Nicols einen Winkel von 45°, so wird

$$18)\quad I_{,}^{2} = \tfrac{1}{2}I^{2}\varrho^{2}(1 - \sin 4\varphi \sin^{2}\varpi\Delta).$$

In dem ersten durch die 8 weifsen Radien abgetheilten Octanten, d. h. zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 45°$, ist $\sin 4\varphi$ positiv, und die Ringstücke sind denen der Stellung in (2) ähnlich; ihre Intensität ist am gröfsten in der Mitte (für $\varphi = 22\frac{1}{2}$). Im zweiten Octanten (zwischen $\varphi = 45°$ und $\varphi = 90°$) ist $\sin 4\varphi$ negativ. Ist φ_1 irgend ein Werth von φ, und $I_{,}^{2}(\varphi_1)$ der Werth von $I_{,}^{2}$ für dieses φ_1, und $I_{,}^{2}(\varphi_2)$ dessen Werth für $\varphi = 45 - \varphi$, so ist $I_{,}^{2}(\varphi_1) + I_{,}^{2}(\varphi_2) = I^{2}\varrho^{2}$, folglich sind die Farben der Ringstücke im zweiten Octanten denen im ersten complementar. Da ferner $\sin 4\varphi$ sich nicht ändert, wenn φ um 90° wächst, so sind im 3ten, 5ten, 7ten Octanten die Farben der Ringstücke genau so wie im ersten Octanten, und im 4ten, 6ten, 8ten Octanten genau so wie im zweiten.

Farben-Erscheinungen in Krystallen, welche senkrecht gegen die Axe geschnitten sind bei circular oder elliptisch polarisirtem Einfallslichte.

Das elliptisch polarisirte Licht werde durch Totalreflexion in einem Fresnel'schen Glasparallelepiped erzeugt, und zwar sei das auf das letztere geleitete Licht unter dem Winkel θ gegen die Reflexions-Ebene geneigt, und werde unter solchen Winkeln reflektirt, dafs der Gangunterschied nach der letzten Reflexion $\frac{1}{4}$ Undulation beträgt. Uebrigens

sei die Austrittsfläche des Parallelepipeds der Krystallfläche parallel.

Ist die Phase des linear polarisirten Lichtes (von der Intensität I^2) vor der Reflexion ξ, also die Oscillations-Geschwindigkeiten der nach der Reflexions-Ebene und senkrecht darauf zerlegte Antheile beziehlich $I \sin\xi \cos\theta$ und $I \sin\xi \sin\theta$, so sind dieselben nach dem Austritt aus dem Parallelepiped, wenn man den Verlust der Intensität der Bewegung durch die partiellen Reflexionen an der Ein- und Austrittsfläche für beide Theile einander gleich und zwar proportional ϱ annimmt,

$$I\varrho \sin(\xi + 90) \cos\theta = I\varrho \cos\xi \cos\theta \text{ und } I\varrho \sin\xi \sin\theta.$$

Ist φ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der ursprünglichen Polarisations-Ebene, also $\theta + \varphi$ der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der Reflexions-Ebene, so wird die Oscillations-Geschwindigkeit des im Krystall gewöhnlich gebrochenen Lichtes:

$$I\varrho_2 \sin\xi \sin\theta \sin(\theta + \varphi) + I\varrho_2 \cos\xi \cos\theta \cos(\theta + \varphi),$$

und die des ungewöhnlich gebrochenen nach dem Eintritt:

$$I\varrho_1 \sin\xi \sin\theta \cos(\theta + \varphi) + I\varrho_1 \cos\xi \cos\theta \sin(\theta + \varphi),$$

und nach dem Austritt:

$$I\varrho_2 \sin(\xi + 2\varpi\Delta) \sin\theta \cos(\theta + \varphi) \\ + I\varrho_2 \cos(\xi + 2\varpi\Delta) \cos\theta \sin(\theta + \varphi),$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 ächte Brüche sind, welche die Schwächung der Bewegung durch die partiellen Reflexionen bedeuten.

Wenn alsdann der Winkel zwischen dem Hauptschnitt und der Durchgangs-Ebene des hinteren Nicols φ' ist, so wird die Oscillations-Geschwindigkeit der interferirenden Strahlen

$$I\varrho_3 [\sin\xi \sin\theta \sin(\theta + \varphi) \cos\varphi' + \cos\xi \cos\theta \cos(\theta + \varphi) \cos\varphi' \\ - \sin(\xi + 2\varpi\Delta) \sin\theta \cos(\theta + \varphi) \sin\varphi' \\ + \cos(\xi + 2\varpi\Delta) \cos\theta \sin(\theta + \varphi) \sin\varphi'].$$

Der Coefficient von $\sin\xi$ ist also, wenn man $I\varrho_3 = I'$ setzt,

$$I' [\sin\theta \sin(\theta + \varphi) \cos\varphi' - \cos 2\varpi\Delta \sin\theta \cos(\theta + \varphi) \sin\varphi' \\ - \sin 2\varpi\Delta \cos\theta \sin(\theta + \varphi) \sin\varphi']$$

und der Coefficient von $\cos\xi$

$$I' [\cos\theta \cos(\theta + \varphi) \cos\varphi' - \sin 2\varpi\Delta \sin\theta \cos(\theta + \varphi) \sin\varphi' \\ + \cos 2\varpi\Delta \cos\theta \sin(\theta + \varphi) \sin\varphi'].$$

Die Intensität des interferirten Lichtes, welche der Summe der Quadrate dieser Coefficienten gleich ist, $I_{,}^{2}$, wird daher

VII. $I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}[1 + \cos 2\theta \cos 2\varphi' \cos 2(\theta + \varphi)$
$+ \cos 2\theta \sin 2\varphi' \sin 2(\varphi + \theta) \cos 2\varpi\Delta - \sin 2\theta \sin 2\varphi' \sin 2\varpi\Delta]$.

1) Wenn das einfallende Licht kreisförmig polarisirt ist, so wird $\theta = 45^{0}$, also

19) $I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}[1 - \sin 2\varphi' \sin 2\varpi\Delta]$.

Da $I_{,}^{2}$ von $\varphi - \varphi'$ unabhängig ist, so bleibt die Erscheinung für jede Lage des zweiten Nicols dieselbe (das erste mufs seine Lage behalten, da durch sie die Kreisförmigkeit der Polarisation bestimmt wird). Für $\varphi' = \frac{n}{2}\varpi$ wird $I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}$, und das Gesichtsfeld ist daher von zwei schwachen farblosen sich senkrecht kreuzenden Linien durchzogen (s. Fig. 68.), von denen die eine in der Durchgangs-Ebene des zweiten Nicols liegt.

Liegt φ' zwischen 90^{0} und 180^{0} oder zwischen 270^{0} und 360^{0}, so wird

$$I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}(1 + \sin 2\varphi_{1} \sin 2\varpi\Delta),$$

wenn $2\varphi_{1}$ der spitze Winkel ist, dessen Sinus absolut genommen dem $\sin 2\varphi'$ gleich ist. In zwei gegenüberstehenden Quadranten wird daher die Farbenvertheilung vollkommen gleich. In den beiden andern Quadranten wird

$$I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}(1 - \sin 2\varphi_{1} \sin 2\varpi\Delta),$$

die Farben also denen in den ersten Quadranten complementar. Dafs die Ringe Kreisbogen werden, lehrt die Aehnlichkeit vorstehender Formel mit der Formel (17). Dafs hier $\sin 2\varphi'$ steht, während dort $\sin^{2} 2\varphi$ der Faktor war, erzeugt 1) das Ueberspringen in die complementaren Farben beim Uebergang von einem Quadranten in den andern, 2) einen langsameren Wechsel der Intensität innerhalb desselben Farbenringes. Auch hier ist das Licht in der Mitte der Quadranten am stärksten, contrastirt aber weniger als dort.

2) Wenn das einfallende Licht elliptisch polarisirt ist, so wird, wenn $\varphi - \varphi' - 90^{0}$ ist, die Nicols sich also einander senkrecht kreuzen,

$I_{,}^{2} =$

$$I_{,}^{2} = \tfrac{1}{2}I'^{2}[1 - \cos 2\theta \cos 2\varphi' \cos 2(\theta + \varphi')$$
$$- \cos 2\theta \sin 2\varphi' \sin 2(\varphi' + \theta) \cos 2\varpi\Delta - \sin 2\theta \sin 2\varphi' \sin 2\varpi\Delta].$$

Für $\varphi' = \frac{n}{2}\varpi$ wird $I_{,}^{2} = \frac{1}{2}I'^{2}\sin^{2}2\theta$, also unabhängig vom Phasenunterschied; es erscheint daher ein weifses Kreuz, dessen Arme den Durchgangs-Ebenen der Nicols parallel sind, und dessen Lichtstärke um so gröfser ist, je näher θ an 45^{0} liegt, und in der Nähe von $\theta = 0$, wo sich die elliptische Polarisation der linearen nähert, fast verschwindet.

Der von der Farbe abhängige Theil der Intensität ist
$$-\tfrac{1}{2}I'^{2}\sin 2\varphi'[\sin 2\theta \sin 2\varpi\Delta + \cos 2\theta \sin 2(\theta + \varphi') \cos 2\varpi\Delta]$$
und erhält die Form:
$$A \cos(2\varpi\Delta - B),$$
wenn man
$$A = -\tfrac{1}{2}I'^{2}\sin 2\varphi' \sqrt{[\sin^{2}2\theta + \cos^{2}2\theta \sin^{2}2(\theta + \varphi')]}$$
und
$$\tang B = \frac{\tang 2\theta}{\sin 2(\theta + \varphi')}$$
setzt.

Die Gleichung für die isochromatischen Curven ist dann
$$2\varpi\Delta = B + 2n\varpi \quad \text{oder} \quad \Delta = \frac{B}{2\varpi} + n,$$
unter n eine ganze Zahl verstanden, oder da
$$\Delta = \frac{d}{T}\frac{\pi^{2} - \mu^{2}}{2\mu}\sin^{2}\alpha \text{ ist,}$$
$$\sin^{2}\alpha = \frac{2\mu T}{d(\pi^{2} - \mu^{2})}\left(\frac{B}{2\varpi} + n\right).$$
Es ändert sich also α bei einem und demselben Krystallstück nur mit B und n, und bei demselben Ringe nur mit B. B wird aber um so kleiner, je kleiner θ ist, wenn $\sin 2(\theta + \varphi')$ selber nur nicht sehr klein wird. $\sin 2(\theta + \varphi')$ verschwindet in zwei die Mitte durchkreuzenden geraden Linien, nämlich für $\varphi' = \frac{a\varpi}{2} - \theta$ (wo unter a eine ganze Zahl zu denken ist), also wenn $\varphi' = -\theta$, $= 90^{0} - \theta$, $= 180^{0} - \theta$, $= 270^{0} - \theta$ ist. Von diesen geraden Linien ist also die eine der Reflexions-Ebene parallel, die andere

darauf senkrecht. Da nun in einiger Entfernung von diesen Linien B für kleine θ nur sehr klein wird, so ändert sich α mit φ' wenig, d. h. die Ringe nähern sich daselbst um so mehr der Kreisform, je weniger die Reflexions-Ebene gegen die erste Polarisations-Ebene geneigt ist. Beim Durchgang durch jene geraden Linien ändert $\sin 2(\theta+\varphi')$, und somit auch B sein Zeichen; es werden daher an diesen Stellen Einbiegungen erscheinen, wie sie in Figur 59. angedeutet sind, wo PP die Reflexions-Ebene, und $P'P'$ die darauf Senkrechte vorstellt. Vergleiche die Figur 69.

Farben-Erscheinungen in senkrecht gegen die Axe geschnittenen Bergkrystallplatten.

Es werde auf den Krystall durch ein Nicolsches Prisma linear-polarisirtes Licht geleitet, dessen Vibrations-Intensität durch I und dessen Phase durch ξ bezeichnet sei, so dafs $I\sin\xi$ die Oscillationsgeschwindigkeit in demselben ist. Ferner sei das Axenverhältnifs der elliptischen Schwingungsbahnen im Innern des Krystalls $1:n$, wo n sich mit der Neigung des Strahls gegen die optische Axe ändert und 1 selber wird, wenn er der Axe parallel ist. Alsdann seien I_2 und nI_2 die Vibrations-Intensitäten der Componenten des gewöhnlichen Strahls nach der ersten Brechung, beziehlich nach dem Hauptschnitt (welcher hier mit der Einfalls-Ebene zusammenfällt) und senkrecht auf denselben; und I_2' und $\frac{1}{n}I_2'$ die entsprechenden Gröfsen für den ungewöhnlich gebrochenen Strahl. Die Phasenänderung im System I_2 sei v, im System I_2' dagegen v', also $v-90$ im System nI_2 (wenn der Krystall ein rechts gewundener ist), und $v'+90$ im System $\frac{1}{n}I_2'$: so dafs die Oscillationsgeschwindigkeiten in den 4 Componenten im Innern des Krystalls sind:

$$a)\quad I_2\sin(\xi+v)=x\cos\xi+\omega\sin\xi$$

$$b)\quad nI_2\sin(\xi+v-90)=nx\sin\xi-n\omega\cos\xi$$

$$c)\quad I_2'\sin(\xi+v') = z\cos\xi + y\sin\xi$$

$$d)\quad \frac{1}{n}I_2'\sin(\xi+v'+90) = -\frac{z}{n}\sin\xi + \frac{y}{n}\cos\xi,$$

wo $\omega = I_2\cos v$, $x = I_2\sin v$, $y = I_2'\cos v'$, $z = I_2'\sin v'$ ist. Ist der Krystall links gewunden, so hat man statt (b) und (d) respective zu nehmen

$$nI_2\sin(\xi+v+90) = -(nx\sin\xi - n\omega\cos\xi)$$

und $$\frac{1}{n}I_2'\sin(\xi+v'-90) = \frac{z}{n}\sin\xi - \frac{y}{n}\cos\xi,$$

welche Ausdrücke in die vorigen übergehen, wenn man $-n$ statt n setzt. Es gelten daher die in der Folge aus ($a-d$) entwickelten Ausdrücke für links gewundene Krystalle, wenn man n negativ nimmt.

Sollen jene 4 Bewegungen aus der Bewegung $I\sin\xi$ entstanden sein, so mufs, wenn man dieselben nach der ursprünglichen Polarisations-Ebene und senkrecht darauf zerlegt, und den Verlust durch partielle Reflexionen unberücksichtigt läfst, die erste der resultirenden Componenten $I\sin\xi$, die zweite Null sein. Bildet die Einfalls-Ebene mit der ursprünglichen Polarisations-Ebene den Winkel φ, so führt dies auf die Gleichungen

$$(\omega\sin\xi + x\cos\xi)\cos\varphi + n(x\sin\xi - \omega\cos\xi)\sin\varphi$$
$$+ (y\sin\xi + z\cos\xi)\cos\varphi - \frac{1}{n}(z\sin\xi - y\cos\xi)\sin\varphi = I\sin\xi,$$

$$(\omega\sin\xi + x\cos\xi)\sin\varphi - n(x\sin\xi - \omega\cos\xi)\cos\varphi$$
$$+ (y\sin\xi + z\cos\xi)\sin\varphi + \frac{1}{n}(z\sin\xi - y\cos\xi)\cos\varphi = 0.$$

Da diese Gleichungen unabhängig von ξ richtig bleiben müssen, so erhält man durch Gleichstellung der Coefficienten von $\sin\xi$ und $\cos\xi$ die Gleichungen

$$(\omega+y)\cos\varphi + \left(nx - \frac{z}{n}\right)\sin\varphi = I$$

$$(x+z)\cos\varphi - \left(n\omega - \frac{y}{n}\right)\sin\varphi = 0$$

$$(\omega+y)\sin\varphi - \left(nx - \frac{z}{n}\right)\cos\varphi = 0$$

$$(x+z)\sin\varphi + \left(n\omega - \frac{y}{n}\right)\cos\varphi = 0,$$

aus denen, wenn man $\frac{I}{1+n^2}=p$ setzt,

$$\omega = p\cos\varphi,\quad x = np\sin\varphi,\quad y = n^2 p\cos\varphi,\quad z = -np\sin\varphi$$

folgt.

Beim Eintritt in den Krystall sind daher die Componenten $(a-d)$

a') $p(\cos\varphi\sin\xi + n\sin\varphi\cos\xi)$

b') $p(n^2\sin\varphi\sin\xi - n\cos\varphi\cos\xi)$

c') $p(n^2\cos\varphi\sin\xi - n\sin\varphi\cos\xi)$

d') $p(\sin\varphi\sin\xi + n\cos\varphi\cos\xi)$.

Ist ferner Δ die Zahl der Wellenlängen, um welche der langsamere ungewöhnliche Strahl gegen den gewöhnlichen beim Austritt aus dem Krystall zurückgeblieben ist, so sind die letzten zwei Componenten zur Zeit des Austritts $p(n^2\cos\varphi\sin(\xi+2\varpi\Delta) - n\sin\varphi\cos(\xi+2\varpi\Delta))$

$p(\sin\varphi\sin(\xi+2\varpi\Delta) + n\cos\varphi\cos(\xi+2\varpi\Delta))$.

Werden diese Componenten endlich nach der Durchgangs-Ebene des zweiten Nicols zerlegt, um die Intensität der Bewegung der interferirenden Strahlen zu erhalten, so ergiebt sich, wenn man den Winkel zwischen der Einfalls-Ebene und jener Durchgangs-Ebene φ' nennt, für die Componenten:

a'') $p\cos\varphi'(\cos\varphi\sin\xi + n\sin\varphi\cos\xi)$

b'') $p\sin\varphi'(n^2\sin\varphi\sin\xi - n\cos\varphi\cos\xi)$

c'') $p\cos\varphi'(n^2\cos\varphi\sin(\xi+2\varpi\Delta) - n\sin\varphi\cos(\xi+2\varpi\Delta)$

d'') $p\sin\varphi'(\sin\varphi\sin(\xi+2\varpi\Delta) - n\cos\varphi\cos(\xi+2\varpi\Delta)$.

Die gesammte Bewegung ist daher, wenn man $2\varpi\Delta = g$ setzt,

$$\begin{aligned} &p[\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos g \\ &+ n^2(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos g) + n\sin(\varphi-\varphi')\sin g]\sin\xi \\ &+ p[n\sin(\varphi-\varphi') + n^2\cos\varphi\cos\varphi'\sin g - n\sin(\varphi-\varphi')\cos g \\ &+ \sin\varphi\sin\varphi'\sin g]\cos\xi, \end{aligned}$$

und die Intensität der interferirenden Strahlen $I_{,}^2$, welche gleich der Summe der Quadrate der Coefficienten von $\sin\xi$ und $\cos\xi$ ist, wird

$$\text{VIII.}\quad I_{,}^2 = p^2(1-n^2)^2\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2\varpi\Delta + p^2[(1+n^2)\cos(\varphi-\varphi')\cos\varpi\Delta + 2n\sin(\varphi-\varphi')\sin\varpi\Delta]^2.$$

1) Wenn die Nicols sich einander senkrecht kreuzen, wird wegen $\varphi-\varphi' = 90^0$,

$I_{,}^2 = p^2(4n^2 + (1-n^2)^2 \sin^2 2\varphi') \sin^2 \varpi\Delta$, d. h.

$$20)\quad I_{,}^2 = I^2\left[1 - \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2 \cos^2 2\varphi'\right] \sin^2 \varpi\Delta.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn Δ verschwindet oder einer ganzen Zahl gleich wird, und zwar unabhängig von φ', d. h. unabhängig von der Lage der Einfalls-Ebene; das Gesichtsfeld ist daher von concentrischen kreisförmigen dunklen Ringen durchzogen, und da $I_{,}^2$ nie unabhängig vom Gangunterschied Δ verschwinden kann, so sind diese Ringe durch keine dunklen Linien unterbrochen (siehe Fig. 70.).

Die Breite der Ringe, und die Vertheilung der Intensität innerhalb derselben bei homogenem Lichte, so wie die Breite der Ringe und die Farbenvertheilung bei weifsem Lichte wird durch die Funktion Δ bestimmt.

Folgte die Geschwindigkeit der ungewöhnlichen Strahlen in der Nähe der Axe dem Gesetz der normalen einaxigen Krystalle, so wäre $\Delta = \frac{d}{T}\frac{\pi^2-\mu^2}{2\mu}\sin^2\alpha$; da aber in der Richtung der Axe noch eine Differenz im Gange stattfindet, so darf Δ für $\alpha = 0$ nicht verschwinden, und dürfte daher die Form

$$\Delta = \frac{d}{T}\left(\frac{\pi^2-\mu^2}{2\mu}\sin^2\alpha + H\right)$$

haben, H als Funktion der Wellenlänge l gedacht.

Nun wird nach dem Biot'schen Gesetz die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, wenn das zweite Nicol bei einem rechts gewundenen Krystall um einen Winkel nach rechts gedreht wird, welcher in geradem Verhältnifs zur Dicke, und in umgekehrtem zum Quadrat der Wellenlänge steht Aus (VIII.) findet man aber die Intensität der Mitte, indem man $n = 1$ setzt,

$$I_{,}^2 = I^2(\cos(\varphi-\varphi')\cos\varpi\Delta + \sin(\varphi-\varphi')\sin\varpi\Delta)$$
$$= I^2\cos^2(\varphi-\varphi'-\varpi\Delta);$$

sie wird daher dunkel für $\varphi - \varphi' = 90 + \varpi\Delta$, und mithin ist $\varpi\Delta$ der Drehungswinkel. Der Biot'schen Regel gemäfs mufs demnach für $\alpha = 0$, $\varpi\Delta = \frac{hd}{l^2}$ werden, wo h eine

Constante ist. Es ist also $\frac{d}{T}H\varpi = \frac{hd}{l^2}$, und $H = \frac{h}{v l \varpi}$, unter v die Geschwindigkeit des Lichtes im umgebenden Mittel verstanden, oder da v constant ist, $H = \frac{h}{l\varpi}$, mithin

$$\Delta = \frac{vd}{l}\left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\mu}\sin^2\alpha + \frac{h}{l\varpi}\right),$$

wo man h positiv oder negativ zu nehmen hat, je nachdem der Krystall rechts oder links gewunden ist.

Ist l_1 die constante Wellenlänge der mittleren (gelben) und $l_1 + \delta l_1$ die der übrigen Farbenstrahlen, so ist wegen der Kleinheit des δl_1 für die Farbe $l_1 + \delta l_1$

$$\varpi\Delta = \frac{v\varpi(\pi^2 - \mu^2)d}{2\mu l_1}\sin^2\alpha + \frac{vhd}{l_1^2} - \frac{\delta l_1}{l_1^2}\left[\frac{2vhd}{l_1} + \frac{v\varpi(\pi^2 - \mu^2)d}{2\mu}\sin^2\alpha\right].$$

Darf man $\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}$, welches höchst unbedeutend von Farbe zu Farbe variirt, als constant annehmen, so sind die ersten beiden Glieder jenes Ausdrucks von der Farbe unabhängig, und die Farbenmischung bei einfallendem weifsen Licht hängt lediglich von dem letzten veränderlichen Glied ab. Die Farbe der Mitte entspricht alsdann dem Gangunterschiede $\frac{2\delta l_1 vhd}{\varpi l_1^3}$, und die Farbe der ferneren Ringe dem vollständigen dritten Gliede des obigen Ausdrucks, so dafs die Farbenfolge wenigstens nahe die der Newtonschen Scale ist.

Der Gangunterschied Δ ist für jede Farbe für einen bestimmten Werth des Einfallswinkels α constant; also sind die einfarbigen Ringe im homogenen, und die farbigen Ringe im weifsen Lichte kreisförmig; aber die Intensität in den einzelnen Ringen ist nicht in ihrem ganzen Umfange dieselbe, sondern von dem Faktor $p^2(4n^2 + (1 - n^2)\sin^2\varphi')$ abhängig. Die Ringe werden daher in denjenigen Punkten ihre gröfste Helligkeit haben, für welche $\sin 2\varphi' = 1$, ihre geringste Helligkeit dagegen in denen, für welche $\sin 2\varphi'$

$= 0$ ist. Der Unterschied der gröfsten und geringsten Helligkeit wird aber um so gröfser sein, je gröfser $1 - n^2$ ist, d. h. je weiter die Ringe vom Mittelpunkt abstehen.

Es ist aber $\sin 2\varphi' = 1$, wenn $\varphi' = \frac{2a+1}{4}\varpi$ ist, also für diejenigen Punkte, welche in Linien liegen, die mit dem zweiten Nicol die Winkel 45°, 135°, 225°, 315° bilden; und $\sin 2\varphi'$ ist gleich 0, wenn $\varphi' = \frac{a}{2}\varpi$ ist, also für die Punkte, welche in Linien liegen, die mit demselben die Winkel 0°, 90°, 180°, 270° bilden, d. h. in den Richtungen der Durchgangs-Ebenen der Nicols. In einer gewissen Entfernung von der Mitte werden daher in diesen Richtungen die Ringe von dunklen Büscheln beschattet (siehe Figur 70.).

Da in dem Ausdruck für $I_{,}^2$, n nur als Quadrat vorkommt, so ändert für links-gewundene Krystalle nur h sein Zeichen, welches die Erscheinung nur insofern modificirt, als die Farbenfolge von einem andern Punkte der Newtonschen Scale ausgeht.

2) Die Nicols seien beliebig gegen einander geneigt. Man führe in den allgemeinen Intensitäts-Ausdruck (VIII.) in diesem Falle einen neuen Winkel ψ so ein, dafs $tg\psi = \frac{2n}{1+n^2} tg(\varphi - \varphi')$, also

$$\cos(\varphi - \varphi')\cos\varpi\Delta + \frac{2n}{1+n^2}\sin(\varphi - \varphi')\sin\varpi\Delta$$

$$= \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\psi}\cos(\psi - \varpi\Delta)$$

$$= \cos(\psi - \varpi\Delta)\sqrt{\cos^2(\varphi - \varphi') + \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2 \sin^2(\varphi - \varphi')}$$

wird. Die Gleichung (VIII.) geht sodann über in:

$$I_{,}^2 = p^2(1-n^2)^2\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2\varpi\Delta + I^2\left[\cos^2(\varphi - \varphi') + \frac{4n^2}{(1+n^2)^2}\sin^2(\varphi - \varphi')\right]\cos^2(\psi - \varpi\Delta),$$

wofür man abkürzend schreiben kann:

$$21) \quad I_{,}^2 = p^2[a\sin^2\varpi\Delta + b\cos^2(\psi - \varpi\Delta)].$$

Zur Bestimmung der Gestalt der Ringe im Allgemeinen kann man folgendes Verfahren anwenden:

Die Punkte des Gesichtsfeldes, welche gleichen Phasenunterschieden (oder gleichen Werthen von Δ) entsprechen, liegen in concentrischen Kreisen. Entsprächen nun auch gleiche Werthe von Δ gleichen Werthen von $I_{,}^{2}$, so wären diese Kreise zugleich von gleicher Helligkeit, und die Farbenringe hätten Kreisform. Da dies aber nicht der Fall ist, so lassen sich doch die Werthe von Δ suchen, welche zu jedem beliebigen aber constanten Werthe von $I_{,}^{2}$ gehören.

Hält man eine bestimmte Stellung der Nicols fest, d. h. betrachtet man $\varphi-\varphi'$ als constant, so ist I^{2} eine Funktion von n (der Entfernung vom Centrum) und von φ', d. h. von der Lage der Einfalls-Ebene gegen das zweite Nicol. Die Einfalls-Ebenen können aber jede beliebige Lage einnehmen, und bilden daher einen Stern, dessen Mittelpunkt mit dem Centrum des Farbenfeldes zusammenfällt, und die Sternlinie, welche durch φ' bestimmt ist, kann als Radius Vektor angesehen werden. Diejenigen Punkte, in welchen diese durch φ' bestimmten Sternlinien den zu diesem φ' gehörigen Kreis von Δ durchschneiden, gehören den gleich hellen Curven an.

Statt $I_{,}^{2}$ einer beliebigen Constanten gleich zu setzen, wollen wir die gröfsten und kleinsten Werthe zur Bestimmung der hellsten und dunkelsten Curven aufsuchen.

Differenzirt man hierzu $I_{,}^{2}$ nach Δ, und betrachtet dabei n für kleine Aenderungen von Δ als constant, so kommt man auf: $a \sin 2\varpi\Delta = b \sin 2(\psi-\varpi\Delta)$, woraus sich ableiten läfst $tg(2\varpi\Delta-\psi)=\frac{b+a}{b-a}tg\psi$, oder $\frac{b+a}{b-a}tg\psi = tg\chi$ setzend,

$$22)\quad tg(2\varpi\Delta-\psi) = tg\chi.$$

Es ist daher $2\varpi\Delta$ um χ gröfser als ψ, oder gröfser als $\psi+\mathfrak{a}\varpi$, da auch $tg(\psi+\mathfrak{a}\varpi)=\frac{2n}{1+n^{2}}tg(\varphi-\varphi')$ ist.

Für die hellsten oder dunkelsten Curven ist also

$$2\varpi\Delta = (\mathfrak{a}\varpi+\psi)+\chi.$$

Ist n nahe gleich 1, wie man bei der Kleinheit der Einfallswinkel es annehmen darf, so ist $\frac{b+a}{b-a}$ stets positiv, also $tg\chi$ positiv so lange $tg\psi$ positiv ist, d. h. so lange $\varphi-\varphi'$ ein spitzer Winkel ist.

Es seien (Fig. 60.) AN_1 und AN_2 die Durchgangsrichtungen der Nicols; die aus A mit den Radien Ap, Ap_1, Ap_2 beschriebenen Kreise mögen Werthen von $2\varpi\Delta$ entsprechen, welche beziehlich gleich ψ, $\psi+\varpi$, $\psi+2\varpi$ sind. Die punktirten Kreise, deren Radien Aq, Aq_1, Aq_2 sind, mögen Werthen von $2\varpi\Delta$ entsprechen, welche beziehlich gleich $\psi+\frac{1}{2}\varpi$, $\psi+\frac{3}{2}\varpi$, $\psi+\frac{5}{2}\varpi$ sind. Alsdann müssen, da $\chi<\frac{1}{2}\varpi$ ist, die betrachteten Curven, die zu $2\varpi\Delta=(a\varpi+\psi)+\chi$ gehören, beziehlich zwischen den Kreisen p und q, p_1 und q_1, p_2 und q_2 liegen.

Um die gröfsten Aus- und Einbiegungen der Curven zu erhalten, braucht man nur $tg\chi=max.$ oder $min.$ zu setzen.

Da b und ψ als constant angesehen werden, so wird χ ein $max.$ oder $min.$, wenn a ein solches wird, d. h. ein Maximum, wenn $cos^2(\varphi+\varphi')=1$, ein Minimum, wenn $cos^2(\varphi+\varphi')=0$ wird. χ hat also den gröfsten Werth für $\varphi'=\frac{1}{2}(a\varpi-(\varphi-\varphi')$, den kleinsten Werth für $\varphi'=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}a\varpi-(\varphi-\varphi')]$. Die gröfsten Ausbiegungen der Ringe finden sich daher in der Richtung mm_1, welche den Winkel $\angle N_2AN_1$ halbirt, und in der darauf senkrechten Richtung m_2m_3; die gröfsten Einbiegungen in denjenigen Richtungen, welche die Quadranten zwischen den Linien mm_1 und m_2m_3 halbiren, nämlich in nn_1 und n_2n_3. Die Ringe bekommen also eine Form, die einem Quadrat ähnlich ist, und abgerundete Ecken hat, wie es in der Figur dargestellt ist.

Die Intensität der Mitte ist $I^2cos^2[\varpi\Delta-(\varphi-\varphi')]$, während $\varpi\Delta=\frac{vhd}{l^2}$ ist. Für eine bestimmte Farbe (d. h. für ein bestimmtes l) ist daher diese Intensität nur von $\varphi-\varphi'$ abhängig, und wird, wie schon bemerkt, $=0$, die

Mitte also dunkel, wenn $\varphi - \varphi' = 90 + \frac{vhd}{l^2}$ ist. Dreht man das zweite Nicol von der entsprechenden Stellung aus, so steigt die Farbe der Mitte in der Newtonschen Folge *).

3) **Sind die Durchgangs-Ebenen beider Nicols parallel**, so wird $\varphi - \varphi' = 0$, also

$$I_{,}^2 = I^2 \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2 \cos^2 2\varphi' \sin^2 \varpi\Delta.$$

Dieser Werth von $I_{,}^2$ ergänzt den für die erste Stellung (20) zu I^2; die Färbung ist daher der in jener Stellung complementar.

Man sieht also, dafs bei jeder Viertel-Drehung des zweiten Nicols die Ringe kreisförmig werden, dafs die Verwandlung der Kreisform in die quadratähnliche allmälig geschieht, dafs bei einer Drehung von 45° die Abweichung von der Kreisform am gröfsten ist, und dafs, wie aus der Formel $2\varpi\Delta = (a\varpi + \psi) + \chi$ folgt, die Ringe scheinbar gröfser oder kleiner werden. Für $\varphi - \varphi' = 0$ nämlich wird $tg\psi = 0$, also $\psi = a\varpi$, $\chi = 0$, und $2\varpi\Delta$ für denselben Ring constant $= 2a\varpi$; nimmt $\varphi - \varphi'$ zu, so wächst auch ψ und χ, und wird $\varphi - \varphi' = \frac{1}{2}\varpi$, so wird auch ψ und $\chi = \frac{2a+1}{2}\varpi$, und $2\varpi\Delta = \psi + \chi = (2a+1)\varpi$, also wiederum constant, aber um ϖ gröfser. Wächst $\varphi - \varphi'$ weiter bis ϖ, so wächst auch $\psi + \chi$ wieder allmälig um ϖ, so dafs die Ringe sich nach und nach zu vergröfsern scheinen. Umgekehrt ist es bei entgegengesetzter Drehung.

---

*) Das dunkle kurzarmige Kreuz, welches innerhalb des ersten Ringes in derjenigen Stellung erscheint, in welcher die Mitte dunkel ist, erklärt Airy aus dem Umstande, dafs für $a = 0$ die Intensität $I_{,}^2$ ein Minimum wird. Allein einerseits ist das verschwindende Glied $a \sin 2\varpi\Delta$ in der Nähe des Mittelpunkts an und für sich schon sehr unbedeutend, da dort n nahe gleich 1 ist, andrerseits gehören die Orte, in denen $a = 0$ ist, den Einbiegungen der Ringe an, während die Arme des Kreuzes den Ausbiegungen zugekehrt sind.

Farben-Erscheinungen im Bergkrystall bei elliptisch polarisirtem Einfallslichte.

Setzen wir wiederum das einfallende Licht als durch Totalreflexion in einem Glasparallelepiped elliptisch polarisirt voraus, und behalten wir die Bezeichnung von p. 430 bei, so erhalten wir für $\theta = 45$ (d. h. für circular polarisirtes Licht) als Componenten der Bewegung vor der Reflexion, in Bezug auf die Reflexions-Ebene und die darauf senkrechte Richtung,

$$-\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho}\,\sin\xi \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho}\,\cos\xi,$$

und demnach giebt die Zerlegung nach der Einfalls-Ebene beziehlich:

$$-\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho_1}\,[\sin\xi\cos(\varphi+45^0)-\cos\xi\sin(\varphi+45^0)]$$
$$=-\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho_1}\,\sin(\xi-\varphi-45^0)=-I_2\sin(\xi_1-\varphi),$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho_1}\,[\sin\xi\sin(\varphi+45^0)+\cos\xi\cos 45^0)$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho_1}\,\cos(\xi-\varphi-45^0)=I_2\cos(\xi_1-\varphi),$$

wenn man $\sqrt{\tfrac{1}{2}I\varrho_1}=I_2$ setzt. Läſst man ferner wiederum n das Axenverhältniſs der Schwingungs-Ellipsen sein, so giebt die Zerlegung nach diesen Axen, verglichen mit der ursprünglichen Schwingungsbewegung nach der Art, wie es Seite 434 geschehen ist, für jene beiden Componenten beziehlich

$$\left(nx-\frac{z}{n}\right)\sin\xi_1+\left(\frac{y}{n}-n\omega\right)\cos\xi_1$$
$$(\omega+y)\sin\xi_1+(x+z)\cos\xi_1,$$

während $nx-\frac{z}{n}=-I_2\cos\varphi$, $\frac{y}{n}-n\omega=I_2\sin\varphi=\omega+y$, $x+z=I_2\cos\varphi$ ist.

Bestimmt man hieraus die Werthe von x, y, z, ω, und setzt sie in die Ausdrücke für die Vibrationsbewegung parallel den Axen der Schwingungs-Ellipsen des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls, so erhält man, $\frac{I_2}{1+n^2}=p$ setzend, beziehlich

$a)$ $p(1-n)\cos(\xi-\varphi)$ $\quad c)$ $pn(1+n)\cos(\xi-\varphi)$

$b)$ $pn(1-n)\sin(\xi-\varphi)$ $\quad d)$ $-p(1+n)\sin(\xi-\varphi)$.

Beim Austritt aus dem Krystall wird aus (*c*) und (*d*) wegen der Verzögerung des ungewöhnlichen Strahls:

$$pn(1+n)\cos(\xi-\varphi+2\varpi\Delta), \text{ und}$$
$$-p(1+n)\sin(\xi-\varphi+2\varpi\Delta).$$

Bezeichnet dann φ' den Winkel zwischen der Brechungs-Ebene und dem zweiten Nicol, so hat man für die Schwingung nach der letztgenannten Ebene:

$$p[(1-n)\cos(\xi-\varphi)\cos\varphi'+n(1-n)\sin(\xi-\varphi)\sin\varphi' \\ +n(1+n)\cos(\xi-\varphi+2\varpi\Delta)\cos\varphi' \\ -(1+n)\sin(\xi-\varphi+2\varpi\Delta)\sin\varphi'],$$

oder

$$p\{[n(1-n)\sin\varphi'-n(1+n)\cos\varphi'\sin 2\varpi\Delta \\ -(1+n)\sin\varphi'\cos 2\varpi\Delta]\sin(\xi-\varphi) \\ +[(1-n)\cos\varphi'+n(1+n)\cos\varphi'\cos 2\varpi\Delta \\ -(1+n)\sin\varphi'\sin 2\varpi\Delta]\cos(\xi-\varphi)\}.$$

Die Intensität $I_{\prime}^2$ des interferirten Lichtes, welche der Summe der Quadrate der Coefficienten von $\sin(\xi-\varphi)$ und $\cos(\xi-\varphi)$ gleich ist, wird demnach

$$\text{IX.}\quad I_{\prime}^2=p^2[(1+n^2)^2-2n(1-n^2)\cos 2\varphi' \\ +2n(1-n^2)\cos 2\varphi'\cos 2\varpi\Delta-(1-n^4)\sin 2\varphi'\sin 2\varpi\Delta].$$

Zur Erleichterung der Untersuchung bringe man die mit $\sin 2\varpi\Delta$ und $\cos 2\varpi\Delta$ afficirten Glieder auf die Form: $A\cos(2\varpi\Delta+2\psi)$. Setzt man demgemäfs

$$2n\cos 2\varphi'\cos 2\varpi\Delta-(1+n^2)\sin 2\varphi'\sin 2\varpi\Delta \\ =A\cos 2(\varpi\Delta+\psi),$$

so ergiebt sich $A^2=(1+n^2)^2\sin^2 2\varphi'+4n^2\cos^2 2\varphi'$ und $tg\,2\psi=\frac{1+n^2}{2n}tg\,2\varphi'$, und es wird aus (IX.), wenn man $2\cos^2(\varpi\Delta+\psi)-1$ für $\cos 2(\varpi\Delta+\psi)$ setzt, und für p^2 seinen Werth restituirt,

$$\text{XI}a.\quad I_1^2=I_2^2\Bigg[1-\frac{1-n^2}{1+n^2}\Bigg(\sqrt{\sin^2 2\varphi'+\frac{4n^2}{(1+n^2)^2}\cos^2 2\varphi'} \\ +\frac{2n}{1+n^2}\cos 2\varphi'\Bigg) \\ +2\frac{1-n^2}{1+n^2}\sqrt{\sin^2 2\varphi'+\frac{4n^2}{(1+n^2)^2}\cos^2 2\varphi'}\cos^2(\varpi\Delta+\psi)\Bigg].$$

In dem letzten Gliede, welches die Farbe bestimmt, ver-

schwindet der Coefficient von $cos^2(\varpi\varDelta+\psi)$ nur für $n=1$, das System der Farben-Curven wird daher nirgend von weifsen oder dunklen Linien unterbrochen. Für sehr kleine Werthe von $1-n^2$, d. h. in geringer Entfernung von der Mitte ist dieses Glied sehr unbedeutend; die Mitte und deren nächste Umgebung mufs daher fast weifs erscheinen.

Die Gleichung für die gleichfarbigen Curven ist

$$cos(\varpi\varDelta+\psi)=Q, \text{ oder für } Q=0,$$

$$\varpi\varDelta=\frac{2a+1}{2}\varpi-\psi.$$

Wenn $2\varphi'$ die Werthe 0°, 90°, 180° etc. annimmt, erreicht auch 2ψ dieselben Werthe; beide Winkel wachsen gleichzeitig und fallen in den Grenzen der Quadranten zusammen; $\varphi'-\psi$ wird daher immer nur gering sein, so dafs man näherungsweise $\varpi\varDelta=\frac{2a+1}{2}\varpi-\varphi'$ annehmen kann. Folglich nimmt $\varDelta$, und somit auch $sin\,\alpha$ zu, wenn φ' abnimmt; die Curve ist also eine Spirale, die nach der negativen Richtung gedreht ist, d. h. sie geht nach links bei rechtsgewundenen, nach rechts bei linksgewundenen Krystallen (da für linksgewundene n, und folglich auch ψ sein Zeichen ändert).

Eine zweite Spirale erhält man, wenn man $\varphi'+\varpi$ statt φ' setzt. Alle weiteren Vergröfserungen von φ' führen auf Spiralen, welche mit den ersten beiden zusammenfallen. Das Gesichtsfeld erscheint also in der Mitte weifs, und in einiger Entfernung von derselben werden zwei in einander gewundene Spiralen sichtbar, welche der Drehung des Krystalls entgegengesetzt gewendet sind. Siehe Fig. 72.

Ferner ist zwischen $\varphi'=0$ und $\varphi'=45°$, $\varphi'<\psi$; zwischen $\varphi'=45°$ und $\varphi'=90°$, $\varphi'>\psi$ etc. Zwischen 0° und 45°, zwischen 90° und 135°, zwischen 188° und 225°, und zwischen 270° und 315° ist daher $\varDelta$ kleiner als für eine Spirale von gleichförmiger Entfernung vom Centrum; in den übrigen Octanten gröfser als solche Spirale — ein Umstand, welcher den Spiralen ein quadratisches Aussehen giebt.

Verbindung eines rechts- und eines links-gewundenen Krystalls.

Die Interferenz-Erscheinungen, welche durch Licht erzeugt werden, welches ursprünglich linear polarisirt, nach dem Durchgange durch zwei übereinandergelegte verschieden gewundene Bergkrystallplatten wiederum nach einer gemeinschaftlichen Ebene polarisirt wird, lassen sich auf folgende Weise herleiten.

Es seien beide Platten gleich dick, und die Intensität der Vibrationen in der ersten (welche rechts gewunden sein mag) längs der grofsen und kleinen Axe der elliptischen Bahn im gewöhnlichen Strahl i und i_1, im ungewöhnlichen j und j_1; in der zweiten Platte seien die entsprechenden Gröfsen, wenn der eintretende Strahl ein gewöhnlich gebrochener ist, i', i_1', j', j_1'; dagegen i'', i_1'', j'', j_1'', wenn er ein ungewöhnlich gebrochener ist.

Alsdann ist für die aus der ersten Platte tretenden Strahlen die Form der genannten Gröfsen:

$$23)\quad \begin{cases} i = \omega \sin\xi + x \cos\xi \\ i_1 = n x \sin\xi - n\omega \cos\xi \\ j_1 = y \sin(\xi + 2\varpi\Delta) + z \cos(\xi + 2\varpi\Delta) \\ j = -\dfrac{z}{n} \sin(\xi + 2\varpi\Delta) + \dfrac{y}{n} \cos(\xi + 2\varpi\Delta), \end{cases}$$

woraus sich findet durch Vergleichung mit dem eintretenden Strahl, $\xi + 2\varpi\Delta$ durch ξ_2 bezeichnend,

$$24)\quad \begin{cases} i = \cos\varphi \sin\xi + n \sin\varphi \cos\xi \\ i_1 = n^2 \sin\varphi \sin\xi - n \cos\varphi \cos\xi \\ j_1 = n^2 \cos\varphi \sin\xi_2 - n \sin\varphi \cos\xi_2 \\ j = \sin\varphi \sin\xi_2 + n \cos\varphi \cos\xi_2. \end{cases}$$

Man erhält i', i_1', j', j_1', wenn man $-n$ statt n setzt, also

$$25)\quad \begin{cases} i' = \omega_1 \sin\xi + x_1 \cos\xi & j_1' = y_1 \sin\xi_2 + z_1 \cos\xi_2 \\ i_1' = -n x_1 \sin\xi + n\omega_1 \cos\xi & j' = \dfrac{z_1}{n} \sin\xi_2 - \dfrac{y_1}{n} \cos\xi_2. \end{cases}$$

Die Coefficienten ω_1, x_1, y_1, z_1 müssen der Bedingung genügen, dafs sie sich wieder auf die Gleichungen (24) zurückführen lassen. Man hat nämlich für die gewöhnlichen Strahlen:

$$i = i'+j_1' = (\omega_1+y_1)\sin\xi+(x_1+z_1)\cos\xi$$
$$i_1 = i_1'+j' = \left(-nx_1+\frac{z_1}{n}\right)\sin\xi+\left(n\omega_1-\frac{y_1}{n}\right)\cos\xi,$$

lglich, da diese Gleichungen unabhängig von ξ existiren üssen, $\omega_1+y_1 = \cos\varphi$, $x_1+z_1 = n\sin\varphi$, $-nx_1+\frac{z_1}{n} =$ $\sin\varphi$, $n\omega_1-\frac{y_1}{n} = -n\cos\varphi$, und daher, wenn man $+n^2)^{-1} = p$ setzt,

$$\omega_1 = p(1-n^2)\cos\varphi, \quad x_1 = np(1-n^2)\sin\varphi,$$
$$y_1 = 2n^2p\cos\varphi, \quad z_1 = 2n^3p\sin\varphi.$$

eim Austritt aus der zweiten Platte hat man deswegen

$$i' = p[(1-n^2)\cos\varphi\sin\xi+n(1-n^2)\sin\varphi\cos\xi]$$
$$i_1' = p[-n^2(1-n^2)\sin\varphi\sin\xi+n(1-n^2)\cos\varphi\cos\xi]$$
$$j_1' = p[2n^2\cos\varphi\sin\xi_2+2n^3\sin\varphi\cos\xi_2]$$
$$j' = p[2n^2\sin\varphi\sin\xi_2-2n\cos\varphi\cos\xi_2].$$

anz ebenso erhält man für den ungewöhnlichen Strahl die edingungen

$$j_1 = i''+j_1'' = (\omega_2+y_2)\sin\xi_2+(x_2+z_2)\cos\xi_2$$
$$j = i_1''+j'' = \left(-nx_2+\frac{z_2}{n}\right)\sin\xi_2+\left(n\omega_2-\frac{y_2}{n}\right)\cos\xi_2,$$

ıd demnach $\omega_2+y_2 = n^2\cos\varphi$, $x_2+z_2 = -n\sin\varphi$, $nx_2+\frac{z_2}{n} = \sin\varphi$, $n\omega_2-\frac{y_2}{n} = n\cos\varphi$, folglich

$= 2pn^2\cos\varphi$, $x_2 = -2pn\sin\varphi$, $y_2 = -pn^2(1-n^2)\cos\varphi$, $= pn(1-n^2)\sin\varphi$. Es ergiebt sich also:

$$i'' = p[2n^2\cos\varphi\sin\xi_2-2n\sin\varphi\cos\xi_2]$$
$$i_1'' = p[2n^2\sin\varphi\sin\xi_2+2n^3\cos\varphi\cos\xi_2]$$
$$j_1'' = p[-n^2(1-n^2)\cos\varphi\sin\xi_4+n(1-n^2)\sin\varphi\cos\xi_4]$$
$$j'' = p[(1-n^2)\sin\varphi\sin\xi_4+n(1-n^2)\cos\varphi\cos\xi_4],$$

o ξ_4 für $\xi+4\varpi\Delta$ steht.

Betrachten wir nun die Stellung der Nicols, in wel- er $\varphi-\varphi' = 90^0$, also $\sin\varphi = \cos\varphi'$ und $\cos\varphi = -\sin\varphi'$ ird, so erhält man für die nach der Einfalls-Ebene und nkrecht darauf gerichteten Vibrationen:

$$i+j_1 = i'+i''+j_1'+j_1'' = p[-(1-n^2)\sin\varphi'\sin\xi$$
$$+n(1-n^2)\cos\varphi'\cos\xi-4n^2\sin\varphi'\sin\xi_2$$
$$-2n(1-n^2)\cos\varphi'\cos\xi_2+n^2(1-n^2)\sin\varphi'\sin\xi_4$$
$$+n(1-n^2)\cos\varphi'\cos\xi_4],$$

$$i_1+j = i_1'+i_1''+j'+j'' = p[-n^2(1-n^2)\cos\varphi'\sin\xi$$
$$-n(1-n^2)\sin\varphi'\cos\xi+4n^2\cos\varphi'\sin\xi_2$$
$$+2n(1-n^2)\sin\varphi'\cos\xi_2+(1-n^2)\cos\varphi'\sin\xi_4$$
$$-n(1-n^2)\sin\varphi'\cos\xi_4].$$

Zerlegt man diese Schwingungen nach der Durchgangs-Ebene des zweiten Nicols, so resultirt, wenn man kürzer $\frac{1-n^4}{2}\sin 2\varphi' = f$ und $n(1-n^2)\cos 2\varphi' = g$ setzt,

$$(i+j_1)\cos\varphi'+(i_1+j)\sin\varphi' = p[-f\sin\xi+g\cos\xi$$
$$-2g\cos\xi_2+f\sin\xi_4+g\cos\xi_4]$$
$$= p\{\sin\xi[-f+2g\sin 2\varpi\Delta+f\cos 4\varpi\Delta-g\sin 4\varpi\Delta]$$
$$+\cos\xi[g-2g\cos 2\varpi\Delta+f\sin 4\varpi\Delta+g\cos 4\varpi\Delta]\},$$

wofür wir setzen wollen $M\sin\xi+N\cos\xi$.

Es ist daher die Intensität I_i^2 des interferirten Lichts

$$I_i^2 = M^2+N^2 = p^2(1-n^2)^2[4n\cos 2\varphi'\sin\varpi\Delta$$
$$-2(1+n^2)\sin 2\varphi'\cos\varpi\Delta]^2\sin^2\varpi\Delta.$$

Führt man einen Hülfswinkel ψ so ein, dafs $4n\cos 2\varphi' = A\cos\psi$ und $2(1+n^2)\sin 2\varphi' = A\sin\psi$ wird, so erhält man

$$25)\ \begin{cases} tg\psi = \frac{1+n^2}{2n}tg 2\varphi', \\ A^2 = 16n^2\cos^2 2\varphi'+4(1+n^2)^2\sin^2 2\varphi' \end{cases}$$

und somit

$$\text{X.}\quad I_i^2 = \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2[16n^2\cos^2 2\varphi'+4(1+n^2)^2\sin^2 2\varphi']\times$$
$$\sin^2\varpi\Delta\sin^2(\varpi\Delta-\psi).$$

Dunkelheit herrscht also 1) für $n = 1$, 2) für $\sin\varpi\Delta = 0$, 3) für $\sin(\varpi\Delta-\psi) = 0$. Die erste Bedingung zeigt, dafs die Mitte dunkel ist. Die zweite giebt dunkle Kreise, die genau mit denen zusammenfallen, welche jede Platte einzeln geben würden.

Die dritte Bedingung giebt: $\varpi\Delta = \psi+a\varpi$, oder genähert:

$$26)\quad \varpi\Delta = 2\varphi'+a\varpi,$$

da für $\psi = \frac{a}{2}\varpi$, $\psi = 2\varphi'$ wird, und in den Zwischenwerthen beide Winkel (ψ und $2\varphi'$) in demselben Sinne wachsen, so dafs $\psi-2\varphi'$ nie bedeutend wird. Aus (26) ist

t klar, dafs Δ mit φ' zugleich ununterbrochen wächst, also ich $sin\,\alpha$; die Curve ist daher eine Spirale, die nach der ositiven Seite hin sich windet. Derselben Bedingung entricht noch $\varpi\Delta = 2(\varphi' + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\varpi) + \mathfrak{a}\varpi$ (unter $\mathfrak{b}$ so wie unr $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl gedacht), wo $\varphi' + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\varpi$ an der Stelle s vorigen φ' steht, und welches also so viele Spiralen ebt, als $\mathfrak{b}$ ganze Zahlenwerthe annehmen darf. Da nun r $\mathfrak{b} = 4$ der Radius Vektor mit demjenigen, welcher dem ofsen φ' entspricht, zusammenfällt, so giebt es 4 Spiralen, elche in Stellen, die um 90° von einander entfernt sind, ren Ausgang nehmen.

Dem Werth $\varphi' + \frac{1}{2}\mathfrak{b}\varpi$ entspricht aber genau der Werth $+ \mathfrak{b}\varpi$, wenn ψ der dem φ' zugehörige Werth ist, weil egen (25) ψ genau um ϖ wächst, wenn φ' um $\frac{1}{2}\varpi$ zunmt. Die zu den 4 dunklen Curven gehörigen Werthe n $sin\,\alpha$ ergeben sich also aus $\varpi\Delta = \mathfrak{a}\varpi + \psi$, $\varpi\Delta = \mathfrak{a}\varpi$ $(\psi + \varpi)$, $\varpi\Delta = \mathfrak{a}\varpi + (\psi + 2\varpi)$, $\varpi\Delta = \mathfrak{a}\varpi + (\psi + 3\varpi)$. de zwei auf einander senkrechte durch die Mitte gehend dachte Linien schneiden also die 4 Spiralen in Punkten, lche gleiche Entfernung vom Centrum haben. Die Kreise, lche aus dem Verschwinden des Faktors $sin^2\,\varpi\Delta$ hervorhen, schneiden mithin die 4 Spiralen in Entfernungen n 90°. Siehe Fig. 73.

Die Durchschnittspunkte der Kreise und Spiralen erben sich aus der Gleichung $sin\,\varpi\Delta = 0$ und $sin(\varpi\Delta - \psi)$ $= 0$, welche $\psi = \mathfrak{c}\varpi$, d. h. $\varphi' = \frac{\mathfrak{c}}{2}\varpi$ (unter $\mathfrak{c}$ eine ganze hl verstanden) geben. Jene Punkte liegen also in den ırchgangsrichtungen der Nicols.

Die Ausgangspunkte der Spiralen erhält man, wenn ın in $\varpi\Delta = 2\varphi' + \mathfrak{b}\varpi$, $\alpha = 0$ setzt. Dies giebt, da $= \frac{vhd}{l^2\varpi}$ wird, $\varphi' = \frac{vhd}{2l^2} - \frac{\mathfrak{b}}{2}\varpi$. Da $\frac{vhd}{2l^2}$ die Hälfte des Vinkels ist, um welchen das zweite Nicol gedreht wern mufs, um bei einer einzigen Platte die Mitte dunkel erhalten, so ist das dunkle Kreuz der Mitte, aus dessen men die Spiralen entspringen, um diesen halben Winkel gen die Durchgangsrichtungen der Nicols geneigt.

Bei grösseren Werthen von n, d. h. in bedeutenderer Entfernung von der Mitte wird $I_{,}^{2}$ sehr klein, wenn $\sin 2\varphi' = 0$ wird; es erscheinen also dort in den Richtungen der Nicols dunkle Büschel.

Da ferner zwischen $\varphi' = 0$ und $\varphi' = 45^{0}$, $\psi - 2\varphi' > 0$, und zwischen $\varphi' = 45^{0}$ und $\varphi' = 90^{0}$, $\psi - 2\varphi' < 0$ ist, so werden die Spiraltheile zwischen den Kreisen flächer, als sie für $\psi = 2\varphi'$ sein würden, und die Spiralen erhalten demnach ein quadratisches Aussehen.

Ist die linksgewundene Platte die erste, so muss n in $-n$ verwandelt werden, ψ ändert daher sein Zeichen, und die Spiralen sind links gewunden. Im Uebrigen bleibt Alles gleich.

Die grössere Lebhaftigkeit der Farben in übereinandergelegten Bergkrystallplatten, im Vergleich mit denen in einer einzigen Platte rührt daher, dass $\sin(\varpi\Delta - \psi) = 0$ die Intensität ganz verschwinden macht, während bei einer einfachen Platte in gleichem Fall ein Antheil weissen Lichtes übrig bleibt, welcher die Reinheit der Farben stört. Ueberdies ist für $2\varphi' = 0$, wodurch auch $\psi = 0$ wird,

$$I_{,}^{2} = \left(\frac{1-n^{2}}{1+n^{2}}\right)^{2} 16 n^{2} \sin^{4} \varpi\Delta.$$

Ist daher $1-n$ nur klein, und $\sin \varpi\Delta$ nicht bedeutend, so ist fast gar kein Licht bemerkbar, d. h. in den Durchgangsrichtungen der Nicols ist in geringer Entfernung von der Mitte um die Punkte des Durchschnitts der dunklen Curven einen starken Contrast hervorbringendes Dunkel.

B. *Interferenz-Erscheinungen in zweiaxigen Krystallen.*

Beschränkt man sich wiederum auf den Fall, dass die Krystallstücke, welche die Interferenz-Erscheinungen veranlassen, auf der vom Auge nach dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes gehenden Richtung senkrecht stehen, so dass man unbedenklich $\alpha'' = \alpha'$ setzen darf, so erhält man aus

Absch. II, C, wenn man $\frac{4\pi r'}{\sin^2(\alpha+\alpha')}=\varrho$, $P=I\sin\varphi'$, $S=I\cos\varphi'$ setzt, also wenn man das Azimuth der Durchgangs-Ebene des ersten Nicols in Bezug auf die Einfalls-Ebene φ' nennt, für die Bewegung in den austretenden Strahlen:

$$P'=I\varrho\frac{\sin\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}-\cos\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$S'=-I\varrho\cos\varepsilon'\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}-\cos\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$P''=I\varrho\frac{\cos\varepsilon'}{\cos(\alpha-\alpha')}\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}+\sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

$$S''=I\varrho\sin\varepsilon'\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}+\sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)$$

und demnach $P'+P''=I\varrho\frac{\sin\varphi'}{\cos^2(\alpha-\alpha')}$, $S'+S''=I\varrho\cos\varphi'$.
Für die Gleichung (II, b) ergiebt sich daher

$$M^2=\varrho^2\left[\frac{\sin\varphi'\sin\varphi}{\cos^2(\alpha-\alpha')}+\cos\varphi\cos\varphi'\right]^2,$$

$$N=\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}-\cos\varepsilon'\cos\varphi'\right)\left(\frac{\sin\varepsilon'\sin\varphi}{\cos(\alpha-\alpha')}-\cos\varepsilon'\cos\varphi\right)\times$$
$$\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi'}{\cos(\alpha-\alpha')}+\sin\varepsilon'\cos\varphi'\right)\left(\frac{\cos\varepsilon'\sin\varphi}{\cos(\alpha-\alpha')}+\sin\varepsilon'\cos\varphi\right),$$

oder wenn man den Unterschied zwischen α und α' vernachlässigt, $M=\cos(\varphi-\varphi')$, $N=\frac{1}{4}\sin 2(\varepsilon'+\varphi)\sin 2(\varepsilon'+\varphi')$.
Die allgemeine Formel für die Intensität der interferirenden Strahlen ist daher

$$\text{XI.}\quad I_{,}^2=I^2\varrho^2[\cos^2(\varphi-\varphi')-\sin 2(\varepsilon'+\varphi)\sin 2(\varepsilon'+\varphi')\times\sin^2\varpi\Delta],$$

für die senkrechte Stellung der Nicols:

$$27)\quad I_{,}^2=I^2\varrho^2\sin^2 2(\varepsilon'+\varphi)\sin^2\varpi\Delta,$$

und für die parallele Stellung:

$$28)\quad I_{,}^2=I^2\varrho^2[1-\sin^2 2(\varepsilon'+\varphi)\sin^2\varpi\Delta],$$

so dafs also die Farben in beiden Stellungen wiederum complementar sind.

1) Farbenerscheinungen in Krystallen, welche der Ebene der optischen Axe parallel geschnitten sind.

Der Gangunterschied der gebrochenen Strahlen ist beim Austritt

$$\Delta = \frac{d}{T}\left(\frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e}\right),$$

während $o^2 = k - k_1 \cos(u - u')$ und $e^2 = k - k_1 \cos(w + w')$ ist. Der Lage der brechenden Flächen zufolge wird nun $U = U' = 90^0$ und $\Phi' = n$, also nach Abschn. II, C, 10 $\cos u = \sin\alpha' \cos(E' + n)$, $\cos u' = \sin\alpha' \cos(E' - n)$, und mithin $\sin^2 u = 1 - \sin^2\alpha' \cos^2(E' + n)$, $\sin^2 u' = 1 - \sin^2\alpha' \times \cos^2(E' - n)$. Man hat sonach $\cos u \cos u' = \sin^2\alpha' (\cos^2 E' - \sin^2 n)$, und wenn man die höhern Potenzen $\sin^2\alpha'$ außer Acht läfst, $\sin u \sin u' = \sqrt{[1 - 2\sin^2\alpha'(\cos^2 E' \cos^2 n + \sin^2 E' \sin^2 n)]} = 1 - \sin^2\alpha'(\cos^2 E \cos^2 n + \sin^2 E \sin^2 n)$, folglich $\cos(u - u') = 1 - \sin^2\alpha'[\cos^2 E'(\cos^2 n - 1) + \sin^2 n(1 + \sin^2 E')] = 1 - 2\sin^2\alpha' \sin^2 n \sin^2 E$. Da ferner $\sin^2\alpha' = o^2 \sin^2\alpha$, oder wenn man für o^2 den genäherten Werth $k - k_1$ (d. i. μ^2) setzt, $\sin^2\alpha' = \mu^2 \sin^2\alpha$ ist, so wird $\cos(u - u') = 1 - 2\mu^2 \sin^2 n \sin^2 E' \sin^2\alpha$, und mithin $o^2 = k - k_1(1 - 2\mu^2 \sin^2 n \sin^2 E' \sin^2\alpha)$, wofür sich schreiben läfst:

$$o^2 = \mu^2(1 + 2k_1 \sin^2 E' \sin^2 n \sin^2\alpha).$$

Demnach erhält man, $\sin^2\alpha = r$ setzend:

$$\frac{1}{o} = \frac{1}{\mu}(1 - k_1 \sin^2 n \sin^2 E' r^2) \text{ und, wegen}$$

$$\cos\alpha' = 1 - \tfrac{1}{2}o^2 r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\mu^2 r^2,$$

$$\frac{\cos\alpha'}{o} = \frac{1}{\mu} - \left[\tfrac{1}{2}\mu + \frac{k_1}{\mu}\sin^2 n \sin^2 E'\right] r^2.$$

Da ferner u in w und u' in w' übergeht, wenn man α' mit α'' vertauscht, so wird $\cos(w + w') = -1 + \sin^2\alpha'' \times [\cos^2 E'(\cos^2 n + 1) + \sin^2 n(\sin^2 E' - 1)] = -1 + 2\sin^2\alpha'' \cos^2 E' \cos^2 n$, oder (insofern $\sin^2\alpha'' = e^2 r^2 = [k - k_1 \cos(w + w')] r^2$, oder wenn man für $\cos(w + w')$ seinen Näherungswerth -1 setzt, $\sin^2\alpha'' = (k + k_1) r^2 = \pi^2 r^2$ ist)

$$\cos(w + w') = -1 + 2\pi^2 \cos^2 E' \cos^2 n\, r^2.$$

wird also

$$e^2 = k - k_1 \cos(w + w') = \pi^2(1 - 2k_1 \cos^2 E' \cos^2 n r^2),$$

d $\frac{1}{e} = \frac{1}{\pi}(1 + k_1 \cos^2 E' \cos^2 n\, r^2)$; mithin wegen

$$\cos\alpha'' = 1 - \tfrac{1}{2}e^2 r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\pi^2 r^2,$$

$$\frac{\cos\alpha''}{e} = \frac{1}{\pi} - \left[\tfrac{1}{2}\pi - \frac{k_1}{\pi}\cos^2 n \cos^2 E'\right] r^2.$$

bstituirt man die für $\frac{\cos\alpha'}{o}$ und $\frac{\cos\alpha''}{e}$ gefundenen Werthe den Ausdruck für $\varDelta$, so erhält man

$$29)\quad \frac{\varDelta T}{d} = \frac{\pi - \mu}{\pi\mu} + \left[\frac{\pi - \mu}{2} - k_1\left(\frac{\sin^2 n}{\mu}\sin^2 E' + \frac{\cos^2 n}{\pi}\cos^2 E'\right)\right] r^2.$$

Betrachten wir den Fall, in welchem die Nicols auf ıander senkrecht stehen, für welchen die Intensität durch Gleichung (27) bestimmt ist, so sieht man, dafs dieselbe $\sin^2 \varpi\varDelta$ zugleich verschwindet, dafs also $\varDelta = Q$ (unter eine ganze Zahl verstanden) die Gleichung der dunklen rven im homogenen Lichte ist, und dafs die hellen Ringe größte Helligkeit haben, wenn $\sin^2 2(\varepsilon' + \varphi) = 1$ ist, h. da ε' nahe gleich E' ist, wenn die den Winkel der ischen Axen halbirende Linie auch den Winkel zwischen Durchgangsrichtungen der Nicols halbirt. Setzt man

$$\frac{\varDelta T}{d} - \frac{\pi - \mu}{\pi\mu} = A,\quad \frac{\pi - \mu}{2} = a,\quad \frac{k_1}{\mu}\sin^2 n = b,\quad \frac{k_1}{\pi}\cos^2 n = c,$$

rachtet r als Radius Vektor, und den Hauptschnitt als , so ist die aus (29) sich ergebende Polar-Gleichung die isochromatischen Curven

$$30)\quad A = (a - b\sin^2 E - c\cos^2 E) r^2,$$

r, auf rechtwinklige Coordinaten bezogen:

$$31)\quad A = (a - c)x^2 + (a - b)y^2.$$

s ist eine Hyperbel, deren Halbaxen $\sqrt{\frac{A}{a-c}}$ und $\sqrt{\frac{A}{b-a}}$ oder $\sqrt{\frac{A}{c-a}}$ und $\sqrt{\frac{A}{a-b}}$, je nach dem ichen von A und $a - c$, sind. Ist v die Hälfte des Win-

kels der Asymptoten, so ist $tang^2 v = \pm \frac{b-a}{a-c}$ je nach dem Zeichen von $a-c$.

Wegen $sin^2 n = \frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}$ und $cos^2 n = \frac{\pi^2-\nu^2}{\pi^2-\mu^2}$ wird $b-a = \frac{\nu^2-\pi\mu}{2\mu}$ und $a-c = \frac{\nu^2-\pi\mu}{2\pi}$; es ist demnach $a-c$ positiv für positive, negativ für negative Krystalle, und es wird $tg^2 v = \frac{\pi}{\mu}$. Der Asymptotenwinkel ist also genau wie bei den einaxigen Krystallen.

Für die mittleren Strahlen würde er mithin beim Topas (für welchen $\pi = 0{,}6194$, $\mu = 0{,}6157$ ist) 90° 20′, beim Arragonit (für welchen $\pi = 0{,}6525$, $\mu = 0{,}5914$ ist) 95° 38′ sein.

Der Gangunterschied der Mitte ist $\Delta = \frac{(\pi-\mu)d}{\pi\mu T}$; und wie bei den einaxigen Krystallen, so folgt auch hier, daſs die Werthe von Δ in dem einen Paar der Scheitelwinkel der Asymptoten gröſser, in dem andern kleiner sind, als der Werth für das Centrum. Was die Breite der Ringe längs der Axe π betrifft, so wird auf der letzteren

$$r^2 = \frac{A}{a-c}, \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{d}{T}\frac{\pi-\mu}{\pi\mu} + \frac{(a-c)d}{T} r^2.$$

Setzt man $\frac{d}{T}\frac{\pi-\mu}{\pi\mu} = \mathfrak{a} - g$ (unter $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl und unter g einen ächten Bruch verstanden), und $\frac{a-c}{T} d = k$, so wird $\Delta = \mathfrak{a} - g + kr^2$, und es erhält Δ den kleinsten ganzen Zahlenwerth, wenn $r^2 = \frac{g}{k}$. Es ist daher $\sqrt{\frac{g}{k}}$ die Entfernung des ersten dunklen Ringes von der Mitte, die Entfernung des $\mathfrak{b}+1$ten Ringes wird $\sqrt{\frac{g+\mathfrak{b}}{k}}$, und die Breite dieses letzten Ringes $\sqrt{\frac{g+\mathfrak{b}}{k}} - \sqrt{\frac{g+\mathfrak{b}-1}{k}}$.

Die Zahl der Ringe hängt von der Gröſse von k, also von

ler Gröfse von d ab; sie wächst folglich mit der Dicke der Platte. Je dicker die Platte ist, desto enger treten daher lie Ringe an einander. Sind r_1 und r_2 die Werthe von für zwei auf einander folgende Ringe, so ist $r_2^2 = r_1^2 + \frac{1}{h}$, und die Ringbreite $r_2 - r_1 = \sqrt{r_1^2 + \frac{1}{h}} - r_1$; sie nimmt also ab mit zunehmender Entfernung von der Mitte, und da sie für sehr kleine Werthe von r nahe $\sqrt{\frac{1}{h}}$ ist, o steht die Breite nahe im umgekehrten Verhältnifs mit $\sqrt{d}$.

Da $r_1^2 : r_2^2 = g + \mathfrak{b} - 1 : g + \mathfrak{b}$, so verhalten sich die Quadrate der Entfernung der Ringe, wie die um den ächten Bruch g vermehrten ganzen Zahlen.

Auf dieselbe einfache Weise, wie es oben p. 422 etc. ir einaxige Krystalle geschehen ist, läfst sich die Erscheinung für zwei übereinandergelegte Krystallplatten behandeln. Die Resultate werden den dortigen ganz analog.

) Farben-Erscheinungen in Krystallen, welche senkrecht gegen die Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen geschnitten sind.

Nach der allgemeinen Annahme haben die Ringe in em vorliegenden Fall die Form sphärischer Lemniskaten, l. h. solcher Curven, in denen das Produkt der von zwei esten Punkten (den Polen der Ringsysteme) ausgehenden Leitstrahlen constant ist. Bei den Krystallen, deren Axenvinkel so grofs ist, dafs man beide Pole nicht gleichzeitig ibersehen kann, fand man namhafte Abweichungen, und tellte das Gesetz auf, dafs nicht das Produkt der Leittrahlen, sondern das Produkt der Sinus derselben contant ist — ein Gesetz, welches durch die zu diesem Beuf angestellten Messungen bestätigt wurde.

Die Gleichung der Lemniskaten ist

$$32)\quad (x^2+y^2+a^2)^2 = a^2(b^2+4x^2),$$

vo a die halbe Entfernung der Pole, und ab das constante Produkt der Leitstrahlen ist. Der Werth der Constante b,

welcher vom Phasenunterschied abhängt, ändert sich allein von Curve zu Curve.

Aus der Theorie läfst sich die Form der isochromatischen Curven bestimmen, wenn man wiederum in

$$33)\quad \frac{\cos\alpha'}{o} - \frac{\cos\alpha''}{e} = \frac{\Delta t}{d}$$

für α', α'', o, e die ihnen eigenen Werthe substituirt und Δ einer Constanten gleich setzt. Man müfste aber, um die Curven in ihrem ganzen Verlaufe kennen zu lernen, noch die vierten Potenzen von $\sin\alpha$ berücksichtigen, wodurch zugleich o^4 und e^4, und mithin auch k_1^2 in die Rechnung eingeht. Da nun die bisher angewendeten Werthe von o^2 und e^2 nur Näherungswerthe sind (in denen die höhern Potenzen von $\pi^2 - \mu^2$ vernachlässigt sind), so mufs das Fehlen derjenigen Glieder des wahren Werthes von o und e, welche mit $(\pi^2 - \mu^2)^2$ von gleicher Ordnung der Kleinheit sind, Ungenauigkeiten in dem mit $\sin^4\alpha$ multiplicirten Gliede hervorbringen.

In der That zeigt die Ausführung wesentlichere Abweichungen von der Lemniskaten-Gleichung nur in dem eben erwähnten Gliede. Die resultirende Gleichung stellt zwar eine den Lemniskaten verwandte Curve vor, und enthält wie die Gleichung der letzteren nur gerade Potenzen von x und y, darf aber nur für die der Mitte nahen Punkte als der Wahrheit entsprechend angesehen werden.

Läfst man die vierten Potenzen von $\sin\alpha$ fort, betrachtet also nur die Curvenform in der Nähe der Mitte des Gesichtsfeldes, so kommt man auf eine Hyperbel

$$\frac{\Delta t}{d} - \frac{\nu - \mu}{\mu\nu} = \frac{\pi^2 - \mu\nu}{2\nu} y^2 - \frac{\pi^2 - \mu\nu}{2\mu} x^2 \text{ *)},$$

*) Man erhält diese Gleichung, wenn man in (33) die bisher immer benutzten Werthe von o und e setzt, wozu die Gleichungen Abschn. II, C, (10 u. 14), weil im vorliegenden Fall $U = U' = n$, $\Phi' = 90^\circ$ wird,

$$\cos u = \cos\alpha' \cos n - \sin\alpha' \sin n \sin E,$$
$$\cos u' = \cos\alpha' \cos n + \sin\alpha' \sin n \sin E,$$
$$\cos w = \cos\alpha'' \cos n - \sin\alpha'' \sin n \sin E,$$
$$\cos w' = \cos\alpha'' \cos n + \sin\alpha'' \sin n \sin E$$

liefern.

deren Asymptotenwinkel $2\,arc\left(tg = \sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\right)$ ist, und die sich daher von der gleichseitigen um so weniger unterscheidet, je kleiner der Axenwinkel $2n$ (d. h. je kleiner $\nu-\mu$) ist. Die Lemniskate giebt eine genau gleichseitige Hyperbel.

Der Werth des Asymptotenwinkels ist, wie man sieht, ganz analog dem der entsprechenden Hyperbeln, welche in den parallel der Ebene der optischen Axen geschnittenen zweiaxigen und in den parallel der optischen Axe geschnittenen einaxigen Krystallen sichtbar sind.

Merkwürdig ist das Gesetz der Curve, welche sich aus den Näherungswerthen von o und e für die senkrecht gegen eine der optischen Axen geschnittenen Krystalle ergiebt. Da dasselbe fast mit Gewifsheit erkennen läfst, dafs die Undulationshypothese bei Anwendung der strengen Werthe genau die Ringform darstellen würde, so mag die Ausführung für diesen Fall hier folgen.

Aus den beiden körperlichen Dreiecken, welche die beiden optischen Axen das eine Mal mit der Normale des gewöhnlich gebrochenen, das andere Mal mit der Normale des ungewöhnlich gebrochenen ebenen Wellensystems bilden, folgt, da bei der erwähnten Lage der brechenden Fläche $u' = \alpha'$, $w' = \alpha''$ ist,

$$\cos u = \cos\alpha' \cos 2n + \sin\alpha' \sin 2n \cos\omega$$

$$\cos w = \cos\alpha'' \cos 2n + \sin\alpha'' \sin 2n \cos\omega,$$

wo ω der Winkel ist, welchen die Einfalls-Ebene mit der Ebene der optischen Axen macht.

Bezeichnet man wiederum $\sin\alpha$ durch r, also $\sin\alpha'$ durch or, so erhält man

$$\cos u = \cos 2n + or \sin 2n \cos\omega - \tfrac{1}{2}o^2 r^2 \cos 2n,$$

und mithin, wenn man die dritten und höhern Potenzen von r aufser Acht läfst,

$$34)\quad \cos u \cos u' = \cos u \cos\alpha' = \cos 2n + or \sin 2n \cos\omega - o^2 r^2 \cos 2n.$$

Aus dem Werth von $\cos u$ findet sich alsdann

$$\sin^2 u = \sin^2 2n - 2or \sin 2n \cos 2n \cos\omega,$$

also $\quad \sin u = \sin 2n - or \cos 2n \cos\omega, \quad$ und

$$35)\quad \sin u \sin u' = \sin u \sin\alpha' = or \sin 2n - o^2 r^2 \cos 2n \cos\omega.$$

Aus (34 u. 35) erhält man ferner, wenn man $2\cos^2\frac{1}{2}\omega$ für $1+\cos\omega$ schreibt, und der Kürze wegen $\cos 2n\cos^2\frac{1}{2}\omega = S$, $\sin 2n\cos^2\frac{1}{2}\omega = R$ setzt,

$$\cos(u-u') = \cos 2n + 2oRr - 2o^2 Sr^2,$$

und demnach, wegen $k - k_1\cos 2n = v^2$,

$$o^2 = k - k_1\cos(u-u') = v^2 - 2k_1 oRr + 2k_1 o^2 Sr^2.$$

Setzt man, da nur die erste und zweite Potenz von r berücksichtigt wird, in dem mit r multiplicirten Gliede

$$o = \sqrt{v^2 - 2k_1 oRr} = v - k_1 Rr,$$

und in dem mit r^2 multiplicirten Gliede $o^2 = v^2$, so folgt

$$o^2 = v^2 - 2vk_1 Rr + 2k_1(k_1 R^2 + v^2 S)r^2,$$

also $$\frac{1}{o} = \frac{1}{v}\left[1 + \frac{k_1}{v}Rr - \frac{k_1}{v^2}(v^2 S - \tfrac{1}{2}k_1 R^2)r^2\right],$$

und wenn man diesen Ausdruck mit $\cos\alpha' = 1 - \frac{1}{2}v^2 r^2$ multiplicirt,

$$36)\quad \frac{\cos\alpha'}{o} = \frac{1}{v}\left[1 + \frac{k_1}{v}Rr - \left(\tfrac{1}{2}v^2 + k_1 S - \tfrac{1}{2}\frac{k_1^2}{v^2}R^2\right)r^2\right].$$

Vertauscht man in (34 u. 35) o mit e, so erhält man die Werthe für $\cos w\cos w'$ und $\sin w\sin w'$, mithin wenn man $2\sin^2\frac{1}{2}\omega$ für $1-\cos\omega$ schreibt, und $\cos 2n\sin^2\frac{1}{2}\omega = S'$, $\sin 2n\sin^2\frac{1}{2}\omega = R'$ setzt,

$$\cos(w+w') = \cos 2n - 2eR'r - 2e^2 S'r^2.$$

Da dieser Werth sich von $\cos(u-u')$ nur dadurch unterscheidet, dafs R' für R, S' für S, und e für o steht, so kann man aus (36) ziehen:

$$\frac{\cos\alpha''}{e} = \frac{1}{v}\left[1 - \frac{k_1}{v}R'r - \left(\tfrac{1}{2}v^2 + k_1 S' - \tfrac{1}{2}\frac{k_1^2}{v^2}R'^2\right)r^2\right].$$

Die Substitution der gefundenen Werthe in (33) giebt daher

$$\frac{\Delta t}{d} = \frac{1}{v}\left[\frac{k_1}{v}(R+R')r - \left(k_1(S-S') - \tfrac{1}{2}\frac{k_1^2}{v^2}(R^2 - R'^2)\right)r^2\right],$$

oder, insofern $R+R' = \sin 2n$, $S-S' = \cos 2n\cos\omega$, $R^2 - R'^2 = \sin^2 2n\cos\omega$ ist,

$$\frac{\Delta t}{d} = \frac{1}{v}\left[\frac{k_1}{v}\sin 2n\, r - \left(k_1\cos 2n - \tfrac{1}{2}\frac{k_1^2}{v^2}\sin^2 2n\right)\cos\omega\, r^2\right],$$

und wenn man für $\sin 2n$ und $\cos 2n$ die aus (XII, p. 77) gezogenen Werthe setzt,

$$\frac{\Delta t}{d} = \frac{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}}{\nu^2} r - \frac{\pi^2 \mu^2 - \nu^4}{2\nu^3} \cos\omega\, r^2.$$

Setzt man endlich $\pi^2\nu^2 - \nu^4$ für $\pi^2\mu^2 - \nu^4$, wie es für kleinere Werthe von n geschehen darf, so läfst sich die letzte Relation schreiben:

$$37)\quad \frac{2\nu\Delta t}{(\pi^2 - \nu^2)d} = r\left(\frac{2\tan g\, n}{\nu} - \cos\omega\, r\right).$$

Betrachtet man r als Radius Vektor und ω als Polarwinkel, so ist dies die Gleichung für die isochromatischen Curven. Das Quadrat derselben, welches wir abkürzend

$$38)\quad a^2 b^2 = r^2 (2a - r\cos\omega)^2$$

schreiben wollen, unterscheidet sich von der Polargleichung der Lemniskate nur durch das Fehlen des Gliedes $r^4 \sin^2\omega$. Nimmt man $\frac{2tg\,n}{\nu}$ für die Entfernung der beiden Pole, so ist das Gesetz dieser Curve, da $2a - r\cos\omega$ die Projektion des vom zweiten Pol kommenden Radius Vektors auf die Polarlinie ist, »dafs das Produkt des vom nächsten Pol ausgehenden Radius Vektors und der Projektion des vom entfernten Pol ausgehenden constant ist«.

Es erhellt, dafs in der Nähe des ersten Pols die Krümmung sehr nahe mit einer Lemniskate zusammenfällt, und zwar um so mehr, je entfernter der zweite Pol ist; zugleich aber auch, dafs die Genauigkeit, mit welcher die Fresnelsche Elasticitätsfläche das Gesetz der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit darstellt, für die feineren Untersuchungen unzulänglich ist.

Für den Salpeter ist nach **Brewster** das gröfste und kleinste Brechungsverhältnifs beziehlich 1,5145 und 1,335, und der Winkel ($2n'$) zwischen den scheinbaren optischen Axen 5° 20', also $\pi^2 = 0{,}5611$, $\mu^2 = 0{,}4360$ und

$$\nu^2 = \frac{\pi^2\mu^2}{\pi^2 \cos^2 n' + \mu^2 \sin^2 n'}, \quad = 0{,}4362\ ^*).$$

Da die letzte Stelle dieser Werthe unsicher ist, so liegt $\nu^2 - \mu^2 = 0{,}0002$ schon innerhalb der Grenze der Beob-

*) Der Werth von ν^2 ist von **Müller** (Pogg. XLIV, p. 284) irrig auf 0,56081 angegeben.

achtungsfehler, und man kann daher um so eher $\pi^2\mu^2 - \nu^4 = \pi^2\nu^2 - \nu^4$ setzen.

Die Gleichung (37) heifst daher für den Salpeter:

$$10{,}58\frac{\varDelta t}{d} = r(0{,}0048 - \cos\omega r),$$

oder, auf rechtwinklige Coordinaten bezogen;

$$\left(10{,}58\frac{\varDelta t}{d}\right)^2 = (x^2 + y^2)(0{,}0048 - x)^2.$$

Will man diejenigen Stellen aufsuchen, in denen die isochromatischen Curven Unterbrechungen erleiden, d. h. die von Strahlen gebildet werden, welche der Interferenz entgingen: so hat man nur die Austrittspunkte derjenigen Strahlen zu bestimmen, welche senkrecht gegen das erste oder zweite Nicol polarisirt sind; oder wenn man die Aufgabe ganz allgemein stellt, die Austrittspunkte der Strahlen, deren Polarisations-Ebenen einander parallel sind.

Man kann hierzu von den Gleichungen (11) p. 296 ausgehen, aus denselben φ eliminiren, für $\sin u$ und $\sin u'$ die oben gefundenen Werthe setzen, und für das Azimuth ε der Polarisations-Ebene gegen die (veränderliche) Einfalls-Ebene, das Azimuth derselben gegen einen der beiden Hauptschnitte einführen. Die resultirende Gleichung zwischen E und α ist die Polargleichung der unterbrechenden Curven.

Man erhält dieselbe Gleichung auf eben so kurzem Wege, wenn man die Lage der Polarisations-Ebene mit Hilfe der Elasticitätsfläche bestimmt, wie folgt.

Zur Bestimmung der Schwingungs-Richtung hat man 1) insofern sie mit dem gröfsten oder kleinsten Radius Vektor der Elasticitätsfläche $\varrho^2 = a^2\mu^2 + b^2\nu^2 + c^2\pi^2$ (wo a, b, c die Cosinus der Winkel sind, welche der Radius Vektor mit den Elasticitätsaxen bildet) als zusammenfallend sich betrachten läfst, die Gleichung $\partial\varrho = 0$, d. h.

$$39)\quad a\mu^2\partial a + b\nu^2\partial b + c\pi^2\partial c = 0,$$

2) insofern sie zugleich in der Well-Ebene liegt, deren Gleichung $x = By + Cz$ sei, für x, y, z ihre Werthe $a\varrho$, $b\varrho$, $c\varrho$ einführend, die Gleichung

$$40)\quad a = Bb + Cc.$$

Eliminirt man aus der ersten Gleichung $\frac{\partial b}{\partial a}$ und $\frac{\partial c}{\partial a}$
ittelst der Differenzialgleichung der letzteren und der Glei-
ıung $a^2+b^2+c^2=1$, d. h. mittelst

$\partial a = B\partial b + C\partial c$ und $a\partial a + b\partial b + c\partial c = 0$,
elche liefern:

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{c+Ca}{Bc-Cb} \text{ und } \frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{b+Ba}{Bc-Cb},$$

erhält man

$$41)\quad \mu^2 a(Bc-Cb)+\nu^2 b(Ca+c)-\pi^2 c(Ba+b)=0.$$

Ist nun $x=py+qz$ die Gleichung der Polarisations-
bene, so hat man, insofern diese Ebene durch die Schwin-
ıngsrichtung geht, aus (40)

$$a = pb+qc,$$

ıd insofern sie durch die Normale der Well-Ebene geht,
ren Gleichungen

$$42)\quad x=-\frac{1}{C}z,\qquad y=\frac{B}{C}z$$

nd, zur Bedingung:

$$\frac{1}{C}+\frac{pB}{C}+q=0,\quad \text{d. h. } q=-\frac{1+pB}{C};$$

ithin durch die Verbindung beider Bedingungsgleichungen:

$$43)\quad a=pb-\frac{1+pB}{C}c.$$

Da $z=o$ die Gleichung der Krystallfläche ist, so ist
e Durchschnittslinie derselben mit der Polarisations-Ebene
$=py$, folglich p die Tangente des Winkels, welchen
ese Durchschnittslinie mit der Axe der y bildet, oder was
he dasselbe ist, da die Polarisations-Ebenen nahe senk-
cht stehen auf der Krystallfläche, die Tangente des Azi-
ıthes der ersteren gegen den Hauptschnitt yz. Es ha-
n daher alle Wellen-Ebenen, welche demselben p ent-
rechen, parallele Polarisations-Ebenen.

Die Elimination von a, b und c aus (40, 41, 43) giebt
e Bedingung der Parallelität der Polarisations-Ebene.

Aus der Verbindung von (40 u. 43) findet man:

$$b=-\frac{1+C^2+Bp}{(B-p)C}c,\quad a=-\frac{B+(B^2+C^2)p}{(B-p)C}c,$$

und durch Substitution dieser Werthe in (41):

$$44)\quad c\pi^2(B-p)(1+Bp)+\nu^2(1+C^2+Bp)p \\ -\mu^2[B+(B^2+C^2)p]=0.$$

Um das, die Lage der im Krystall sich verbreitenden ebenen Wellen bestimmende, B und C zu finden, bemerke man, dafs, wenn wiederum E das Azimuth der Einfalls-Ebene in Bezug auf den Hauptschnitt yz ist, die Gleichungen der gewöhnlichen Strahlen sind:

$$45)\quad y=tg\,\alpha'\cos E\,z,\quad x=tg\,\alpha'\sin E\,z;$$

aus der Vergleichung mit (42) folgt daher:

$$C=-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha'}}{\sin\alpha'\sin E},\quad B=-\cot E,$$

so dafs man aus (44) erhält, wenn man $\pi^2-\mu^2=2k_1$, $\nu^2-\mu^2=2k_2$, $\pi^2-\nu^2=2k_3$ setzt,

$$46)\quad \sin^2\alpha'=\frac{k_2p}{(k_1-k_3p^2)\sin E\cos E-(k_1+k_3)p\cos^2E+k_1p},$$

während $\sin^2\alpha'=o^2\sin^2\alpha$ und o^2 zwischen μ^2 und ν^2 liegt. Da aber μ^2 und ν^2 in denjenigen Krystallen einander sehr nahe liegen, deren Axenwinkel sehr klein ist, und in denen allein beide Ringsysteme sich übersehen lassen, so kann man o^2 constant und gleich μ^2 oder gleich ν^2 betrachten; es stellt daher die vorstehende Gleichung eine auf der Oberfläche des Krystalls befindliche Hyperbel vor, in welcher $\sin\alpha$ der Radius Vektor und E der Polarwinkel ist, wenn man die Axe der y als Polaraxe betrachtet. Von dieser Hyperbel kommen alle diejenigen gewöhnlichen Strahlen her, deren Polarisations-Ebenen parallel sind und den Winkel $arc(tg=p)$ mit der Axe der y bilden. Die von denselben Punkten herkommenden ungewöhnlichen Strahlen sind nahe senkrecht darauf polarisirt.

Befindet sich daher z. B. das erste Nicol im Azimuthe h, von der Axe der y aus gerechnet, so treten in derjenigen Hyperbel, für welche $p=tg\,h$ ist, nur gewöhnliche Strahlen aus dem Krystall, und sie erscheinen hell oder dunkel, je nachdem beide Nicols parallel sind oder sich senkrecht kreuzen.

Verlegt man die Polaraxe, und zwar so, dafs sie mit

der alten (der Axe der y) den Winkel m bildet, und bezeichnet den neuen Polarwinkel $E-m$ durch v, so ergiebt sich die auf die neue Axe bezogene Gleichung der Hyperbel aus der obigen (46), wenn man darin $m+v$ für E substituirt. Der Zähler bleibt dadurch ungeändert, und der Nenner verwandelt sich in

$$\sin v \cos v (f \cos 2m + gp \sin 2m) + \tfrac{1}{2} f \sin 2m (2\cos^2 v - 1)$$
$$- gp(\cos^2 m \cos^2 v + \sin^2 m \sin^2 v) + k_1 p,$$

wo $k_1 - k_3 p^2 = f$ und $k_1 + k_3 = g$ gesetzt ist.

Wählt man nun m so, dafs der Faktor von $\sin v \cos v$ verschwindet, so ist die neue Axe zugleich die Hauptaxe der Hyperbel. Der Winkel m, welchen diese Hauptaxe mit der Axe der y bildet, ist also bestimmt durch die Gleichung

$$47) \quad f \cos 2m + gp \sin 2m = 0.$$

Substituirt man den hieraus entnommenen Werth von f, nämlich $-gp\,tg\,2m$ in den vorigen Ausdruck, und bedenkt, dafs

$$tg\,2m \sin 2m + \cos 2m = \frac{1}{\cos 2m},$$

$$tg\,2m \sin m \cos m - \sin^2 m = \frac{\sin^2 m}{\cos^2 m}$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung (46) in

$$\sin^2 \alpha' = \frac{k_2 \cos 2m}{-g \cos^2 v + g \sin^2 m + k_1 \cos 2m},$$

oder wenn man die Werthe von g, k_1, k_2, k_3 restituirt, und reducirt, in:

$$48) \quad \sin^2 \alpha = -\frac{(\nu^2 - \mu^2) \cos 2m}{\delta^2 [(2\pi^2 - \nu^2 - \mu^2) \cos^2 v + (\nu^2 - \mu^2) \sin^2 m - (\pi^2 - \mu^2)]},$$

welches die Gleichung der Hyperbel, auf ihre Hauptaxe bezogen, ist.

Es sind also die Quadrate der grofsen und kleinen Halbaxe beziehlich:

$$49) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{(\nu^2 - \mu^2) \cos 2m}{(\pi^2 - \nu^2) + (\nu^2 - \mu^2) \sin^2 m}, \\[2ex] -\dfrac{1}{\delta^2} \cdot \dfrac{(\nu^2 - \mu^2) \cos 2m}{(\pi^2 - \mu^2) - (\nu^2 - \mu^2) \sin^2 m}, \end{array} \right.$$

und wenn ψ der halbe Asymptotenwinkel ist, so hat man

$$50)\quad tg\psi = \sqrt{\frac{(\pi^2-\nu^2)+(\nu^2-\mu^2)\sin^2 m}{(\pi^2-\mu^2)-(\nu^2-\mu^2)\sin^2 m}}.$$

Man sieht aus (49), dafs die grofse Axe imaginär wird zwischen $m=+45^0$ und $m=-45^0$, so wie in dem Scheitelquadranten zwischen $m=135^0$ und $m=225^0$, d. h. dafs die Axen sämmtlicher Hyperbeln mit der Polarlinie der Lemniskaten Winkel bilden, welche $\gtrless 45^0$ sind. Der erste der Ausdrücke (49), gleich ϱ' gesetzt, ist, wenn man m als Polarwinkel und ϱ' als Radius Vektor betrachtet, die Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Scheitel sämmtlicher Hyperbeln liegen. Man übersieht, dafs ϱ' zwei Maxima hat, nämlich für $m=+90^0$ und $m=-90^0$, und dafs der Werth derselben, da in diesem Fall $o^2=\nu^2$ wird,

$$\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}} = \frac{\sin n}{\nu}$$

ist; dafs ferner ϱ' vier Mal verschwindet; nämlich für $m=\pm 45$ und $m=\pm 135$.

Die Hyperbeln sind also von der Mitte am entferntesten, wenn die Nicols den Winkel zwischen den beiden Hauptschnitten des Krystalls halbiren, und sie gehen in zwei sich senkrecht kreuzende Linien über, wenn die Nicols einem der Hauptschnitte parallel sind. Die Curve selbst, in welcher die Scheitel aller Hyperbeln liegen, nimmt daher ungefähr die Form der Figur 53. an.

Für $m=90$ wird $tg\psi = \sqrt{\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2-\nu^2}} = \sec n$, also ist die Hyperbel dort um so genauer gleichseitig, je kleiner der Winkel zwischen den optischen Axen ist *). Für die anderen (zu anderen Werthen von m gehörigen) Hyperbeln sind die Asymptotenwinkel kleiner, sie nähern sich aber um so mehr der Gleichheit, je kleiner n ist.

Um

*) In der Müller'schen Abhandlung über die dunklen Büschel (Pogg. Ann. XLIV, p. 273), in welche sich überdies mehrere Fehler eingeschlichen haben, ist durch eine Zeichenverwechselung auch die Gleichung der Hyperbel und der etwas complicirte Ausdruck für den Asymptotenwinkel, unrichtig geworden.

Um die Punkte zu finden, in denen die Hyperbeln die Polarlinie des Ringsystems (die Axe der x) treffen, hat man nur in (48) $v = 90 - m$ zu setzen, wodurch man als Quadrat der Entfernung des Durchschnittspunktes von der Mitte

$$\sin^2\alpha = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2(\pi^2 - \mu^2)} = \frac{\sin^2 n}{\nu^2}$$

erhält. Die constante Gröfse dieses Werthes zeigt, dafs sämmtliche Hyperbeln durch denselben Punkt der Polarlinie hindurch gehen, etwa wie es Figur 61. angiebt.

Die Tangente p desjenigen Winkels, welchen das erste Nicol mit dem Hauptschnitt yz bilden mufs, damit die Lemniskaten von einer zu einem bestimmten Werth von m gehörigen Hyperbel unterbrochen werden, wenn man das zweite Nicol senkrecht gegen das erste stellt, findet sich aus der Gleichung (47), welche, nach p geordnet, heifst:

$$k_3 p^2 - (k_1 + k_3) tg\, 2m p - k_1 = 0.$$

Man sieht hieraus, dafs es zwei Werthe von p, also 2 Stellungen der Nicols giebt, welche dieselben Hyperbeln erzeugen. Da ferner aus dieser Gleichung folgt, dafs das Produkt der beiden Werthe von p der Constanten $-\frac{k_1}{k_3}$, d. h. der Gröfse $-\frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2 - \nu^2}$ oder $-sec^2 n$ gleich ist, so stehen die durch die beiden Werthe von p bestimmten Richtungen sehr nahe auf einander senkrecht, wenn μ und ν sich wenig unterscheiden. Für diesen Fall gelten aber auch nur die Formeln, da sie unter der Voraussetzung entwikkelt sind, dafs o^2 sehr nahe constant (oder was dasselbe ist, $\nu^2 - \mu^2$ sehr nahe gleich Null) ist.

Der Widerspruch, dafs es zwei auf einander senkrechte Richtungen der Polarisations-Ebenen giebt, welche denselben Hyperbeln, d. h. denselben Strahlenrichtungen angehören, ist nur ein scheinbarer. Betrachtet man nämlich so die ungewöhnlichen Strahlen, wie die gewöhnlichen betrachtet worden sind, so hat man nur α' mit α'', und mithin o^2 mit e^2 zu vertauschen; die Gleichungen ändern daher ihre Form

nicht, und namentlich bleibt die Gleichung (47) ganz dieselbe, da sie von o^2 unabhängig ist. Dreht man also die beiden Nicols (oder was dasselbe ist, den zwischen ihnen befindlichen Krystall) um 90°, so bleibt zwar die Form der Hyperbeln dieselbe, es sind aber nicht mehr dieselben Strahlen, welche dieselben bilden. Nämlich diejenigen Hyperbeltheile, welche nur gewöhnliche Strahlen austreten liefsen, lassen in der zweiten Stellung die darauf senkrecht polarisirten ungewöhnlichen Strahlen austreten, und umgekehrt.

Betrachten wir eine bestimmte Stellung des Krystalls zwischen den gekreuzten Nicols, so wird in derjenigen der Hyperbeln (48) das Licht vollkommen ausgelöscht, welche zu einem aus (47) gezogenen m gehört, unter p die Tangente der Neigung des ersten Nicols gegen den Hauptschnitt yz verstanden. Aendert man m ein Weniges nach der einen und nach der andern Richtung, so bekommt man Hyperbeln, deren (gewöhnliche oder ungewöhnliche) Strahlen eine nur geringe Neigung gegen das erste Nicol haben, die zugehörigen (ungewöhnlichen und gewöhnlichen) Strahlen sind daher im Krystall nur schwach, und die Interferenz ist um so unmerklicher, je geringer die Variation von m ist. Eine Folge davon ist, dafs in der Nähe der hyperbolischen vollkommen dunklen Linien (48) das Licht noch sehr schwach ist, oder mit andern Worten, dafs sich die hyperbolischen dunklen Linien in Büschel ausdehnen, die nach beiden Seiten hin heller und heller werden, und mehr und mehr die Ringe sichtbar werden lassen. Da nun die Intensität des nicht interferirten (und sehr nahe auch des sehr schwach interferirten) Lichtes blofs von der Neigung der Polarisations-Ebene des Einfallslichtes (d. h. des ersten Nicols) gegen die des gebrochenen Lichtes abhängt, so wird die Gröfse der Dunkelheit in den Büscheln dieselbe sein in denjenigen Hyperbeln, in welche sich die vollkommen dunkle Hyperbel verwandelt, wenn m sich etwas ändert. Die Grenzen der dunklen Büschel (wenn man bei dem allmäligen Verlieren der Dunkelheit von Grenze sprechen darf) wer-

den also wiederum Hyperbeln sein, und zwar sind es diejenigen, welche bei einer kleinen Drehung des Krystalls vollkommen dunkel werden. Die Büschel bekommen dadurch das Ansehen von Keilen, deren Spitzen in den Polen zusammenstofsen.

In dem Bisherigen ist immer ein negativer Krystall vorausgesetzt, d. h. es ist π als die gröfste Elasticitätsconstante betrachtet. Da aber die positiven Krystalle sich von diesen nur durch die Werthe von o^2 und e^2 unterscheiden, und dieselben genau die Werthe von o^2 und e^2 der negativen Krystalle annehmen, wenn man π als die kleinste und μ als die gröfste Elasticitätsconstante ansieht, so darf man für die positiven Krystalle nur π und μ in den aufgestellten Formeln mit einander vertauschen.

Gedruckt bei A. W. Schade.



Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 11.

Fig. 12

Fig. 22.

Fig. 20.

Fig. 29.

grün

blau



Fig. 33.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 46.

Fig. 44.

Fig. 53.

Fig. 51.

Fig. 57.

Fig. 61.



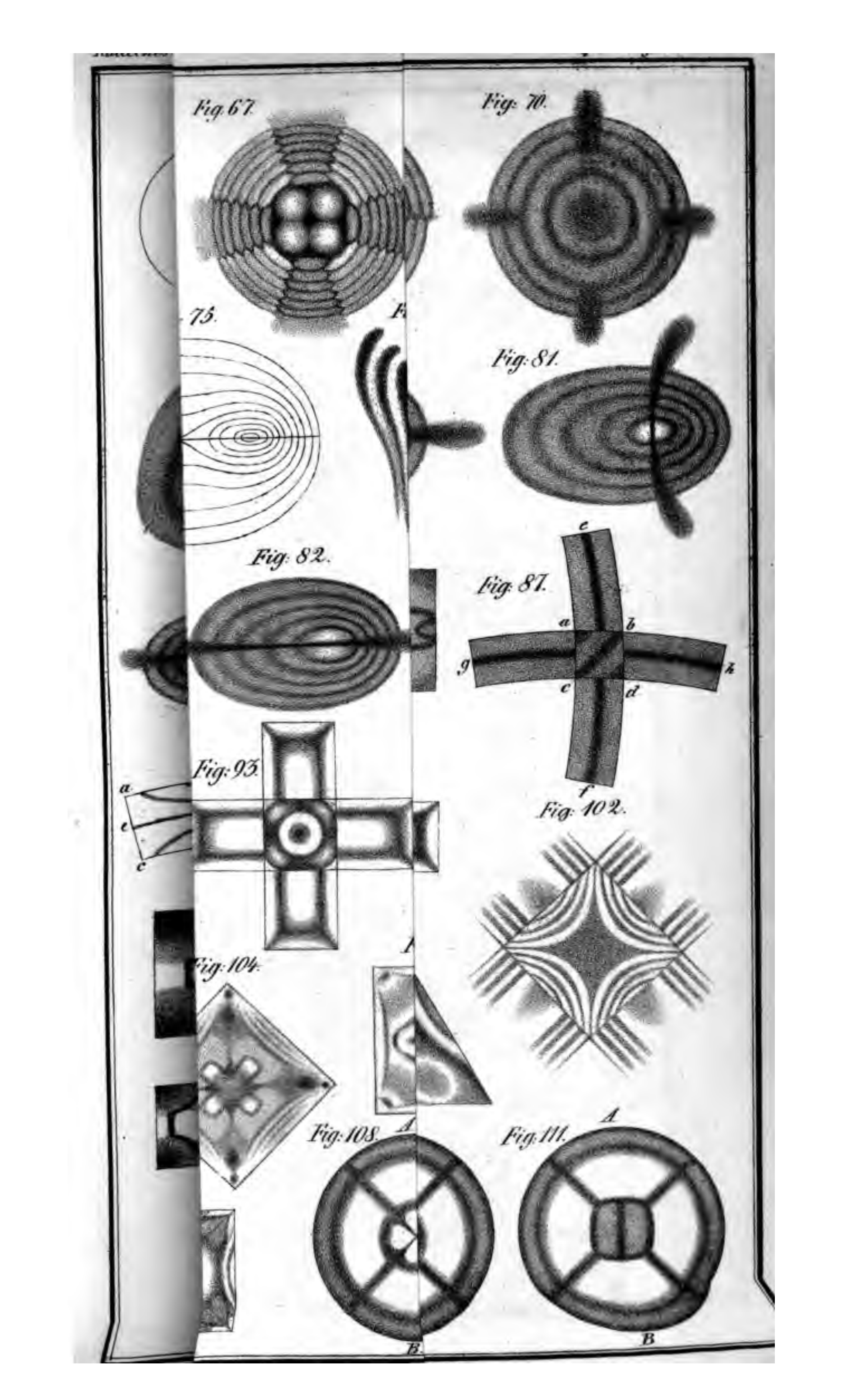


Fig. 67.
Fig. 70.
75.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 87.
a
b
c
d
e
f
g
h
Fig. 93.
Fig. 102.
Fig. 104.
Fig. 108.
Fig. 111.
A
B

